

ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1988

ТОМ 303 № 2

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

тикальных профилей температуры и скорости течения при нестационарных внешних условиях. По результатам экспериментов определены скорости турбулентного вовлечения в зависимости от числа Ричардсона в наименее исследованной области $Ri < 10^2$. Полученные значения u_1/u_* уменьшаются от 0,15 до 0,028 при увеличении Ri в диапазоне 12–60.

Институт озерадения
Академии наук СССР
Ленинград

Поступило
27 III 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейман К.Д., Карлин Л.Н. — Океанология, 1979, т. 19, вып. 1, с. 49.
2. Дерюгин К.К., Степанюк И.А. Морская гидрометрия. Л.: Гидрометеониздат. 1974. 392 с.
3. Kranenburg C. — J. Fluid Mech., 1984, vol. 145, p. 253.
4. Kantha L.H., Phillips O.M., Azad R.S. — J. Fluid Mech., 1977, vol. 79, part 4, p. 753.
5. Deardorff J.W., Willis G.E. — J. Fluid Mech., 1982, vol. 115, p. 123.
6. Scranton D.R., Lindberg W.R. — Phys. Fluids, 1983, vol. 26, № 5, p. 1198.
7. Keulegan G.H. — J. Res. Nat. Bur. Stand., 1949, vol. 43, p. 487.

УДК 532.5 + 517.946

МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

С.Н. АНТОНЦЕВ, Х.И. ДИАС (Испания)

ПРИЛОЖЕНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО МЕТОДА
В ЛОКАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

(Представлено академиком Л.В. Овсянниковым 12 VII 1988)

В работе излагаются результаты авторов по пространственной и временной локализации решений сложных систем уравнений составного типа, возникающих в механике сплошной среды. В таких системах компоненты искомого решения (например, скорость, плотность, насыщенность и др.) могут удовлетворять уравнениям различных типов.

Известные ранее методы исследования локализации решений нелинейных вырождающихся уравнений (см., например, обзор [8]) к таким системам неприменимы.

Здесь используется метод интегральных энергетических оценок, предложенный и обоснованный в работах авторов [1–4, 7, 12, 13], применительно к уравнениям эллиптического, параболического и составного типов. Идея метода состоит в получении и исследовании обыкновенных дифференциальных неравенств для энергетических функций.

Основные цель и новизна настоящей работы состоят в доказательстве методом энергетических оценок конечного времени локализации (обращения в нуль) решения, а также его метастабильной пространственной локализации для некоторых моделей механики сплошной среды, содержащих "источники" – заданные правые части. Работа является приложением результатов, изложенных в [3, 4, 7, 12, 13].

При отсутствии "источников" конечное время локализации решения и конечная скорость распространения возмущений от начальных для аналогичных моделей доказаны в [3].

Следует отметить, что здесь не затрагиваются вопросы существования соответствующих решений, а лишь исследуются их свойства.

1. Несжимаемые неоднородные вязкопластические среды. Система уравнений имеет составной тип и может быть записана в виде [3, 9]

$$(1) \quad \frac{dp}{dt} \equiv \frac{\partial p}{\partial t} + v \cdot \nabla p = 0, \quad \nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial p}{\partial x_n} \right);$$

$$(2) \quad \operatorname{div} v = 0, \quad v = (v_1, \dots, v_n);$$

$$(3) \quad \rho \frac{dv}{dt} \equiv \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v \right) = \operatorname{div} P + \rho f;$$

$$(4) \quad P = -pE + 2(\mu + \tau |D|^{\sigma-1})D, \quad 0 \leq \sigma \leq 1,$$

$$D_{ik}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \quad |D^2| = D_{ik} : D_{ik}, \quad x \in \Omega \subset R^n, \quad t \in (0, T).$$

Здесь $v(t, x)$, $\rho(t, x)$, $p(t, x)$ — соответственно искомые скорость, плотность и давление в жидкости, P — тензор напряжений, D — тензор скоростей деформаций, $f(t, x)$ — заданная массовая сила — "источник", $\mu = \text{const} > 0$ — вязкость, $\tau = \text{const} > 0$ — предельное напряжение сдвига.

Рассмотрим для $w = (v, \rho, p)$ следующую начально-краевую задачу:

$$(5) \quad v(t, x) = 0, \quad (x, t) \in Q = \Omega \times (0, T);$$

$$(6) \quad v(0, x) = v_0(x), \quad \rho(0, x) = \rho_0(x), \quad x \in \Omega,$$

предполагая, что выполнены условия

$$(7) \quad \frac{1}{M} \leq \rho_0(x) \leq M, \quad \|v_0(x)\|_{2, \Omega} \leq c_v = \text{const};$$

$$(8) \quad \|f(t, \cdot)\|_{2, \Omega}^{q/(q-1)} \leq c_f (T_f - t)_+^{q/(2-q)}, \quad c_f = \text{const}, \\ u_+ = \max(0, u), \quad q \in (\max(1 + \sigma, 2n/(n+2)), 2).$$

Для задачи (1)–(6) в [11] доказана теорема существования обобщенного решения $w = (v, \rho, p) \in V$, где

$$V = \left\{ w \mid v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W_0^{1,2}(\Omega)), \rho \in L^\infty(Q), \frac{1}{M} \leq \rho \leq M \right\}.$$

Исследуем качественные свойства решения.

Т е о р е м а 1 (конечное время локализации). Пусть $w = (v, \rho, p) \in V$ — обобщенное решение задачи (1)–(6) и выполнены условия (7), (8). Тогда для любого $T_f \in (0, T)$ существуют постоянные c_v, c_f (малые в сравнении с $\mu^\lambda \tau^{1-\lambda}$ и "с" такие, что

$$(9) \quad \|v(t, \cdot)\|_{2, \Omega}^2 \leq c (T_f - t)_+^{q/(2-q)}$$

и, в частности,

$$(10) \quad v(t, x) \equiv 0, \quad x \in \Omega, \quad t \geq T_f.$$

Доказательство теоремы 1 полностью повторяет основные идеи метода энергетических оценок, изложенные в [1–4, 7, 12, 13].

Умножая (3) на $v(t, x)$ и производя интегрирование по частям, приходим с учетом (1), (2), (4) к энергетическому соотношению

$$(11) \quad \frac{1}{2} \frac{dE}{dt} \equiv \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\rho v, v)_\Omega = (\text{div } P, v)_\Omega + (\rho f, v)_\Omega = \\ = -(\mu |D|^2 + \tau |D|^{\sigma+1}, 1)_\Omega + (\rho f, v)_\Omega, \quad (u, v)_\Omega = \int_\Omega uv \, dx.$$

Пользуясь далее неравенствами Юнга и Корна [10]

$$(12) \quad K \|v\|_{m, \Omega}^p \leq \|D(v)\|_{p, \Omega}^p, \quad m \leq np/(n-p),$$

получаем обыкновенное дифференциальное неравенство для энергетической функции $E(t)$

$$(13) \quad \frac{dE}{dt} + aE^{q/2} \leq b(T_f - t)_+^{q/(2-q)},$$

в котором постоянные a, b конструктивно вычисляются через $\mu, \tau, \sigma, K, q, n$.

Анализ решений неравенства (13), как показано в [7], и завершает доказательство теоремы.

З а м е ч а н и е 1. Теорема 1 может быть интерпретирована следующим образом. Течение вязкопластической жидкости, инициированное начальными данными и массовыми силами (источником), приходит в состояние покоя ($v \equiv 0$) начиная с момента T_f .

З а м е ч а н и е 2. Результат теоремы 1 можно сформулировать также следующим образом. Для любой постоянной $c_v \in (0, \infty)$ в (7) и достаточно малой $c_f > 0$ в (8) существует $T_f \in (0, \infty)$ такое, что справедливо (9), (10). При $f \equiv 0$ аналогичное утверждение доказано в [3].

З а м е ч а н и е 3. Постоянная K в неравенстве Корна (12) не зависит от Ω , если $m = 2$, $q = 2n/(n + 2)$, $q \in (1 + \sigma, 2)$. Поэтому сформулированные выше утверждения справедливы и в случае задачи Коши

$$v(0, x) = v_0(x), \quad \rho(0, x) = \rho_0(x), \quad x \in R^n,$$

$$\|v_0\|_{2, R^n} < \infty, \quad \frac{1}{M} \leq \rho_0 \leq M$$

для системы (1)–(4), если $0 \leq \sigma < (n - 2)/(n + 2)$. Аналогично могут быть рассмотрены и более общие, чем (4), зависимости $P = P(D)$.

2. Совместные течения поверхностных и подземных вод. В работах [3, 5] рассмотрены математические модели совместных течений безнапорных грунтовых и поверхностных вод, основанные на уравнениях плановой фильтрации и гидравлики открытых русел. В простейшем случае (канал прямоугольного сечения, постоянной ширины; водоупор и дно канала горизонтальны и т.д.) соответствующая система уравнений и внутренние условия сопряжения имеют вид [5]

$$(14) \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{div}(H \nabla H) + f_\Omega(t, x), \quad x \in \Omega^\Pi = \Omega \setminus \Pi;$$

$$(15) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} (\psi(s, u) |u_s|^{-1/2} u_s) - \left[H \frac{\partial H}{\partial n} \right]_\Pi + f_\Pi(t, x), \quad x \in \Pi;$$

$$(16) \quad H \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Pi_\pm} = \sigma_\pm (u - H_\pm), \quad x \in \Pi, \quad 0 \leq \sigma_\pm < \infty,$$

$$\psi = \psi_0(s, u) u^{5/3}, \quad |\ln \psi_0| \leq M.$$

Здесь $H(t, x)$ – уровень грунтовых вод в области $\Omega \subset R^2$, $u(t, s)$ – уровень воды в канале, которому соответствует кривая Π в Ω ; s – длина дуги вдоль Π , n – нормаль к Π ; H_\pm – значения H при подходе к Π с разных сторон; соответственно $[H]_\Pi = H_+ - H_-$; $f_\Omega(t, x)$, $f_\Pi(t, s)$ – заданные внешние поступления воды – “источники”.

Будем далее изучать локальные свойства решения $w = (H(t, x), u(t, x))$ системы (14)–(16) в круге $B_\rho(x_0) = \{x \in \Omega: |x - x_0| < \rho\}$, $x_0 \in \Pi$, без ограничения общности полагая, что $x_0 = 0$,

$$\Pi_\rho = \{x \in \Omega: x_2 = 0, |x_1| < \rho\}, \quad s = x_1, \quad B_\rho(x_0) = B_\rho, \quad B_\rho^\pm = \{x \in B_\rho: 0 \leq x_2\}.$$

Для системы (14)–(16) в [5] в случае основных начально-краевых задач было доказано существование обобщенного решения $w = (H, u) \in V$, где

$$V = \{(H, u) \mid 0 \leq (H, u) \leq M, \sqrt{H} \nabla H \in L^2(0, T; L^2(B_R))\},$$

$$\psi^{2/3} |u_s| \in L^{3/2}(0, T; L^{3/2}(\Pi_R))\}, \quad 0 < R < \infty.$$

Т е о р е м а 2. Пусть $w = (H, u) \in V$ — обобщенное решение системы (14)–(16) и

$$(17) \quad (\|H(0, \cdot)\|_{2, B_{\rho_0}^+}^2 + \|u(0, \cdot)\|_{2, \Pi_{\rho_0}}^2 + \int_0^T (\|f_{\Omega}\|_{2, B_{\rho}^+}^2 + \|f_{\Pi}\|_{2, \Pi_{\rho}}^2) d\tau) \leq \\ \leq c(\rho - \rho_0)_+^{1/(1-\beta)}, \\ u_+ = \max(0, u), \quad \rho \in (0, R), \quad \beta = 5/6, \quad c = \text{const}, \quad \rho_0 < R.$$

Тогда существует $t_0 = t_0(R, C, M) > 0$ такое, что

$$(18) \quad w = (H, u) \equiv 0, \quad x \in B_{\rho_0}, \quad t \leq t_0.$$

Для доказательства теоремы введем обозначения

$$A(t, \rho) = (\|H(t, \cdot)\|_{2, B_{\rho}^+ \cup B_{\rho}^-}^2 + \|u(t, \cdot)\|_{2, \Pi_{\rho}}^2),$$

$$E(t, \rho) = \int_0^t \{ (H \nabla H, \nabla H)_{B_{\rho}^+ \cup B_{\rho}^-} + (\psi |u_s|^{-1/2} \cdot u_s, u)_{\Pi_{\rho}} \} d\tau,$$

$$D^2 = \int_0^t \sum_{\pm} (\sigma_{\pm}, (u - H_{\pm})^2)_{\Pi_{\rho}} d\tau, \quad F = \int_0^t \{ (f_{\Omega}, H)_{B_{\rho}^+ \cup B_{\rho}^-} + (f_{\Pi}, u)_{\Pi_{\rho}} \} d\tau$$

и будем использовать вытекающее из (14)–(16) следующее энергетическое соотношение:

$$(19) \quad \frac{1}{2} (A(t, \rho) - A(0, \rho)) + E(t, \rho) + D^2 = \\ = F + \int_0^t \left\{ \left(H \frac{\partial H}{\partial n}, H \right)_{\partial B_{\rho}} + \psi |u_s|^{-1/2} u_s u \Big|_{x_1 = -\rho}^{x_1 = \rho} \right\} d\tau.$$

Отсюда, с учетом (17) и аналогично [3, 4, 7] приходим к обыкновенному дифференциальному неравенству для энергетической функции

$$(20) \quad \bar{E}(\rho) \leq a t_0^{\nu} \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial \rho} \right)^{1/\beta} + b(\rho - \rho_0)_+^{1/(1-\beta)},$$

в котором $\bar{E} = \sup_{0 \leq t \leq t_0} E(t, \rho)$, $\nu = 2/5$, $\beta = 5/6$ и a, b, t_0 вычисляются через c, M, R .

Согласно результатам [4, 6] из (20) следует, что

$$\bar{E}(\rho) \equiv 0, \quad 0 \leq \rho \leq \rho_0.$$

Это доказывает теорему 2.

З а м е ч а н и е 4. Результат теоремы 2 имеет следующую физическую интерпретацию. Область B_{ρ_0} , не занятая водой (сухая) в начальный момент времени $t = 0$, остается таковой и при $t \leq t_0$ независимо от граничных условий и источников вне B_R .

3. Д в у х ф а з н а я ф и л ь т р а ц и я н е с м е ш и в а ю щ и х с я н е с ж и м а е м ы х ж и д к о с т е й. Нестационарная фильтрация двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в однородной изотропной пористой среде описывается системой уравнений составного типа [6]

$$(21) \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \text{div}(a(s) \nabla s + k_1(s) \nabla p), \quad (x, t) \in Q = \Omega \times (0, T);$$

$$(22) \quad \operatorname{div} (k(s) \nabla p + f(s)) = 0$$

относительно искомых насыщенности $s(t, x)$ и "приведенного" давления $p(t, x)$. Коэффициенты системы (21), (22) определяются формулами [6]

$$(23) \quad a(s) = |p'_k(s)| \cdot k_1 \cdot k_2 / k, \quad k = k_1(s) + k_2(s), \quad f = k_2(\rho_2 - \rho_1)g, \\ k_i(s) > 0, \quad 0 < s < 1; \quad k_1(0) = k_2(1) = 0,$$

где $p_k(s)$ — капиллярное давление ($p'_k \leq 0$); $\bar{k}_i = k_i \cdot \mu_i$ — относительные фазовые проницаемости; μ_i, ρ_i — соответственно вязкости и плотности жидкостей, g — ускорение силы тяжести. Функциональные параметры модели (k_1, k_2, p_k) задаются, как правило, зависимостями

$$(24) \quad k_1 = f_1(s) s^{\lambda_1}, \quad k_2 = f_2(s) (1-s)^{\lambda_2}, \quad p_k = f_3 s^{\lambda_3} (1-s)^{\lambda_4}, \\ f_i \in C^1, \quad |\ln f_i| \leq M, \quad 0 \leq (\lambda_1, \lambda_2).$$

В [6] для системы (21), (22) доказана теорема существования обобщенного решения $w = (s, p) \in V$, $V = \{(s, p) \mid 0 \leq s \leq 1, \sqrt{a} \nabla s \in L^2(Q), \nabla p \in L^\infty(0, T; L^q(\Omega))\}$, $n < q$, а в [3] для $w(t, x)$ установлены конечное время локализации решения в случае краевой задачи и конечная скорость распространения возмущений от начальных данных ($s(0, x) = 0$ или $s(0, x) = 1$). Будем исследовать локальные свойства решения системы (21), (22), предполагая, что начальные данные удовлетворяют условию

$$(25) \quad \|s(0, \cdot)\|_{2, B_R}^2 \leq c(\rho - \rho_0)_+^{1/(1-\lambda)}, \quad \rho \in (0, R).$$

Ограничимся также лишь случаями планового течения (в плоскости $x_3 = 0$, $g = (0, 0, g)$) или жидкостей с одинаковыми плотностями. Согласно (23) в этих случаях

$$(26) \quad f = 0.$$

Т е о р е м а 3. Пусть $w = (s, p) \in V$ — обобщенное решение системы (21), (22); выполнено (26) и дополнительно

$$0 < \lambda = (\lambda_1 + \lambda_3 - 1), \quad |(k_1/k)'|^2/a \cdot s^\lambda \leq M(\delta), \quad 0 \leq s \leq 1 - \delta < 1.$$

Тогда существует $t_0 = t_0(M, c, k)$ такое, что

$$s(t, x) = 0, \quad x \in B_{\rho_0}, \quad t \leq t_0$$

и соответственно $\Delta p(t, x) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из энергетического соотношения

$$(27) \quad \frac{1}{2} (A(t, \rho) - A(0, \rho)) + E = \int_0^t \left\{ \left(\frac{k_1}{k} \right)' k \nabla p \nabla s, s \right\}_{B_\rho} + \left(a \frac{\partial s}{\partial n}; s \right)_{\partial B_\rho} \right\} d\tau, \\ A(t, \rho) = \|s(t, \cdot)\|_{2, B_\rho}^2, \quad E(t, \rho) = \int_0^t (a \nabla s, \nabla s)_{B_\rho} d\tau,$$

которое приводит к неравенству вида (20) для функции $\bar{E}(\rho) = \sup_{t \leq t_0} E(t, \rho)$. Исследование неравенства (20) и завершает доказательство.

З а м е ч а н и е 5. Аналогичное утверждение справедливо и для функции $s = 1 - s(t, x)$.

З а м е ч а н и е 6. Теореме 3 можно дать следующую физическую интерпретацию. Пусть в начальный момент $t = 0$ область V_{ρ_0} занята только одной из жидкостей ($s(0, x) = 0$ или $s(0, x) = 1$). Тогда при любых воздействиях вне V_R вытеснение данной жидкости из V_{ρ_0} начнется не ранее времени $t_0 > 0$.

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск
Университет Компшутаес
Мадрид

Поступило
19 VII 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Антонцев С.Н.* — Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1980, т. 96, с. 3–12.
2. *Антонцев С.Н.* — ДАН, 1981, т. 260, № 6, с. 1289–1293.
3. *Антонцев С.Н.* Локализация решений вырождающихся уравнений механики сплошной среды. Новосибирск, 1986. 108 с.
4. *Антонцев С.Н.* В сб.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: Наука, 1987, вып. 83, с. 138–144.
5. *Антонцев С.Н., Епихов Г.П., Кашеваров А.А.* Системное математическое моделирование процессов водообмена. Новосибирск: Наука, 1986. 215 с.
6. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 319 с.
7. *Антонцев С.Н., Диас Х.И.* — ДАН, 1988, т. 303, № 3.
8. *Калашиников А.С.* — УМН, 1987, т. 42, вып. 2 (254), с. 135–176.
9. *Мирзаджанзаде А.Х., Огилалов П.М.* Нестационарные движения вязкопластических сред. М.: Изд-во МГУ, 1977. 373 с.
10. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
11. *Войт М.* On a nonhomogeneous non newtonian fluid. Report 83–8. Lefschetz Center for dynamical systems, Division of Applied Mathematics Brown University. Providence, 1983.
12. *Diaz J.I., Veron L.* — C.R., 1983, vol. 297, p. 149–152.
13. *Diaz J.I., Veron L.* — Trans. Amer. Math. Soc., 1985, vol. 290, p. 787–814.