ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1988

ТОМ 303 № 2

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

тикальных профилей температуры и скорости течения при нестационарных внешних условиях. По результатам экспериментов определены скорости турбулентного вовлечения в зависимости от числа Ричардсона в наименее исследованной области $\mathrm{Ri} < 10^2$. Полученные значения u_l/u_* уменьшаются от 0,15 до 0,028 при увеличении Ri в диапазоне 12–60.

Институт озероведения
Академии наук СССР
Ленинград

Поступило
27 III 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крейман К.Д., Карлин Л.Н.* – Океанология, 1979, т. 19, вып. 1, с. 49. 2. *Дерюгин К.К., Степанюк И.А.* Морская гидрометрия. Л.: Гидрометеоиздат. 1974. 392 с. 3. *Kranenburg C.* – J. Fluid Mech., 1984, vol. 145, p. 253. 4. *Kantha L.H., Phillips O.M., Azad R.S.* – J. Fluid. Mech., 1977, vol. 79, part 4, p. 753. 5. *Deardorff J.W., Willis G.E.* – J. Fluid Mech., 1982, vol. 115, p. 123. 6. *Scranton D.R., Lindberg W.R.* – Phys. Fluids, 1983, vol. 26, № 5, p. 1198. 7. *Keulegan G.H.* – J. Res. Nat. Bur. Stand., 1949, vol. 43, p. 487.

Доклады Академии наук СССР
1988. Том 303, № 2

УДК 532.5 + 517.946 МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

С.Н. АНТОНЦЕВ, Х.И. ДИАС (Испания)

ПРИЛОЖЕНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО МЕТОДА В ЛОКАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

(Представлено академиком Л.В. Овсянниковым 12 VII 1988)

В работе излагаются результаты авторов по пространственной и временной локализации решений сложных систем уравнений составного типа, возникающих в механике сплошной среды. В таких системах компоненты искомого решения (например, скорость, плотность, насыщенность и др.) могут удовлетворять уравнениям различных типов.

Известные ранее методы исследования локализации решений нелинейных вырождающихся уравнений (см., например, обзор [8]) к таким системам неприменимы.

Здесь используется метод интегральных энергетических оценок, предложенный и обоснованный в работах авторов [1–4, 7, 12, 13], применительно к уравнениям эллиптического, параболического и составного типов. Идея метода состоит в получении и исследовании обыкновенных дифференциальных неравенств для энергетических функций.

Основные цель и новизна настоящей работы состоят в доказательстве методом энергетических оценок конечного времени локализации (обращения в нуль) решения, а также его метастабильной пространственной локализации для некоторых моделей механики сплошной среды, содержащих "источники" – заданные правые части. Работа является приложением результатов, изложенных в [3, 4, 7, 12, 13].

При отсутствии "источников" конечное время локализации решения и конечная скорость распространения возмущений от начальных для аналогичных моделей доказаны в [3].

Следует отметить, что здесь не затрагиваются вопросы существования соответствующих решений, а лишь исследуются их свойства.

1. Несжимаемые неоднородные вязкопластические среды. Система уравнений имеет составной тип и может быть записана в виде [3, 9]

$$(1)\qquad \frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial\rho}{\partial t} + v\cdot\nabla\rho = 0, \quad \nabla\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\rho}{\partial x_n}\right);$$

$$(2)\qquad \operatorname{div} v = 0, \quad v = (v_1, \ldots, v_n);$$

$$(3)\qquad \rho\,\frac{dv}{dt} \equiv \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)v\right) = \operatorname{div} P + \rho f;$$

$$(4)\qquad P = -pE + 2(\mu + \tau\,|D|^{\sigma-1})D, \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant 1,$$

$$D_{ik}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right), \quad |D^2| = D_{ik} : D_{ik}, \quad x \in \Omega \subset R^n, \quad t \in (0, T).$$

Здесь $v(t, x)$, $\rho(t, x)$, $p(t, x)$ – соответственно искомые скорость, плотность и давление в жидкости, P – тензор напряжений, D – тензор скоростей деформаций, $f(t, x)$ – заданная массовая сила – "источник", $\mu = \text{const} > 0$ – вязкость, $\tau = \text{const} > 0$ – предельное напряжение сдвига.

Рассмотрим для $w = (v, \rho, p)$ следующую начально-краевую задачу:

$$(5) \qquad v(t, x) = 0, \quad (x, t) \in Q = \Omega \times (0, T);$$

$$(6) \qquad v(0, x) = v_0(x), \quad \rho(0, x) = \rho_0(x), \quad x \in \Omega,$$

предполагая, что выполнены условия

$$(7) \qquad \frac{1}{M} \leqslant \rho_0(x) \leqslant M, \quad \| v_0(x) \|_{2,\Omega} \leqslant c_v = \text{const};$$

$$(8) \qquad \| f(t, \cdot) \|_{2,\Omega}^{q/(q-1)} \leqslant c_f (T_f - t)_+^{q/(2-q)}, \quad c_f = \text{const},$$

$$u_+ = \max(0, u), \quad q \in (\max(1 + \sigma, 2n/(n+2), 2).$$

Для задачи (1)–(6) в [11] доказана теорема существования обобщенного решения $w = (v, \rho, p) \in V$, где

$$V = \left\{ w \mid v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W_0^{1,2}(\Omega)),\ \rho \in L^\infty(Q), \frac{1}{M} \leqslant \rho \leqslant M \right\}.$$

Исследуем качественные свойства решения.

Теорема 1 (конечное время локализации). *Пусть $w = (v, \rho, p) \in V$ – обобщенное решение задачи (1)–(6) и выполнены условия (7), (8). Тогда для любого $T_f \in (0, T)$ существуют постоянные c_v, c_f (малые в сравнении с $\mu^\lambda \tau^{1-\lambda}$ $\lambda = (p - 1 - \sigma)/(1 - \sigma))$ и "с" такие, что*

$$(9) \qquad \| v(t, \cdot) \|_{2,\Omega}^2 \leqslant c(T_f - t)_+^{q/(2-q)}$$

и, в частности,

$$(10) \qquad v(t, x) \equiv 0, \quad x \in \Omega, \quad t \geqslant T_f.$$

Доказательство теоремы 1 полностью повторяет основные идеи метода энергетических оценок, изложенные в [1–4, 7, 12, 13].

Умножая (3) на $v(t, x)$ и производя интегрирование по частям, приходим с учетом (1), (2), (4) к энергетическому соотношению

$$(11) \qquad \frac{1}{2} \frac{dE}{dt} \equiv \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\rho v, v)_\Omega = (\operatorname{div} P, v)_\Omega + (\rho f, v)_\Omega =$$

$$= -(\mu |D|^2 + \tau |D|^{\sigma+1}, 1)_\Omega + (\rho f, v)_\Omega, \quad (u, v)_\Omega = \int_\Omega uv\, dx.$$

Пользуясь далее неравенствами Юнга и Корна [10]

$$(12) \qquad K \| v \|_{m,\Omega}^p \leqslant \| D(v) \|_{p,\Omega}^p, \quad m \leqslant np/(n-p),$$

получаем обыкновенное дифференциальное неравенство для энергетической функции $E(t)$

$$(13) \qquad \frac{dE}{dt} + aE^{q/2} \leqslant b(T_f - t)_+^{q/(2-q)},$$

в котором постоянные a, b конструктивно вычисляются через μ, τ, σ, K, q, n.

Анализ решений неравенства (13), как показано в [7], и завершает доказательство теоремы.

Замечание 1. Теорема 1 может быть интерпретирована следующим образом. Течение вязкопластической жидкости, инициированное начальными данными и массовыми силами (источником), приходит в состояние покоя ($v \equiv 0$) начиная с момента T_f.

Замечание 2. Результат теоремы 1 можно сформулировать также следующим образом. Для любой постоянной $c_v \in (0, \infty)$ в (7) и достаточно малой $c_f > 0$ в (8) существует $T_f \in (0, \infty)$ такое, что справедливо (9), (10). При $f \equiv 0$ аналогичное утверждение доказано в [3].

Замечание 3. Постоянная K в неравенстве Корна (12) не зависит от Ω, если $m = 2$, $q = 2n/(n+2)$, $q \in (1+\sigma, 2)$. Поэтому сформулированные выше утверждения справедливы и в случае задачи Коши

$$v(0,x) = v_0(x), \quad \rho(0,x) = \rho_0(x), \quad x \in R^n,$$

$$\| v_0 \|_{2,R^n} < \infty, \quad \frac{1}{M} \leqslant \rho_0 \leqslant M$$

для системы (1)–(4), если $0 \leqslant \sigma < (n-2)/(n+2)$. Аналогично могут быть рассмотрены и более общие, чем (4), зависимости $P = P(D)$.

2. Совместные течения поверхностных и подземных вод. В работах [3, 5] рассмотрены математические модели совместных течений безнапорных грунтовых и поверхностных вод, основанные на уравнениях плановой фильтрации и гидравлики открытых русел. В простейшем случае (канал прямоугольного сечения, постоянной ширины; водоупор и дно канала горизонтальны и т.д.) соответствующая система уравнений и внутренние условия сопряжения имеют вид [5]

$$(14) \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{div}(H \nabla H) + f_\Omega(t,x), \quad x \in \Omega^\Pi = \Omega \setminus \Pi;$$

$$(15) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\psi(s,u)\,|u_s|^{-1/2} u_s\right) - \left[H \frac{\partial H}{\partial n} \right]_\Pi + f_\Pi(t,x), \quad x \in \Pi;$$

$$(16) \quad H \frac{\partial H}{\partial n}\bigg|_{\Pi_\pm} = \sigma_\pm (u - H_\pm), \quad x \in \Pi, \quad 0 \leqslant \sigma_\pm < \infty,$$

$$\psi = \psi_0(s,u) u^{5/3}, \quad |\ln \psi_0| \leqslant M.$$

Здесь $H(t, x)$ – уровень грунтовых вод в области $\Omega \subset R^2$, $u(t, s)$ – уровень воды в канале, которому соответствует кривая Π в Ω; s – длина дуги вдоль Π, n – нормаль к Π; $H_\pm$ – значения H при подходе к Π с разных сторон; соответственно $[H]_\Pi = H_+ - H_-$; $f_\Omega(t, x)$, $f_\Pi(t, s)$ – заданные внешние поступления воды – "источники".

Будем далее изучать локальные свойства решения $w = (H(t, x), u(t, x))$ системы (14)–(16) в круге $B_\rho(x_0) = \{x \in \Omega : |x - x_0| < \rho\}$, $x_0 \in \Pi$, без ограничения общности полагая, что $x_0 = 0$,

$$\Pi_\rho = \{x \in \Omega :\ x_2 = 0,\ |x_1| < \rho\}, \quad s = x_1, \quad B_\rho(x_0) = B_\rho, \quad B_\rho^\pm = \{x \in B_\rho :\ 0 \lesseqgtr x_2\}.$$

Для системы (14)–(16) в [5] в случае основных начально-краевых задач было доказано существование обобщенного решения $w = (H, u) \in V$, где

$$V = \{(H, u) |\ 0 \leqslant (H,u) \leqslant M,\ \sqrt{H} \nabla H \in L^2(0, T;\ L^2(B_R)),$$
$$\psi^{2/3} |u_s| \in L^{3/2}(0, T;\ L^{3/2}(\Pi_R))\},\ 0 < R < \infty.$$

Т е о р е м а 2. *Пусть* $w = (H, u) \in V$ – *обобщенное решение системы* (14)–(16) *и*

$$(17)\quad (\| H(0,\ \cdot)\|^2_{2,B^\pm_\rho} + \| u(0,\ \cdot)\|^2_{2,\Pi_\rho} + \int_0^T (\| f_\Omega \|^2_{2,B^\pm_\rho} + \| f_\Pi \|^2_{2,\Pi_\rho}) d\tau) \leqslant$$

$$\leqslant c(\rho - \rho_0)_+^{1/(1-\beta)},$$

$$u_+ = \max(0, u), \quad \rho \in (0, R), \quad \beta = 5/6, \quad c = \text{const}, \quad \rho_0 < R.$$

Тогда существует $t_0 = t_0(R, C, M) > 0$ *такое, что*

$$(18)\quad w = (H, u) \equiv 0, \quad x \in B_{\rho_0}, \quad t \leqslant t_0.$$

Д л я д о к а з а т е л ь с т в а т е о р е м ы введем обозначения

$$A(t, \rho) = (\| H(t,\ \cdot)\|^2_{2,B^+_\rho \cup B^-_\rho} + \| u(t,\ \cdot)\|^2_{2,\Pi_\rho}),$$

$$E(t, \rho) = \int_0^t \{(H\nabla H,\ \nabla H)_{B^+_\rho \cup B^-_\rho} + (\psi\ | u_s |^{-1/2} \cdot u_s, u)_{\Pi_\rho}\} d\tau,$$

$$D^2 = \int_0^t \sum_\pm (\sigma_\pm, (u - H_\pm)^2)_{\Pi_\rho} d\tau, \quad F = \int_0^t \{(f_\Omega, H)_{B^+_\rho \cup B^-_\rho} + (f_\Pi, u)_{\Pi_\rho}\} d\tau$$

и будем использовать вытекающее из (14)–(16) следующее энергетическое соотношение:

$$(19)\quad \frac{1}{2}(A(t, \rho) - A(0, \rho)) + E(t, \rho) + D^2 =$$

$$= F + \int_0^t \left\{ \left(H\ \frac{\partial H}{\partial n},\ H \right)_{\partial B_\rho} + \psi\ | u_s |^{-1/2} u_s u\ |^{x_1 = \rho}_{x_1 = -\rho} \right\} d\tau.$$

Отсюда, с учетом (17) и аналогично [3, 4, 7] приходим к обыкновенному дифференциальному неравенству для энергетической функции

$$(20)\quad \overline{E}(\rho) \leqslant a t_0^\nu \left(\frac{\partial \overline{E}}{\partial \rho} \right)^{1/\beta} + b(\rho - \rho_0)_+^{1/(1-\beta)},$$

в котором $\overline{E} = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant t_0} E(t, \rho)$, $\nu = 2/5$, $\beta = 5/6$ и a, b, t_0 вычисляются через c, M, R.

Согласно результатам [4, 6] из (20) следует, что

$$\overline{E}(\rho) \equiv 0, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0.$$

Это доказывает теорему 2.

З а м е ч а н и е 4. Результат теоремы 2 имеет следующую физическую интерпретацию. Область B_{ρ_0}, не занятая водой (сухая) в начальный момент времени $t = 0$, остается таковой и при $t \leqslant t_0$ независимо от граничных условий и источников вне B_R.

3. Д в у х ф а з н а я ф и л ь т р а ц и я н е с м е ш и в а ю щ и х с я н е с ж и м а е м ы х ж и д к о с т е й. Нестационарная фильтрация двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в однородной изотропной пористой среде описывается системой уравнений составного типа [6]

$$(21)\quad \frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div}(a(s)\nabla s + k_1(s)\nabla p), \quad (x, t) \in Q = \Omega \times (0, T);$$

(22) $\quad \operatorname{div}(k(s)\nabla p + f(s)) = 0$

относительно искомых насыщенности $s(t, x)$ и "приведенного" давления $p(t, x)$. Коэффициенты системы (21), (22) определяются формулами [6]

$$(23)\quad a(s) = |p_k'(s)| \cdot k_1 \cdot k_2/k, \quad k = k_1(s) + k_2(s), \quad f = k_2(\rho_2 - \rho_1)g,$$
$$k_i(s) > 0, \quad 0 < s < 1; \quad k_1(0) = k_2(1) = 0,$$

где $p_k(s)$ – капиллярное давление ($p_k' \leqslant 0$); $\overline{k}_i = k_i \cdot \mu_i$ – относительные фазовые проницаемости; μ_i, ρ_i – соответственно вязкости и плотности жидкостей, g – ускорение силы тяжести. Функциональные параметры модели (k_1, k_2, p_k) задаются, как правило, зависимостями

$$(24)\quad k_1 = f_1(s)s^{\lambda_1}, \quad k_2 = f_2(s)(1-s)^{\lambda_2}, \quad p_k = f_3 s^{\lambda_3}(1-s)^{\lambda_4},$$
$$f_i \in c^1, \quad |\ln f_i| \leqslant M, \quad 0 \leqslant (\lambda_1, \lambda_2).$$

В [6] для системы (21), (22) доказана теорема существования обобщенного решения $w = (s, p) \in V$, $V = \{(s, p) |\ 0 \leqslant s \leqslant 1,\ \sqrt{a}\nabla s \in L^2(Q),\ \nabla p \in L^\infty(0, T; L^q(\Omega))\}$, $n < q$, а в [3] для $w(t, x)$ установлены конечное время локализации решения в случае краевой задачи и конечная скорость распространения возмущений от начальных данных ($s(0, x) = 0$ или $s(0, x) = 1$). Будем исследовать локальные свойства решения системы (21), (22), предполагая, что начальные данные удовлетворяют условию

$$(25)\quad \| s(0, \cdot)\|^2_{2, B_\rho} \leqslant c(\rho - \rho_0)_+^{1/(1-\lambda)}, \quad \rho \in (0, R).$$

Ограничимся также лишь случаями планового течения (в плоскости $x_3 = 0$, $g = (0, 0, g)$) или жидкостей с одинаковыми плотностями. Согласно (23) в этих случаях

$$(26)\quad f = 0.$$

Т е о р е м а 3. *Пусть* $w = (s, p) \in V$ *– обобщенное решение системы* (21), (22); *выполнено* (26) *и дополнительно*

$$0 < \lambda = (\lambda_1 + \lambda_3 - 1), \quad |(k_1/k)'|^2/a \cdot s^\lambda \leqslant M(\delta), \quad 0 \leqslant s \leqslant 1 - \delta < 1.$$

Тогда существует $t_0 = t_0(M, c, k)$ *такое, что*

$$s(t, x) = 0, \quad x \in B_{\rho_0}, \quad t \leqslant t_0$$

и соответственно $\Delta p(t, x) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из энергетического соотношения

$$(27)\quad \frac{1}{2}(A(t, \rho) - A(0, \rho)) + E = \int_0^t \left\{ \left(\left(\frac{k_1}{k}\right)' k\nabla p\, \nabla s, s \right)_{B_\rho} + \left(a\ \frac{\partial s}{\partial n}, s \right)_{\partial B_\rho} \right\} d\tau,$$

$$A(t, \rho) = \| s(t, \cdot)\|^2_{2, B_\rho}, \quad E(t, \rho) = \int_0^t (a\nabla s, \nabla s)_{B_\rho} d\tau,$$

которое приводит к неравенству вида (20) для функции $\overline{E}(\rho) = \sup\limits_{t \leqslant t_0} E(t, \rho)$. Исследование неравенства (20) и завершает доказательство.

З а м е ч а н и е 5. Аналогичное утверждение справедливо и для функции $s = 1 - s(t, x)$.

З а м е ч а н и е 6. Теореме 3 можно дать следующую физическую интерпретацию. Пусть в начальный момент $t = 0$ область B_{ρ_0} занята только одной из жидкостей ($s(0, x) = 0$ или $s(0, x) = 1$). Тогда при любых воздействиях вне B_R вытеснение данной жидкости из B_{ρ_0} начнется не ранее времени $t_0 > 0$.

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск
Университет Комплутаес
Мадрид

Поступило
19 VII 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Антонцев С.Н.* – Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1980, т. 96, с. 3–12. 2. *Антонцев С.Н.* – ДАН, 1981, т. 260, № 6, с. 1289–1293. 3. *Антонцев С.Н.* Локализация решений вырождающихся уравнений механики сплошной среды. Новосибирск, 1986. 108 с. 4. *Антонцев С.Н.* В сб.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: Наука, 1987, вып. 83, с. 138–144. 5. *Антонцев С.Н., Епихов Г.П., Кашеваров А.А.* Системное математическое моделирование процессов водообмена. Новосибирск: Наука, 1986. 215 с. 6. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 319 с. 7. *Антонцев С.Н., Диас Х.И.* – ДАН, 1988, т. 303, № 3. 8. *Калашников А.С.* – УМН, 1987, т.42, вып. 2 (254), с. 135–176. 9. *Мирзаджанзаде А.Х., Огибалов П.М.* Нестационарные движения вязкопластических сред. М.: Изд-во МГУ, 1977. 373 с. 10. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с. 11. *Bohm M.* On a nonhomogeneous non newtonian fluid. Report 83–8. Lefschetz Center for dinamical systems. Division of Applied Mathematics Brown Univercity. Providence, 1983. 12. *Diaz J.I., Veron L.* – C.R., 1983, vol. 297, p. 149–152. 13. *Diaz J.I., Veron L.* – Trans. Amer. Math. Soc., 1985, vol. 290, p. 787–814.