ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1988

ТОМ 303 № 3

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

С другой стороны, проектор Π_- можно представить в виде

$$\Pi_- = U \left\| \begin{matrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| U',$$

где U – ортогональная матрица, приводящая матрицу Z к форме Шура

$$Z = U \left\| \begin{matrix} B & D \\ 0 & C \end{matrix} \right\| U',$$

причем собственные значения матриц B и C лежат в левой и правой полуплоскости соответственно. Разбив матрицы U, Π_- на квадратные блоки $U = \|U_{ij}\|$, $\Pi_- = \|\Pi_{ij}\|$, $i, j = 1, 2$, согласно [11, 12] получим

(16) $\quad \Pi_{11} = U_{11}U'_{11} = (E + S^2)^{-1}$,

и, следовательно, Π_{11}^{-1} существует. Таким образом, в новой редакции шаг 2 выглядит так. Согласно (6) или (8) вычисляется проектор Π_- (при необходимости производится его уточнение в соответствии со схемой Ньютона–Рафсона). Искомое решение находится из (15):

$$S = \Pi_{11}^{-1}\Pi_{12}.$$

4. Соотношение (16) говорит о том, что с ростом нормы матрицы S возрастают нормы матриц U_{11}^{-1} и Π_{11}^{-1}. Это, как отмечено в [13], приводит к снижению точности вычисления искомой матрицы S (подробности см. в [7, 13]). В этой связи целесообразно провести балансировку матрицы Z, суть которой опишем применительно к уравнению (11). Произведем в этом уравнении замену $S = lK$, где скаляр l – оценка нормы матрицы S. Очевидно, такая балансировка (переход от матрицы S к матрице K) уменьшит норму соответствующей матрицы Π_{11}^{-1} и улучшит ее обусловленность. Аналогичным образом эта замена повлияет на матрицу U_{11}^{-1}, что повысит эффективность метода Шура [14]. Окончательно: матрица K удовлетворяет следующему "сбалансированному" варианту уравнения (11):

$$KF + F'K - K(lGR^{-1}G')K + l^{-1}Q = 0,$$

а скаляр l, как и в [11], определяется так [15]:

$$l = [(a^2 + bc)^{1/2} - a]b^{-1},$$
$$a = -\max_j \operatorname{Re}\lambda_j(F), \qquad b = \sigma_{\max}(GR^{-1}G'), \qquad c = \sigma_{\min}(Q),$$

где $\lambda_j(X)$ – j-е собственное значение матрицы X, $\sigma_{\max}(Y)$, $\sigma_{\min}(Y)$ – максимальное и минимальное собственные значения симметрической матрицы Y.

Описанная процедура балансировки оказалась эффективной в случае [13], когда при решении АУР методом Шура появлялась численная неустойчивость, которую не устраняли входящие в EISPACK и LINPACK процедуры (подробности см. в [7]).

Институт математики и механики
Академии наук АзССР, Баку
Институт математики
Академии наук УССР, Киев

Поступило
28 VI 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Халмош П.* Конечномерные векторные пространства. М.: Физматгиз, 1963. 263 с. 2. *Jons J.Jr.* – Proc. Amer. Math. Soc., 1972, vol. 31, p. 333–339. 3. *Годунов С.К.* – Сиб. матем. журн., 1986, т. 27, № 5, с. 24–37. 4. *Алиев Ф.А., Бордюг Б.А., Ларин В.Б.* – Изв. АН СССР. Техн. киберн., 1985, № 2, с. 143–151. 5. *Абрамов А.А.* – ЖВМиМФ, 1971, № 1, с. 275–278. 6. *Roberts J.D.* – Int. J. Contr., 1980, vol. 38, № 4, p. 677–687. 7. *Алиев Ф.А., Бордюг Б.А., Ларин В.Б.* Использование матричной сигнум-функции при построении матрицы Грина и решении алгебраических уравнений Риккати. Баку, 1987. 31 с. Препринт/АН АзССР. Ин-т физики, № 87.275. 8. *Ларин В.Б.* – Изв. АН СССР. Техн. киберн., 1983, № 2, с. 186–199. 9. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные системы управления. М.: Мир, 1977. 650 с. 10. *Алиев Ф.А., Бордюг Б.А., Ларин В.Б.* Численные методы решения алгебраических уравнений Риккати. Киев, 1981. 42 с. Препринт/АН УССР. Ин-т математики; № 81.41. 11. *Алиев Ф.А., Бордюг Б.А., Ларин В.Б.* Изв. АН СССР. Техн. киберн., 1987, № 3, с. 169–175. 12. *Алиев Ф.А., Бордюг Б.А., Ларин В.Б.* – ДАН, 1987, т. 292, № 4, с. 783–788. 13. *Petkov P.Hr., Christov N.D., Konstantinov M.M.* – Systems and Control Lett., 1987, № 9, p. 197–201. 14. *Laub A.J.* – IEEE Trans. Automatic Contr., 1979, vol. 24, № 6, p. 913–921. 15. *Mori T., Derese I.A.* – Int. J. Contr., 1984, vol. 39, № 2, p. 247–256.

УДК 517.964 МАТЕМАТИКА

С.Н. АНТОНЦЕВ, Х.И. ДИАС (ИСПАНИЯ)

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПО ЛОКАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

(Представлено академиком Л.В. Овсянниковым 12 VII 1988)

В работе излагаются новые результаты по пространственной и временной локализации решений нелинейных эллиптических и параболических уравнений общего вида при наличии в них "источников" – заданной правой части. Результаты получены энергетическим методом, ранее предложенным и обоснованным в работах авторов [1–3, 9, 10].

Исследуются такие свойства решения, как конечное время локализации (обращения в нуль) и пространственная локализация для эволюционных уравнений, а также обращение в нуль на множестве положительной меры для эллиптических уравнений. Для параболических уравнений частного вида и без "источников" некоторые из указанных свойств решения ранее изучены многими авторами (см. ссылки в [3, 4, 10]).

Основная цель настоящей работы – исследование уравнений с заданной правой частью, приводящих к неоднородным нелинейным обыкновенным дифференциальным неравенствам для энергетических функций.

Используемый метод применим также и к системам уравнений составного типа, в том числе возникающим в механике сплошной среды [2].

1. Параболические уравнения. Рассмотрим в области $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \subset R^n$, $t \in R^1_+$, уравнение

$$(1)\qquad \frac{\partial\psi(x, u)}{\partial t} - \operatorname{div} \mathrm{A}(t, x, u, \nabla u) + B(t, x, u) = f(t, x) + \operatorname{div} g(t, x),$$

$$\mathrm{A} = (A_1, \dots, A_n), \qquad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right), \qquad \operatorname{div} A = \frac{dA_i}{dx_i},$$

предполагая, что Ω — ограниченная область с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$ и для $(t, x, s, r) \in R_+^1 \times \Omega \times R \times R^n$ выполнены условия

(2) $\quad c_2|r|^p \leqslant \mathrm{A}(t, x, s, r) \cdot r \leqslant c_1|r|^p, \quad 1 < p < \infty; \quad c_1, c_2 > 0;$

(3) $\quad c_3|s|^{\sigma+1} \leqslant B(t, x, s) \cdot s, \quad \sigma > 0, \quad c_3 \geqslant 0;$

(4) $\quad c_5|s|^{\beta+k} \leqslant \Psi(s, k) \leqslant c_4|s|^{\beta+k}, \quad k > 0, \quad \beta > 0; \quad c_4, c_5 > 0,$

$$\Psi(s, k) = |s|^{k-1} s\psi(x, s) - \int_0^s \psi(x, \tau)\, |\tau|^{k-1} \tau\, d\tau.$$

1а. Конечное время локализации решения. Начнем с изучения локализации (обращения в нуль) за конечное время решения уравнения (1), удовлетворяющего следующей начально-краевой задаче:

(5) $\quad u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega; \quad u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Gamma_T = (0, T) \times \Gamma.$

Будем рассматривать слабое обобщенное решение $u(t, x)$ задачи (1), (5) такое, что

(6) $\quad v(t, x) \equiv |u(t, x)|^{(k-1)/p} \cdot u(t, x) \in$

$$\in L_{\mathrm{loc}}(0, T; \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^{p(\beta+k)/(p+k-1)}(\Omega)),$$

$$k = \begin{cases} 1, \text{ если } n \leqslant p \text{ или } \beta + 1 \leqslant np/(n-p), \\ \beta(n-p) - n(p-1)/p, \text{ если } n < p \text{ и } 1 + \beta > np/(n-p). \end{cases}$$

Детальное определение обобщенного решения дано в [2, 9, 10]. Предполагается, что

(7) $$\begin{aligned} &f(t, x) \in L^{(p+k-1)/(p+k-2)}(0; T; L^{(\beta+k)/\beta}(\Omega)), \\ &g(t, x) \in L^{(p+k-1)/(p-1)}(0, T; L^{p/(p-1)\cdot(k+\beta)/(\beta+1)}(\Omega)). \end{aligned}$$

Теорема 1. *Пусть $u(t, x)$ — обобщенное решение задачи* (1), (5) *и дополнительно к условиям* (6), (7) *и* (2)–(4) *с $c_3 \geqslant 0$ выполнено неравенство*

(8) $\quad p - 1 < \beta.$

Тогда для $T_f \in (0, T)$ существуют положительные постоянные c_6, c_7, c_8 (c_6, c_7 малые по сравнению с c_2) такие, что если

(9) $$\left(\| f(t, \cdot)\|_{(\beta+k)/\beta, \Omega}^{(p+k-1)/(p+k-2)}; \quad \| g(t, \cdot)\|_{\lambda p/(p-1), \Omega}^{(p+k-1)/(p-1)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant c_6(T_f - t)_+^{\alpha/(1-\alpha)}, \quad \forall t \in (t_1, T);$$

(10) $$\| u(t_1, \cdot)\|_{\beta+k, \Omega}^{\beta+k} \leqslant c_7(T_f - t_1)^{1/(1-\alpha)}, \quad v_+ = \max(0, v),$$
$$\alpha = (p - 1 + k)/(\beta + k), \quad \lambda = (k + \beta)/(\beta + 1), \quad \|\cdot\|_{q, \Omega} = \|\cdot\|_{L^q(\Omega)},$$

то

(11) $$\| u(t, \cdot)\|_{\beta+k, \Omega}^{\beta+k} \leqslant c_8(T_f - t)_+^{1/(1-\alpha)}, \quad \forall t \in (t_1, T)$$

и, в частности,

(12) $\quad u(t, x) \equiv 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t \geqslant T_f.$

Доказательство. Приведем схему доказательства, рассмотрев для простоты лишь случай $k = 1$. Согласно [2, 9] для обобщенного решения $u(t, x)$ задачи (1), (5) имеет место энергетическое соотношение

(13) $$\frac{dy}{dt} + (\mathrm{A}, \nabla u)_\Omega + (B, u)_\Omega = (f, u)_\Omega - (g, \nabla u)_\Omega,$$

где

$$(u, v)_\Omega = \int_\Omega u \cdot v\,dx, \qquad y(t) = (\Psi(x, u(t, x)), 1)_\Omega .$$

Последнее формально может быть получено путем умножения уравнения (1) на $|u|^{k-1} \cdot u$ и интегрирования по частям. Далее используем неравенства Юнга, Гёльдера, а также следствие из теорем вложения С.Л. Соболева:

$$(14) \quad c_2 c_9 \| v \|^p_{q,\Omega} \leqslant c_2 \| \nabla v \|^p_{p,\Omega} \leqslant (\mathrm{A}(v, \nabla v), \nabla v)_\Omega ,$$

$$1 \leqslant q \leqslant np/(n-p), \qquad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega).$$

Из (13), с учетом (2)–(4), (6)–(8) и (14) при $q = \beta + 1$, получаем обыкновенное неоднородное дифференциальное неравенство

$$(15) \quad \frac{dy}{dt} + c_{10}, \ y^\alpha \leqslant c_{11}(T_f - t)_+^{\alpha/(1-\alpha)}, \qquad 0 < \alpha = \frac{p}{\beta+1} < 1,$$

где

$$c_{10} = \left(1 - \frac{2\epsilon^p}{p}\right) \frac{c_9 c_2}{c_4^\alpha}, \qquad c_{11} = \frac{\epsilon^{-p'}}{p'} (1 + (c_9)^{-p'/p}) c_6 c_2^{-p'/p},$$

$$\forall \epsilon > 0, \qquad p' = \frac{p}{p-1} .$$

Для решений неравенства (15) справедлива оценка [3, 8]

$$(16) \quad y(t) \leqslant c_8 (T_f - t)_+^{1/(1-\alpha)}, \qquad c_7 \leqslant c_8(c_7, c_{10}, c_{11}),$$

если начальные данные (постоянная c_7), время T_f выключения "источников", мощность "источника" c_6 (т.е. постоянная c_{11}) удовлетворяют соотношению

$$c_{11} + c_7/(1-\alpha) \leqslant c_{10} c_7^\alpha .$$

Результат теоремы может быть интерпретирован следующим образом: решение $u(t, x)$ обращается в нуль, начиная с момента времени T_f выключения "источников" f и g.

З а м е ч а н и е 1. Доказанное свойство решения $u(t, x)$ имеет место и при замене условия (8) на $\beta \leqslant p - 1$, если в неравенстве (3) $c_3 > 0$ и $\sigma < \beta$. При этом можно вместо граничного условия (5) рассматривать более общее условие

$$\nu_1(t, x) \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{n} + \nu_2(t, x) \cdot u = 0, \qquad x \in \Gamma,$$

где $\nu_1 \nu_2 \geqslant 0$, $\nu_1^2 + \nu_2^2 = 1$ и n – вектор нормали к Γ.

З а м е ч а н и е 2. В случае $f = g = 0$ конечное время локализации решения задачи (1), (5) доказывалось энергетическим методом в [1, 5–7].

З а м е ч а н и е 3. Постоянные c_{10}, c_{11} в (13) не зависят от Ω, если $\beta > n(p-1)/(n-p)$. Следовательно, в этом случае аналогично можно рассматривать и задачу Коши для уравнения (1).

З а м е ч а н и е 4. Теорему 1 можно сформулировать также следующим образом: для любого $y(0) = (\Psi(x, u(0, x)), 1)_\Omega > 0$ и достаточно малой постоянной $c_6 > 0$ существует $T_f < \infty$ такое, что справедливо (11), (12).

Предложенный подход может быть использован и для систем уравнений составного типа. В таких уравнениях различные компоненты искомого вектора – решения $w(t, x)$ могут удовлетворять уравнениям различных типов.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$(17) \quad \mathrm{B}(t, x, \mathrm{w}, \mathrm{w}_t) = \mathrm{A}(t, x, \mathrm{w}), \qquad (x, t) \in Q = \Omega \times (0, T),$$

$$\mathrm{w} = (\mathrm{u}, \mathrm{v}) = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_q),$$

$$(18) \quad P\mathrm{w} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0, T); \quad D\mathrm{w}|_{t=0} = g, \quad x \in \Omega.$$

Предполагается, что задача (17), (18) имеет обобщенное решение $\mathbf{w}(t, x)$ из некоторого класса $V(Q) \subset L^\infty(0, T;\ L^2(\Omega))$ и $\forall \mathbf{w} \in V(Q)$ и почти всех $t \in (0, T)$ справедливы соотношения

$$(19)\quad (\mathbf{A}, \mathbf{w})_\Omega \leqslant -\varphi(c \| \mathbf{u} \|^2_{2,\Omega}) + F((T_F - t)_+);$$

$$(20)\quad (\mathbf{B}, \mathbf{w})_\Omega = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{1}{c} \| \mathbf{u} \|^2_{2,\Omega} \leqslant y \leqslant c \| \mathbf{u} \|^2_{2,\Omega}.$$

Здесь $\varphi(s) > 0,\ s > 0,\ \varphi(0) = 0$ — неубывающая непрерывная функция такая, что

$$(21)\quad \int_0^1 \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \leqslant c < \infty$$

и существует $\overline{\mu} < 1$ такая, что

$$(22)\quad 0 \leqslant F(s) \leqslant (1 - \overline{\mu})\varphi(\eta_{\overline{\mu}}(s)), \qquad \eta_\mu[\theta_\mu^{-1}(s)] \equiv s, \qquad \theta_\mu(\tau) = \int_0^\tau \frac{ds}{\mu\varphi(s)}.$$

Справедлива следующая абстрактная

Теорема 2. *Пусть* $w(t, x)$ *— обобщенное решение задачи* (17), (18) *при* $t \in (t_1, \infty)$, *выполнены условия* (19)–(22) *и*

$$(23)\quad T_f - t_1 \geqslant \theta_{\overline{\mu}}(y(t_1)).$$

Тогда

$$\| u(t, \cdot)\|_{2,\Omega} = 0, \qquad \forall t \geqslant T_F.$$

Доказательство теоремы 2 следует из энергетического неравенства

$$(24)\quad \frac{dy}{dt} + \varphi(y) \leqslant F(T_F - t)_+)$$

и следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 1. *Пусть функция* $y(t) \geqslant 0$ *удовлетворяет* (24) *при любом* $t \in \in (t_1, \infty)$, *а для* φ, F, T_f, t_1 *выполнены условия* (21)–(23). *Тогда*

$$y(t) \equiv 0, \qquad \forall t \geqslant T_F.$$

1б. Пространственная локализация. В отличие от вышеизложенного сейчас будем рассматривать локальные свойства слабых решений уравнения (1) без какой-либо информации о значениях $u(t, x)$ на Γ. Пусть, далее, $B_\rho(x_0) = \{ x \in \Omega,\ |x - x_0| < \rho \}$.

Основной результат этого пункта состоит в следующем (при $k = 1$).

Теорема 3. *Пусть* $u(t, x)$ *— слабое обобщенное решение уравнения* (1) *с* $g = 0$, *выполнены условия* (2)–(4) *с* $c_3 \geqslant 0$ *и* (8). *Предположим дополнительно, что существуют* $\rho_0 > 0,\ T_f > 0,\ \delta > 0$ *и* $\epsilon > 0$ (ϵ *достаточно малое*) *такие, что*

$$\left(\| u(0, \cdot) \|^{\beta+1}_{\beta+1, B_\rho(x_0)};\ \left(\int_0^{T_f} \| f(\tau, \cdot) \|^{p/(p-\theta)}_{\frac{r}{r-1}, B_\rho(x_0)} d\tau \right)^{\frac{p-\theta}{p(1-\lambda)}} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \epsilon(\rho - \rho_0)_+^{1/(1-\alpha)}$$

для почти всех $\rho \in (0, \rho_0 + \delta)$, *где*

$$\alpha = \frac{p}{p-1}\left(1 - \left(\frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{\beta+1}\right)\right), \quad \theta = \left(\frac{1}{\beta+1} - \frac{1}{r}\right) \Big/ \left(\frac{1}{\beta+1} - \frac{n-p}{np}\right),$$

$$\lambda = \frac{1-\theta}{\beta+1} + \frac{\theta}{p}, \qquad \beta + 1 \leqslant r \leqslant \frac{np}{n-p}.$$

Тогда существует $t^* > 0$, $t^* \leqslant T_f$ *такое, что*

$$u(t,x) \equiv 0, \quad \forall x \in B_{\rho_0}(x_0), \quad t \in [0, t^*].$$

Доказательство. Для энергетических функций

$$E(t,\rho) = \int_0^t \int_{B_\rho(x_0)} \mathrm{A} \cdot \nabla u \, dx\, dt, \qquad b(t,\rho) = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \int_{B_\rho(x_0)} \Psi(x, u(\tau, x))\, dx$$

аналогично [1–3, 10] получаем неоднородное дифференциальное неравенство

$$(E+b)^\alpha \leqslant ct^w \frac{\partial E}{\partial \rho} + c(\rho - \rho_0)_+^{\alpha/(1-\alpha)}, \quad w > 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Далее достаточно воспользоваться следующей леммой.

Лемма 2. *Пусть функция* $y(t,\rho) \geqslant 0$ *при* $t \leqslant T_f$ *и некоторых* $w > 0$, $c > 0$, $\delta > 0$ *удовлетворяет неравенству*

$$\varphi(y(t,\rho)) \leqslant ct^\omega \frac{\partial y}{\partial \rho} + F((\rho - \rho_0)_+), \quad \rho \in (0, \rho_0 + \delta),$$

где φ, F *подчинены условиям леммы* 1. *Тогда существует* $t^* \leqslant T_f$ *такое, что*

$$y(t,\rho) = 0, \quad \forall \rho \in [0, \rho_0], \quad \forall t \in [0, t^*].$$

Замечание 5. Утверждение теоремы остается справедливым, если (8) заменить на неравенство $\beta \leqslant p - 1$ и дополнительно потребовать, что $c_3 > 0$, $\sigma < p - 1$.

2. Эллиптические уравнения. Локальный энергетический метод, используемый в п. 1, может быть применен к изучению нелинейных эллиптических уравнений вида [8]

$$(25) \qquad -\operatorname{div} \mathrm{A}(x, u, \nabla u) + B(x, u) = f(x),$$

где A, B удовлетворяют условиям (2), (3).

Теорема 4. *Пусть* $u(x)$ – *слабое обобщенное решение уравнения* (25), $c_3 > 0$ *и* $\sigma < p - 1$. *Предположим, что существуют* $\rho_0 > 0$, $\delta > 0$ *и* $\epsilon_i > 0$, $i = 1, 2$ (ϵ_i *достаточно малые*), *такие, что*

$$\|\nabla u\|_{p, B_{\rho_1}(x_0)} \leqslant \epsilon_1, \quad \rho_1 = \rho_0 + \delta,$$

$$\|f\|^{1/(1-\lambda)}_{r/(r-1), B_\rho(x_0)} \leqslant \epsilon_2 (\rho - \rho_0)_+^{1/(1-q)}$$

для почти всех $\rho \in (0, \rho_0 + \delta)$, *где*

$$\sigma + 1 \leqslant r \leqslant \frac{np}{n-p}, \quad \theta = \left(\frac{1}{\sigma+1} - \frac{1}{r}\right) \Big/ \left(\frac{1}{\sigma+1} - \frac{n-1}{np}\right),$$

$$\lambda = \frac{1-\theta}{\sigma+1} + \frac{\theta}{p}, \quad q = \frac{p}{p-1}(1-\lambda), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Тогда $u(x) = 0$, $\forall x \in B_{\rho_0}(x_0)$.

Используемый в работе метод энергетических оценок может быть применен к исследованию и систем уравнений механики сплошной среды.

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева
Академии наук СССР, Новосибирск
Сибирского отделения

Университет Комплутанс, Мадрид

Поступило
19 VII 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Антонцев С.Н.* – ДАН, 1981, т. 260, № 6, с. 1289–1293. 2. *Антонцев С.Н.* Локализация решения вырождающихся уравнений механики сплошной среды. Новосибирск, 1986. 108 с. 3. *Антонцев С.Н.* В сб.: Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1987, вып. 83, с. 138–144. 4. *Калашников А.С.* – УМН, 1987, т. 42, вып. 2 (254), с. 135–176. 5. *Палымский И.Б.* В сб.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1985, т. 16, № 1, с. 136–145. 6. *Рыков Ю.Г.* В сб.: Дифференциальные уравнения и их приложения. М.: Изд-во МГУ, 1984, с. 160–164. 7. *Bamberger A.* – J. Funct. Analysis, 1977, vol. 24, p. 148–155. 8. *Diaz J.I.* Nonlinear partial differential equations and free boundaries. Elliptic equations. Pitman research notes in math. Pitman, 1985, vol. 1, p. 106. 9. *Diaz J.I., Veron L.* – C.R., 1983, vol. 297, p. 149–152. 10. *Diaz J.I., Veron L.* – Trans. Amer. Math. Soc., 1985, vol. 290, p. 787–814.

УДК 629.7.05 МАТЕМАТИКА

О.В. БАЛАБАНОВ, В.Т. ПАШИНЦЕВ

К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ИНВАРИАНТНОСТИ В ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕРМИНАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

(Представлено академиком А.А. Дородницыным 5 IV 1987)

1. Рассмотрим управляемую динамическую систему, описываемую n-мерным векторным уравнением

$$(1)\quad \frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \quad t \in T = [t_0, t_к], \quad x(t_0) = x^0,$$

где $u = \{u_1, \ldots, u_r\}$ – вектор управляющих функций (управлений), $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – фазовый вектор множества $X \subset E_n$, t_0, $t_к$ – начальный и конечный моменты времени t.

Пусть: минимизируемым функционалом является

$$(2)\quad \varphi(u) = \varphi[x(t_к), t_к] \to \min;$$

класс допустимых управлений определяется множеством U кусочно-непрерывных вектор-функций $u(t) \in U$, удовлетворяющих ограничениям

$$(3)\quad \varphi_s[u_1(t), \ldots, u_r(t)] \leqslant 0, \quad s = 1, \ldots, k \leqslant r;$$

конечное время $t_к$ определяется моментом достижения фазовой траекторией терминальной гиперповерхности Ω, задаваемой условием

$$(4)\quad \Omega[x(t_к), t_к] = 0;$$

конечное фазовое состояние $x(t_к)$ фиксируется на $(n - m)$-мерном многообразии, выделяемом в E_n ограничениями вида

$$(5)\quad \psi_i(u) \equiv \psi_i[x(t_к), t_к] = 0, \quad i = 1, \ldots, m < n.$$

Предполагается: вектор-функция $f(x, u, t)$ непрерывна по совокупности аргументов (x, u, t) и имеет непрерывные частные производные первого, а также ограниченные производные второго порядка по аргументам x, u; функции $\Omega(x, t)$ и $\psi_i(x, t)$ в окрестности Ω непрерывны и непрерывно дифференцируемы по аргументам x, t; фазовые траектории $x(t) \in X$ на множестве управлений U не касаются гиперповерхности Ω, так что производная

$$\left[\frac{d}{dt}\,\Omega(x,t)\right]_{\Omega} \neq 0,$$

а допустимый знак ее является заданным; матрица частных производных

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\,\psi_i(x,t)\right|, \quad j = 1,\dots,n, \quad i = 1,\dots,m,$$

имеет максимальный ранг.

Условимся задачу (1)–(5) называть задачей 1. Решение ее будем искать с использованием опорной траектории $\tilde{x}$, $\tilde{u}$, t, не являющейся экстремалью в задаче (1)–(4) (при свободном правом конце траектории, $\tilde{u} \in U$).

2. Обратимся к формированию процедуры многократной коррекции управления, осуществляемой по результатам наблюдений локальных улучшающих (по $\varphi(u)$) вариаций, вычисляемых в дискретные моменты времени t_j без учета терминальных ограничений (5).

Будем предполагать, что на исходной (опорной) траектории терминальные ограничения (5) выполнены не строго:

$$(6) \qquad \psi_i[\tilde{x}(\tilde{t}_к), \tilde{t}_к] = \delta\,\tilde{\psi}_i(\tilde{t}_к).$$

С каждым произвольным вектором $\nu^{\psi} = \{\nu_1^{\psi},\dots,\nu_m^{\psi}\}$ положительных весовых множителей ν_i^{ψ} свяжем не отрицательную на опорной траектории функцию Лагранжа

$$(7) \qquad \Psi(u) \overset{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{m} [\nu_i^{\psi}\,\psi_i(u)\,\mathrm{sign}\,\delta\,\tilde{\psi}_i(\tilde{t}_к)]$$

и введем понятие обобщенного терминального вектора $J(u) = \{\varphi(u), \Psi(u)\}$.

Применительно к итерационной процедуре оптимизации управления редуцируем задачу 1 следующим образом:

Задача 2. На множестве U допустимых управлений определить вариацию $\Delta u(t)$: $\tilde{u}(t) + \Delta u(t) \in U$, обеспечивающую в пределах каждой итерации уменьшение невязки в (6) на величину $\xi \cdot \delta\,\tilde{\Psi}(\tilde{t}_к)$:

$$(8) \qquad \Delta\Psi(u) = -\xi \cdot \delta\,\tilde{\Psi}(\tilde{t}_к), \quad 0 < \xi \leqslant 1,$$

при одновременном (если это возможно) уменьшении функционала (2) по сравнению с опорным его значением $\varphi(\tilde{u}) = \varphi[\tilde{x}(\tilde{t}_к), \tilde{t}_к]$.

Каждой из компонент $\varphi(u)$ и $\Psi(u)$ обобщенного терминального вектора $J(u)$ поставим в соответствии n-мерные вектор-функции сопряженных переменных $\lambda^{\varphi}(t)$ и $\lambda^{\Psi}(t)$, вычисляемые вдоль опорной траектории $\tilde{x}$, $\tilde{u}$, t как решения систем уравнений вида

$$(9) \qquad \frac{d}{dt}\,\lambda^J = -\nabla_x \mathcal{H}(\lambda^J, \tilde{x}, \tilde{u}, t)$$

с граничными условиями

$$(10) \qquad \lambda^J(\tilde{t}_к) = \left[-\nabla_x J(x,t) + \left(\frac{d}{dt}\,J(x,t) \Big/ \frac{d}{dt}\,\Omega(x,t)\right)\nabla_x \Omega(x,t)\right]_{t=\tilde{t}_к},$$

где

$$\mathcal{H}(\lambda^J, \tilde{x}, \tilde{u}, t) = (\lambda^J, f(\tilde{x}, \tilde{u}, t)), \qquad \lambda^{\Psi} \overset{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{m} \nu_i^{\psi}\,[\lambda^{\psi i} \cdot \mathrm{sign}\,\delta\,\tilde{\psi}_i(\tilde{t}_к)],$$

$(\cdot\,,\,\cdot)$ – скалярное произведение векторов.