АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ЖУРНАЛ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

2

(Отдельный оттиск)

НОВОСИБИРСК
«Н А У К А»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1989

2. *Второе начало* заключает в себе комплекс утверждений, одни из которых относятся к утверждению необратимости процессов и к диссипативным явлениям. Этот круг идей здесь не обсуждается. Другой круг идей связан с дифференциальной формой Гиббса и в одном из широко распространенных выражений — с постулатом о существовании интегрирующего множителя $1/T$. Интегрирующий множитель для закона сохранения (4.1) оказывается равным «температурному вектору» $(\tau V_k) = (-(1/T)V_k)$ (для лоренцевой системы, аксиоматика которой проще и последовательнее, чем для галилеевой). Столь тесное соответствие, конечно, не случайно, но свидетельствует о разумности принятых постулатов.

3. В термодинамике имеется еще *третье начало*, введенное Нерстом и Планком. Оно утверждает определенное единообразие поведения вещества при $T \to 0$, т. е., иначе говоря, факт некоторого единообразного вырождения физически возможных уравнений состояний.

4. Быть может, третье начало имеет своего рода симметричное дополнение на противоположном конце температурной шкалы — *четвертое начало*. А именно, правдоподобно, что при $T \to \infty$ возможные формы уравнений состояния опять-таки вырождаются и асимптотически имеет место равенство

$$P = c^2\rho/3 \tag{4.2}$$

(см., например, [15]). Разумеется, (4.2) имеет смысл только для лоренцевой системы. Соотношение (4.2) равносильно равенству $T^i_i = 0$, где, как обычно, $T^i_k \equiv g_{kj}T^{ji}$. Пусть для простоты $\nu = 1$, т. е. базисная система состоит только из (3.3), (3.4). Дифференциальная форма (3.7) приобретет вид

$$Td(S/N) = d(c^2\rho/N) + Pd(1/N). \tag{4.3}$$

Из (4.2), (4.3) вытекает уравнение состояния

$$S/N = G(\eta), \quad \eta \equiv (c^2\rho)^3/N^4 = (c^2\rho/N)^3(1/N) \tag{4.4}$$

($G(\eta)$ — некоторая функция). Из (4.3), (4.4) находятся T и P, причем P совпадает, разумеется, с (4.2), а

$$T = (1/3)(c^2\rho/N)[1/(\eta\partial G/\partial\eta)]. \tag{4.5}$$

Оказывается, что если уравнение состояния удовлетворяет (4.2)—(4.5), то система (3.3), (3.4) инвариантна относительно конформных преобразований координат (все конформные преобразования описаны в [17]). Итак, если при $T \to \infty$ справедливо (4.2), то асимптотически возникает дополнительная симметрия. Уравнения электромагнитного поля, как известно, также конформно инвариантны. Складывается впечатление, что при $T \to \infty$ для всех веществ и для поля имеется универсальная симметрия — конформная инвариантность. Если такое утверждение верно, то именно оно должно считаться точным и общим выражением четвертого начала. Кроме того, это станет дополнительным подтверждением тезиса из введения о группе как наиболее фундаментальном объекте (наряду с особой дивергентной структурой динамических уравнений).

Было бы чрезвычайно интересно, если бы удалось найти сходное выражение и для третьего начала, т. е. найти универсальную (для всех веществ) инвариантность подходящей совокупности уравнений и/или дополнительный закон сохранения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Групповые свойства дифференциальных уравнений.— Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
2. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
3. **Ибрагимов Н. Х.** Группы преобразований в математической физике.— М.: Наука, 1983.
4. **Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.** Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения.— М.: Физматгиз, 1958.

5. **Наймарк М. А.** Линейные представления группы Лоренца.— М.: Физматгиз, 1958.
6. **Годунов С. К.** Интересный класс квазилинейных систем // ДАН.— 1961.— Т. 139, № 3.
7. **Годунов С. К.** Разностные методы решения уравнений газовой динамики.— Новосибирск: НГУ, 1962.
8. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды.— М.: Наука, 1978.
9. **Блохин А. М.** Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики.— Новосибирск: Наука, 1986.
10. **Шугрин С. М.** Об одном классе квазилинейных систем // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1969.— Вып. 2.
11. **Шугрин С. М.** Галилеевы системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.— 1980.— Т. 16, № 12.
12. **Воеводин А. Ф., Шугрин С. М.** Численные методы расчета одномерных систем.— Новосибирск: Наука, 1981.
13. **Чакыров Е. И.** Конечномерные расширения группы Галилея // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1985.— Вып. 68.
14. **Чакыров Е. И.** Дифференциальные инварианты некоторых расширений группы Галилея // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1985.— Вып. 69.
15. **Вейнберг С.** Гравитация и космология.— М.: Мир, 1975.
16. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Гидродинамика.— М.: Наука, 1986.
17. **Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.** Современная геометрия.— М.: Наука, 1986.

Поступила 1/VIII 1988 г.

УДК 532.5 + 517.946

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД И ЛОКАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

С. Н. Антонцев, J. I. Diaz

(Новосибирск, Мадрид)

Многие актуальные математические модели механики сплошной среды приводят к изучению нелинейных систем дифференциальных уравнений с частными производными составного типа. В таких системах различные компоненты искомого вектор-решения (например, скорость, плотность, давление, насыщенность, температура и т. д.) удовлетворяют уравнениям различных типов (параболического, гиперболического, эллиптического). Системы уравнений вырождаются в смысле типа или порядка при определенных значениях искомого решения или его производных. Сами решения обладают при этом конечным временем локализации (обращения в нуль), конечной скоростью распространения возмущений от начальных данных, пространственной локализацией с инерцией (метастабильной) и т. д. Свойство решений вырождающихся параболических уравнений (типа уравнения нелинейной теплопроводности) обладать конечной скоростью распространения возмущений впервые, по-видимому, отмечено и начало изучаться в [1—3], а для решений вырождающегося эллиптического уравнения аналогичное свойство отмечено в [4] в связи с исследованием задачи об истечении плоской звуковой струи. Затем изучению этих вопросов для одного параболического уравнения посвящено большое количество работ, достаточно полный обзор которых приведен в [5, 6]. В настоящее время для квазилинейных параболических уравнений также активно изучаются вопросы локализации решений, неограниченно растущих за конечное время [7]. Результаты работ для одного параболического уравнения получены, как правило, на основе теорем сравнения исследуемого решения со вспомогательным, например автомодельным. К системам уравнений составного типа аналогичные методы в основном не применимы. В [8—10] предложен и обоснован энергетический метод изучения характера возмущений, описываемых решениями общих уравнений эллиптического, параболического и составного типов. Идея метода состоит в получении и исследовании обыкновенных дифференциальных неравенств для энергетических функций. Метод получил обобщение и развитие в [11—18], в том числе и на уравнения высших порядков. Он оказался эффективен при изучении слабых обобщенных решений систем составного типа, возникающих в механике сплошных сред.

В [11, 19—23] энергетическим методом установлены конечное время локализации и конечная скорость распространения возмущений от начальных данных в ряде математических моделей механики сплошных сред (фильтрационные течения двухфазной жидкости, совместные течения поверхностных и подземных вод, течения воды в открытых руслах, течения несжимаемых неоднородных вязкопластических сред, одномерных течений вязкого газа и др.). В [21] доказано, что осесимметрическая струя, движущаяся вдоль оси симметрии со звуковой скоростью, выравнивается (аналогично плоскому случаю [4]) на конечном расстоянии.

В настоящей работе устанавливаются конечное время локализации и метастабильная локализация (локализация с инерцией) решений для некоторых из вышеперечисленных моделей при наличии «источников» — заданных правых частей. Отметим, что не рассматриваются вопросы существования соответствующих решений, а изучаются лишь их качественные свойства.

1. Несжимаемые неоднородные неньютоновские жидкости. Система уравнений, представляющих законы сохранения, имеет составной тип и может быть записана в виде [24—26]

$$(1.1)\qquad \frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{v}\cdot\nabla\rho = 0, \quad \nabla\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\rho}{\partial x_n}\right);$$

$$(1.2)\qquad \operatorname{div}\mathrm{v} = 0, \ \mathrm{v} = (v_1, \ldots, v_n);$$

$$(1.3)\qquad \rho\frac{d\mathrm{v}}{dt} \equiv \rho\left(\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial t} + (\mathrm{v}\cdot\nabla)\,\mathrm{v}\right) = \operatorname{div}P + \rho\mathrm{f};$$

$$(1.4)\qquad P = -pE + F(D), \quad D = \{D_{ij}\} = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right\},$$

$$x \in \Omega \subset R^n, \ t \in (0, \ T), \ Q = \Omega\times(0, \ T).$$

Здесь $\mathrm{v}(t, x)$, $\rho(t, x)$, $p(t, x)$ — искомые скорость, плотность и давление в жидкости; P, D — тензоры напряжений и скоростей деформации; E — единичный тензор; $\mathrm{f}(t, x)$ — заданная массовая сила —«источник».

Предположим, что заданный симметричный тензор F, определяющий P, удовлетворяет условию

$$(1.5)\qquad \delta|D|^q \leqslant F : D = F_{ij}D_{ij}, \ 1 < q, \ \delta = \mathrm{const} > 0.$$

Для классической несжимаемой вязкой жидкости $P = -pE + 2\mu D$ и в (1.5) $\delta = 2$, $q = 2$. Для вязкопластических жидкостей [25, 26] $P = -pE + 2(\mu + \tau|D|^{\sigma-1})D$; $0 \leqslant \sigma < 1$ и, применяя неравенство Юнга, имеем (1.5) с

$$(1.6)\qquad \delta = \mu^{1/\Theta}\tau^{(\Theta-1)/\Theta}\Theta^{1/\Theta}(\Theta/\Theta - 1)^{(\Theta-1)/\Theta},$$

$$q = \{2/\Theta + [(\sigma + 1)(\Theta - 1)]/\Theta\} \in (\sigma + 1{,}2).$$

Рассмотрим для $\mathrm{w} = (\mathrm{v}, \rho, p)$ начально-краевую задачу

$$(1.7)\qquad \mathrm{v}(t, x) = 0, \ (x, t) \in \Gamma_T = \partial\Omega\times(0, \ T);$$

$$(1.8)\qquad \mathrm{v}(0, x) = v_0(x), \ \rho(0, x) = \rho_0(x), \ x \in \Omega.$$

Отметим, что в [27] для задачи (1.1)—(1.4), (1.7), (1.8) при зависимости (1.5) с $\sigma = 0$ доказана теорема существования слабого обобщенного решения $\mathrm{w} = (v, \rho, p) \in V_q$, где $V_q = \{\mathrm{w}\colon \mathrm{v} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap \cap L^2(0, T; W_0^{1,q}(\Omega)), 1/M \leqslant \rho \leqslant M, \rho_t \in L^2(0, T; W^{-1,2}(\Omega))\}$ $(q = 2)$ с учетом обозначений [28]. Для однородной несжимаемой жидкости ($\rho(t, x) \equiv \equiv \mathrm{const}$) теоремы существования решения системы (1.1)—(1.4) для некоторых зависимостей (1.5) доказаны в [28, 29]. Будем исследовать далее качественные свойства решений $\mathrm{w} \in V_q$ системы (1.1)—(1.4), предполагая, что Ω — ограниченная область с гладкой границей. Пусть выполнено условие (1.5), в котором

$$(1.9)\qquad q \in (2n/(2 + n), \ 2), \ n \geqslant 2,$$

и дополнительно

$$(1.10)\qquad \|\mathrm{v}_0(x)\|_{2,\Omega} \leqslant C_v = \mathrm{const}, \ 1/M \leqslant \rho_0 \leqslant M;$$

$$(1.11)\qquad \|\mathrm{f}(t, \cdot)\|_{2,\Omega}^{q/(q-1)} \leqslant C_f(1 - t/T_f)_+^{q/(2-q)},$$

$$C_f = \mathrm{const}, \quad u_+ = \max(0, u), \quad T_f \in (0, T).$$

Теорема 1.1 (*конечное время локализации*). *Пусть* $\mathrm{w} = (\mathrm{v}, \rho, p) \in V_q$ — *обобщенное решение задачи* (1.1)—(1.4), (1.7), (1.8) *и выполнены условия* (1.5), (1.9)—(1.11). *Тогда для любого* $T_f \in (0, T)$ *существуют по-*

2*

стоянные C_v, C_f (вообще говоря, малые по отношению к δ) и C такие, что

(1.12) $$\|\mathbf{v}(t,\ \cdot)\|^2_{2,\Omega} \leqslant C(1-t/T_f)_+^{q/(2-q)}$$

и, в частности,

(1.13) $$\mathbf{v}(t,\ x) \equiv 0,\ x \in \Omega,\ T_f \leqslant t.$$

Доказательство. Следуя методу энергетических оценок [9, 11—13], сначала для рассматриваемого решения $\mathbf{w}$ доказывается равенство

(1.14) $$\frac{1}{2}\frac{d\Pi}{dt} = (\operatorname{div} P,\ \mathbf{v})_\Omega + (\rho f,\ \mathbf{v})_\Omega = -(F\colon\ D,\ 1)_\Omega + (\rho \mathbf{f},\ \mathbf{v})_\Omega \equiv I,$$

$$\Pi(t) = (\rho(t,\ \cdot)\,\mathbf{v}(t,\ \cdot),\ \mathbf{v}(t,\ \cdot))_\Omega,\quad (u,\ v)_\Omega = \int_\Omega uv\,dx.$$

Последнее формально получается умножением уравнения (1.3) на $\mathbf{v}(t,\ x)$ и последующим интегрированием по частям с учетом уравнений (1.1), (1.2) и граничного условия (1.7).

Далее воспользуемся неравенством Корна [26]

(1.15) $$K\|\mathbf{v}\|_{m,\Omega} \leqslant \|D(\mathbf{v})\|_{q,\Omega},\ m \leqslant qn/(n-q)$$

при $m = 2$ и с учетом (1.5), (1.11) оценим правую часть (1.14) следующим образом:

(1.16) $$I \leqslant -\delta\|D\|^q_{q,\Omega} + MK^{-1}\|\mathbf{f}\|_{2,\Omega}\|D\|_{q,\Omega} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left(-a\Pi^{q/2} + b(1-t/T_f)_+^{q/(2-q)}\right),$$

$$a = \delta(K/\sqrt{M})^q,\ b = (M/q)^{q/(q-1)}(q-1)/q(\delta q/2)^{-1(q-1)}C_f.$$

Объединяя (1.14), (1.16), приходим к обыкновенному дифференциальному неравенству для энергетической функции $\Pi(t)$:

(1.17) $$d\Pi/dt + a\Pi^{q/2} \leqslant b(1-t/T_f)_+^{q/(2-q)},\quad \Pi(0) \leqslant MC_v.$$

Все неотрицательные решения неравенства (1.17) мажорируются функцией $\overline{\Pi}(t) = MC_v(1-t/T_f)^{2/(2-q)}$, если постоянные C_v, C_f, T_f, M, K, q, δ удовлетворяют соотношению $-2MC_v/(2-q)T_f + a(MC_v)^{q/2} \geqslant b$. Изучение последнего и завершает доказательство теоремы.

Замечание 1.1. Теорема 1.1 имеет следующую физическую интерпретацию. Течение неньютоновской жидкости (при условиях (1.5), (1.9)), инициированное начальными данными и массовыми силами («источником»), приходит в состояние покоя $\mathbf{v} \equiv 0$ начиная с момента времени T_f — выключения «источников».

Замечание 1.2. Теорема 1.1 может быть сформулирована также и таким образом: для любой постоянной $C_v \in (0,\ \infty)$ в (1.10) и достаточно малой C_f в (1.11) существует $T_f \in (0,\ \infty)$ такое, что справедливы (1.12), (1.13). При $f \equiv 0$ аналогичное утверждение доказано в [11].

Замечание 1.3. Постоянная K в неравенстве (1.15) не зависит от Ω, если $m = 2$, $q = 2n/(n+2)$, $q > 1$. Поэтому в данном случае сформулированные выше утверждения справедливы и для задачи Коши $\mathbf{v}(0,\ x) = \mathbf{v}_0(x)$, $\rho(0,\ x) = \rho_0(x)$, $x \in R^n$ для системы (1.1)—(1.4).

Будем изучать теперь локальные свойства решений системы (1.1)—(1.4) вне связи с граничными условиями. Ограничимся рассмотрением лишь решений частного вида

(1.18) $$\mathbf{v}(t,\ x) = (0,\ 0,\ w(t,\ x_1,\ x_2)),\ \rho(t,\ x) = 1,$$
$$\mathbf{f}(t,\ x) = (0,\ 0,\ f(t,\ x_1,\ x_2)),\ \partial p/\partial x_3 = a(t),$$

предполагая градиент давления $a(t)$ заданным, этому решению может соответствовать течение в трубе. Тогда систему уравнений (1.1)—(1.4) запишем в форме

(1.19) $$\partial w/\partial t = \operatorname{div}\,\mathrm{F}(\nabla w) - \partial p/\partial x_3 + f.$$

Предполагается, что вектор $\mathbf{F}(\nabla w)$ удовлетворяет условию

(1.20) $$\delta|\nabla w|^q \leqslant \mathbf{F}(\nabla w)\nabla w \leqslant \delta^{-1}|\nabla w|^q, \ 2 < q.$$

Введем обозначение $B_\rho(x_0) = \{x\colon\ x \in \Omega,\ \ |x - x_0| < \rho\}$ и рассмотрим в области $B_{\rho_1} \times (0, T)$ решение уравнения (1.19) с начальным условием

(1.21) $$w(0, x) = w_0(x), \quad x \in B_{\rho_1}.$$

Предполагается, что

(1.22) $$\left(\| w_0 \|^2_{2,B_\rho} + \int\limits_0^T \| f(\tau, \cdot)\|^2_{2,B_\rho} d\tau\right) \leqslant C(\rho - \rho_0)_+^{1/(1-\alpha)},$$

$$\rho \in (0, \rho_1), \ 0 < \rho_0 < \rho_1, \ \alpha = (3q - 2)/4(q - 1);$$

(1.23) $$\left(|a(t)| + \| w(t, \cdot)\|^2_{2,B_{\rho_1}}\right) \leqslant M.$$

Теорема 1.2 (*метастабильная локализация*). *Пусть* $w(t, x) \in V_q$ — *обобщенное решение уравнения* (1.19) в $B_{\rho_1} \times (0, T)$ *с начальным условием* (1.21) *и выполнены условия* (1.20)—(1.23). *Тогда существует* $t_0 = t_0(M, q, \rho_1, \delta) \in (0, T)$ *такое, что*

(1.24) $$u(t, x) = \left(w(t, x) + \int\limits_0^t a(\tau)\, d\tau\right) = 0, \quad x \in B_{\rho_0}, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0.$$

Доказательство. Введем энергетические функции

(1.25) $$\Pi(t, \rho) = (u(t, \cdot), u(t, \cdot))_{B_\rho}, \quad b(t, \rho) = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \Pi(\tau, \rho),$$

$$E(t, \rho) = \int\limits_0^t (\mathbf{F}(\nabla u), \nabla u)_{B_\rho} d\tau,$$

обладающие, как нетрудно проверить, свойствами

(1.26) $$\frac{\partial E}{\partial \rho} = \int\limits_0^t (\mathbf{F}(\nabla u), \nabla u)_{\partial B_\rho} d\tau \geqslant \delta \int\limits_0^t \| \nabla u \|^q_{q,\partial B_\rho} d\tau,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = (F, \nabla u)_{B_\rho} \geqslant \delta \| \nabla u \|^q_{q,B_\rho}.$$

Для функции $u(t, x) = w(t, x) + \int\limits_0^t a(\tau)\, d\tau$, согласно уравнению (1.19), получаем энергетическое равенство

(1.27) $$\frac{1}{2}(\Pi(t, \rho) - \Pi(0, \rho)) + E(t, \rho) = I_1 + I_2,$$

где $I_1 = \int\limits_0^t (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}, u)_{\partial B_\rho} d\tau; I_2 = \int\limits_0^t (f, u)_{B_\rho} d\tau$; $\mathbf{n}$ — вектор нормали к ∂B_ρ. Согласно [11—13], слагаемые в правой части (1.27) можно оценить следующим образом:

(1.28) $$|I_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} Tb(t, \rho) + \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_0^t \| f(\tau, \cdot)\|^2_{2,B_\rho} d\tau, \quad \varepsilon > 0,$$

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{\delta} \int\limits_0^t \| \nabla u \|^q_{q,\partial B_\rho} \| u \|_{q,\partial B_\rho} d\tau \leqslant \varepsilon(E + b) + Ct^\gamma \left(\frac{\partial E}{\partial \rho}\right)^{1/\alpha}$$

$(C = C(T, M, q, \delta, \varepsilon),\ \gamma = 8/(3q - 1),\ \alpha = 3q - 2/4(q - 1)).$

Объединяя (1.27), (1.28), с учетом (1.22) и при соответствующем выборе

$\varepsilon > 0$ приходим к окончательному неравенству

$$E \leqslant E + b \leqslant at^{\nu} (\partial E/\partial \rho)^{1/\alpha} + b(\rho - \rho_0)_+^{1/(1-\alpha)}, \tag{1.29}$$

в котором a, b зависят лишь от M, q, δ, T. Согласно результатам [30, 31], для неравенств вида (1.29) существует $t_0 > 0$ такое, что $E(t, \rho_0) = 0$, $t \leqslant t \leqslant t_0$. Это и завершает доказательство теоремы.

Замечание 1.4. Таким образом, если неньютоновская жидкость (с законом (1.20)) покоилась ($w(0, x) = u(0, x) = 0$) в области B_{ρ_0} при $t = 0$, то независимо от граничных условий и «источников» вне B_{ρ_0} ее движение определяется соотношением

$$w(t, x) = -\int_0^t a(\tau)\, d\tau, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \ x \in B_{\rho_0}.$$

В частности, состояние покоя сохраняется ($w(t, x) = 0$) при $t \in [0, t_0]$, если отсутствует перепад давления ($a = 0$).

Замечание 1.5. Аналогично предыдущему энергетическим методом можно исследовать задачу (1.1)—(1.4) и с учетом изменения температуры среды $\Theta(t, x)$, добавив к системе уравнение

$$\rho \frac{d\Theta}{dt} \equiv \rho \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \Theta \right) = \operatorname{div} \mathbf{A}(t, x, \Theta, \nabla \Theta) + L(t, x, \Theta, v).$$

При этом можно учитывать более общую зависимость $F(D, \Theta)$, а также нелинейные законы теплопроводности и объемного поглощения тепловой энергии в виде [11—13]

$$\delta_1 |\Theta|^{\alpha} |\nabla \Theta|^{\varkappa} \leqslant \mathbf{A} \nabla \Theta \leqslant (1/\delta_1) |\Theta|^{\alpha} |\nabla \Theta|^{\varkappa}, \ -1 < \Theta, \ 1 < \varkappa,$$
$$L = -\gamma_0 |\Theta|^{\sigma - 1} \Theta + L_0(t, x, \mathbf{v}), \ 0 \leqslant \gamma, \ 0 < \sigma \leqslant 1.$$

2. Совместные течения поверхностных и подземных вод. В работах [11, 23] рассмотрены математические модели совместных течений безнапорных грунтовых и поверхностных вод, основанные на уравнениях плановой фильтрации и гидравлики открытых русел.

В простейшем случае (канал прямоугольного сечения, постоянной ширины, водоупор подземных вод и дно канала горизонтальны и др.) соответствующая система уравнений и внутренние условия сопряжения имеют вид [23]

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{div}(H \nabla H) + f_{\Omega}(t, x), \quad x \in \Omega \setminus \Gamma; \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\psi(s, u) |u_s|^{-1/2} \frac{\partial u}{\partial s} \right) - \left[H \frac{\partial H}{\partial n} \right]_{\Gamma} + f_{\Gamma}(t, x), \quad x \in \Gamma; \tag{2.2}$$

$$H \frac{\partial H}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_{\pm}} = \sigma_{\pm}(u - H_{\pm}), \quad x \in \Gamma, \quad 0 < \sigma_{\pm} = \mathrm{const}. \tag{2.3}$$

Здесь $H(t, x)$ — уровень грунтовых вод в области $\Omega \subset R^2$; $u(t, s)$— уровень воды в канале, которому отвечает кривая Γ в Ω; s — длина дуги вдоль Γ; $\mathbf{n}$ — вектор нормали к Γ; $H_{\pm}$ — значения H при подходе к Γ с разных сторон (соответственно $[H]_{\Gamma} = H_+ - H_-$); $f_{\Omega}(t, x)$, $f_{\Gamma}(t, x)$— заданные внешние поступления воды —«источники».

При $f_{\Gamma} = f_{\Omega} = 0$ в [11, 23] энергетическим методом была доказана конечная скорость распространения возмущений для $H(t, x)$, $u(t, x)$ от нулевых начальных данных. Ниже доказано наличие метастабильной локализации для решений (2.1)—(2.3).

Будем изучать локальные свойства решения $\mathbf{w} = (H(t, x), u(t, x))$ системы (2.1)—(2.3) в круге $B_{\rho_1}(x_0) = \{x\colon x \in \Omega, |x - x_0| < \rho\}$, $x_0 \in \Gamma$ без ограничения общности, полагая, что $x_0 = 0$,

$$\Gamma_{\rho} = \{x\colon x \in \Omega, x_2 = 0, |x_1| < \rho\}, \quad s = x_1, \quad B_{\rho}^{\pm} = \{x\colon x \in B_{\rho}, 0 \lessgtr x_2\}.$$

Для системы (2.1)—(2.3) в [23] для основных начально-краевых задач доказано существование обобщенного решения $\mathrm{w} = (H, u) \in V$, где

$$V = \{(H, u)\colon 0 \leqslant (H, u) \leqslant M, \ \sqrt{H} \nabla H \in L^2(0, T; L^2(B_{\rho_1})),$$
$$\psi^{2/3} |u_s| \in L^{3/2}\left(0, T; L^{3/2}(\Gamma_{\rho_1})\right)\}, \quad (|\ln(\psi u^{-5/3})| \leqslant M).$$

Теорема 2.1 (*метастабильная локализация*). *Пусть* $\mathrm{w} = (H, u) \in V$ *— обобщенное решение системы* (2.1)—(2.3) *в* $B_{\rho_1} \times (0, T)$ *и*

$$(2.4) \qquad \left(\|H(0, \cdot)\|^2_{2,B^{\pm}_{\rho}} + \|u(0, \cdot)\|^2_{2,\Gamma_\rho} + \int_0^T \left(\|f_\Omega\|^2_{2,B^{\pm}_{\rho}} + \|f_\Gamma\|^2_{2,\Gamma_\rho}\right) d\tau\right) \leqslant$$
$$\leqslant C(\rho - \rho_0)_+^{1/(1-\alpha)}, \quad \rho \in (0, \rho_1), \quad 0 < \rho_0 < \rho_1, \quad \alpha = 5/6.$$

Тогда существует $t_0 = t_0(M, C, \rho_1, T)$ *такое, что* $\mathrm{w} = (H, u) = 0$, $x \in B_{\rho_0}$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$.

Доказательство. Введем обозначения

$$\Pi(t, \rho) = \left(\|H(t, \cdot)\|^2_{2,B_\rho} + \|u(t, \cdot)\|^2_{2,\Gamma_\rho}\right), \quad b(t, \rho) = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \Pi(\tau, \rho),$$

$$E(t, \rho) = \int_0^t \left((H\nabla H, \nabla H)_{B_\rho} + (\psi, |u_s|^{3/2})_{\Gamma_\rho}\right) d\tau,$$

$$D^2 = \int_0^t \sum_{\pm} (\sigma_\pm, (u - H_\pm)^2)_{\Gamma_\rho} d\tau, \quad F = \int_0^t \left((f_\Omega, H)_{B_\rho} + (f_\Gamma, u)_{\Gamma_\rho}\right) d\tau.$$

Тогда энергетическое равенство, соответствующее системе (2.1)—(2.3), имеет вид

$$(2.5) \qquad \frac{1}{2}(\Pi(t, \rho) - \Pi(0, \rho)) + E(t, \rho) + D^2 =$$
$$= F + \int_0^t \left(\left(H\frac{\partial H}{\partial n}, H\right)_{\partial B_\rho} + \psi |u_s|^{-1/2} u_s u \Big|_{x_1=-\rho}^{x_1=\rho}\right) d\tau.$$

Проводя оценки, аналогичные (1.28), приходим к неравенству типа (1.29), анализ которого и завершает доказательство теоремы.

Замечание 2.1. Теорема 2.1 имеет следующую физическую интерпретацию. Область B_{ρ_0}, не занятая водой в начальный момент времени $t = 0$, остается таковой и при $t \leqslant t_0$ независимо от граничных условий и источников вне B_{ρ_0}.

3. Двухфазная фильтрация несмешивающихся несжимаемых жидкостей. Нестационарная фильтрация двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в неоднородной анизотропной пористой среде описывается системой уравнений составного типа [22]:

$$(3.1) \qquad m(x)\frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div}(K_0(x)a(s)\nabla s - b(s)\mathrm{v} + \mathrm{F}(x, s));$$

$$(3.2) \qquad \operatorname{div} \mathrm{v} = 0, \ \mathrm{v} = -(K(x, s)\nabla p + \mathrm{f}(x, s)), \ x \in \Omega \subset R^n.$$

Здесь искомые функции — насыщенность $s(t, x)$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$, «приведенное» давление $p(t, x)$, скорость смеси v. Коэффициенты системы (3.1), (3.2) определяются формулами

$$(3.3) \qquad a(s) = k_{01}k_{02}\left|\frac{\partial p_k}{\partial s}\right| \Big/ (k_{01} + k_{02}), \quad b = k_{01}/k,$$
$$F = -\frac{k_{01}k_{02}}{k} K_0(\nabla_x p_k + (\rho_2 - \rho_1)g), \quad k = k_{01} + k_{02},$$

где p_k — капиллярное давление; $\mu_i k_{0i}$ — относительные фазовые проницаемости; μ_i, ρ_i — вязкости и плотности жидкостей; g — ускорение силы тяжести; K_0 — симметричный тензор фильтрации для однородной жидкости; m — пористость. Коэффициент $a(s)$ в (3.1) в зависимости от вида функциональных параметров k_{01}, p_k модели может обращаться либо в нуль, либо в бесконечность при значениях $s = 0,1$, определяя тем самым различный характер распространения возмущений насыщенности $s(t, x)$. В [22] для системы (3.1), (3.2) доказана теорема существования обобщенного решения $\mathrm{w} = (s, p) \in V$, где $V = \{(s, p)\colon 0 \leqslant s \leqslant 1, \sqrt{a} \times \nabla s \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \nabla p \in L^\infty(0, T; L^q(\Omega))\}$, $n < q \leqslant \infty$, а в [10, 11] установлены конечное время локализации $s(t, x)$ ($a(0) = \infty$, $s = 0$) в случае краевой задачи и конечная скорость распространения возмущений от начальных данных ($s(0, x) = 0$ или $s(0, x) = 1$, $a(0) = a(1) = 0$). Ниже показано, что при дополнительном условии на начальные данные $s(0, x) = s_0(x)$ это решение обладает и свойством метастабильной локализации (локализации с инерцией) при $a(0) = 0$.

Рассмотрим систему (3.1), (3.2) в области $B_{\rho_1} \times (0, T)$, предполагая выполненными условия

$$M^{-1} \leqslant \left(m;\ \frac{(K_0\xi, \xi)}{(\xi, \xi)};\ k;\ \left|\frac{\partial p_k}{\partial s}\right|\right) \leqslant M, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1; \tag{3.4}$$

$$\left(|\ln(as^{-\alpha})|;\ |\mathbf{F}'_s| s^{1-\alpha};\ |\operatorname{div}_x \mathbf{F}|\, s^{\alpha};\ |b'_s| s^{-(\alpha+\nu)/2}\right) \leqslant M; \tag{3.5}$$

$$\|s(0, x)\|^2_{2, B_\rho} \leqslant C(\rho - \rho_0)_+^{1/(1-\alpha)}, \quad 2 + \alpha n/q \leqslant \nu + 2 \leqslant \alpha. \tag{3.6}$$

Теорема 3.1 (*метастабильная локализация*). *Пусть* $\mathrm{w} = (s, p) \in V$ *— обобщенное решение системы* (3.1), (3.2) *и выполнены условия* (3.4), (3.5). *Тогда существует* $t_0 = t_0(M, C, \alpha, q, \rho_1) > 0$ *такое, что*

$$s(t, x) = 0, \quad x \in B_{\rho_0}, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0.$$

Доказательство. Введем энергетические функции

$$\Pi(t, \rho) = (ms(t, \cdot), s(t, \cdot))_{B_\rho}, \quad E(t, \rho) = \int_0^t (K_0 a \nabla s, \nabla s)_{B_\rho}\, d\tau$$

и будем использовать уравнение (3.1) в виде

$$m\frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div}(K_0 a \nabla s) - (b'_s \mathbf{v} + \mathbf{F}'_s)\nabla s + \operatorname{div}_x \mathbf{F}. \tag{3.7}$$

Соответствующее (3.7) энергетическое равенство

$$\frac{1}{2}\left(\Pi(t, \rho) - \Pi(0, \rho) + E(t, \rho) = \int_0^t ((b'_s \mathbf{v} + \mathbf{F}'_s)\nabla s, s) + \right.$$
$$\left. + \operatorname{div}_x \mathbf{F}, s)_{B_\rho} + (K_0 a \nabla s \mathbf{n}, s)_{\partial B_\rho}\right) d\tau$$

приводит аналогично теоремам 1.2 и 2.1 к неравенству вида (1.29), исследование которого и завершает доказательство теоремы.

Замечание 3.1. Аналогичное утверждение справедливо и для функции $s(t, x) = 1 - s(t, x)$.

Замечание 3.2. В области $B_{\rho_0} \times (0, t_0)$ приведенное давление удовлетворяет эллиптическому уравнению $\operatorname{div}(K(x, 0)\nabla p + \mathbf{f}(x, 0)) = 0$.

Замечание 3.3. Теореме 3.1 можно дать следующую физическую интерпретацию. Пусть в начальный момент $t = 0$ область B_{ρ_0} занята только одной жидкостью ($s(0, x) = 0$ или $s(0, x) = 1$). Тогда при любых воздействиях вне B_{ρ_0} вытеснение данной жидкости из B_{ρ_0} начнется не ранее времени $t_0 > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.** К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный семидесятилетию акад. А. Ф. Иоффе.— М.: Изд-во АН СССР, 1950.

2. **Баренблатт Г. И.** О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // ПММ.— 1952.— Т. 15, вып. 1.
3. **Баренблатт Г. И., Вишик М. И.** О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа // ПММ.— 1956.— Т. 20, вып. 3.
4. **Овсянников Л. В.** Об одном газовом течении с прямой линией перехода // ПММ.— 1949.— Т. 13, вып. 5.
5. **Калашников А. С.** Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // УМН.— 1987.— Т. 42, вып. 2(254).
6. **Мартинсон Л. К.** Исследование математической модели процесса нелинейной теплопроводности в средах с объемным поглощением // Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах.— М.: Наука, 1986.
7. **Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.** Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений.— М.: Наука, 1987.
8. **Антонцев С. Н.** О характере возмущений, описываемых решениями многомерных вырождающихся параболических уравнений // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1979.— Вып. 40.
9. **Антонцев С. Н.** О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений // ДАН СССР.— 1981.— Т. 260, № 6.
10. **Антонцев С. Н.** Конечная скорость распространения возмущений в многомерных задачах двухфазной фильтрации // Зап. науч. семинара ЛОМИ АН СССР.— Л., 1980.— Т. 96.
11. **Антонцев С. Н.** Локализация решений вырождающихся уравнений механики сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1986.
12. **Diaz J. I., Veron L.** Compacité du support des solutions d'équations quasilinéaires elliptiques // C. r. acad. sci. Paris.— 1983.— T. 297.— P. 149.
13. **Diaz J. I., Veron L.** Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations // Trans. Amer. Math. Soc.— 1985.— V. 290, N 2.
14. **Bernis F.** Compactness of the support for some nonlinear elliptic problems of arbitrary order in dimension N // Comm. Partial Diff. Equat.— 1984.— V. 9, N 3.
15. **Bernis F.** Finite speed of propagation and asymptotic rates for some nonlinear higher order parabolic equation with absorption // Proc. Roy. Soc. Edinburgh.— 1986.— V. 104A.
16. **Палымский И. Б.** Некоторые качественные свойства решений уравнений нелинейной теплопроводности с поглощением // ЧММСС.— 1985.— Т. 16, № 1.
17. **Рыков Ю. Г.** О конечной скорости распространения возмущений для обобщенных решений квазилинейных вырождающихся параболических уравнений // Дифференциальные уравнения и их приложения.— М.: Изд-во МГУ, 1984.
18. **Рыков Ю. Г.** О поведении при возрастании времени обобщенных вырождающихся параболических уравнений с неизотропными нестепенными нелинейностями // Дифференциальные уравнения и их приложения.— М.: Изд-во МГУ, 1984.
19. **Антонцев С. Н.** О локализации решений некоторых вырождающихся уравнений механики сплошной среды // Проблемы математики и механики.— Новосибирск: Наука, 1983.
20. **Антонцев С. Н., Папин А. А.** Локализация решений уравнений вязкого газа с вязкостью, зависящей от плотности // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1988.— Вып. 86.
21. **Антонцев С. Н.** О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических уравнений // Уравнения в частных производных и задачи со свободной границей.— Киев: Наук. думка, 1983.
22. **Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.** Краевые задачи механики неоднородных жидкостей.— Новосибирск: Наука, 1983.
23. **Антонцев С. Н., Епихов Г. П., Кашеваров А. А.** Системное математическое моделирование процессов водообмена.— Новосибирск: Наука, 1986.
24. **Овсянников Л. В.** Введение в механику сплошных сред.— Новосибирск: НГУ, 1977.— Ч. II.
25. **Мирзаджанзаде А. Х., Огибалов П. М.** Нестационарные движения вязкопластических сред.— М.: Изд-во МГУ, 1970.
26. **Мосолов П. П., Мясников В. П.** Механика жесткопластических сред.— М.: Наука, 1981.
27. **Bohm M.** On a nonhomogeneous non newtonian fluid.— Providence, 1983.— (Rept/Lefschetz Center for Dynam. Systems. Division Appl. Math. Brown Univ.; 83—8).
28. **Лионс Ж. Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М.: Мир, 1972.
29. **Ладыженская О. А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.— М.: Наука, 1970.
30. **Антонцев С. Н.** Метастабильная локализация решений вырождающихся параболических уравнений общего вида // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1987.— Вып. 83.
31. **Diaz J. I.** Nonlinear partial differential equations and free boundaries. V. 1. Elliptic equations.— Putman, 1985.— (Putman Res. Not. Math.; 106).

Поступила 11/VIII 1988 г.

УДК 533.6.011

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛЯРНОГО ОТРАЖЕНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН

В. М. Тешуков

(Новосибирск)

Как известно, задача обтекания бесконечного клина установившимся сверхзвуковым потоком невязкого газа имеет неединственное решение [1]. Одно из решений определяет течение со слабым присоединенным скачком уплотнения, второе — с сильным скачком. В задаче о регулярном отражении косого скачка уплотнения от жесткой стенки возникает аналогичная неединственность (сильный и слабый отраженные скачки). В данной работе исследуется устойчивость течений со слабым и сильным отраженными скачками относительно малых нестационарных возмущений. Установлены корректность задачи о возмущениях течения со слабым отраженным скачком и некорректность задачи о возмущениях течения с сильным скачком. Этот результат определяет границы устойчивости регулярного отражения ударных волн. Вопросы устойчивости течений с сильными и слабыми скачками давно привлекают внимание исследователей [2]. Аналитические результаты ранее были получены только для модельных упрощенных постановок газодинамической задачи о возмущениях [3—5]. Утверждения об устойчивости течений со слабыми скачками и о неустойчивости течений с сильными высказывались в [5, 6] в связи с анализом результатов вычислительных экспериментов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим установившееся течение невязкого нетеплопроводного газа, возникающее при отражении косого скачка уплотнения от жесткой стенки. Пусть Γ_0 — падающий скачок уплотнения (рис. 1), Γ_1 — отраженный скачок уплотнения, $y = 0$ соответствует жесткой стенке. Плотности ρ_i, давления p_i, векторы скорости $\mathbf{u}_i = (u_i, v_i)$ $(i = 0, 1, 2, v_0 = v_2 = 0)$ в областях *0*, *1*, *2* постоянны, $p_2 > p_1 > p_0$. Эти величины связаны соотношениями Гюгонио на фронтах Γ_0, Γ_1.

По заданным параметрам падающей ударной волны (величинам с индексами 0, 1) основные величины в области *2* можно найти методом ударных поляр. Пусть q, ψ — полярные координаты в плоскости годографа: $u = q\cos\psi$, $v = q\sin\psi$. Из соотношений Гюгонио на ударной волне следует уравнение ударной поляры

$$\psi - \psi_i = \pm \arcsin\left[\frac{(p-p_i)\left(\tau_i - \tau - \tau_i^2 q_i^{-2}(p-p_i)\right)}{q_i^2 - (p-p_i)(\tau_i+\tau)}\right]^{1/2}. \tag{1.1}$$

Здесь $\tau = \rho^{-1}$; $\tau = \tau(p, \tau_i, p_i)$ в силу уравнения адиабаты Гюгонио; величины без индекса отвечают течению за скачком, с индексом — перед скачком. В [7] для уравнений состояния нормального газа получены условия, обеспечивающие единственность точки перехода через скорость звука на ударной поляре (точки, где достигается равенство $q^2 = q_i^2 - (p - p_i)(\tau_i + \tau) = c^2$, c — скорость звука) и наличие только двух точек пересечения ударной поляры с прямыми $\psi = \mathrm{const}$ $(|\psi - \psi_i| < \psi_m$, ψ_m — предельный угол поворота вектора скорости в косом скачке). Эти условия считаем выполненными. Конфигурация ударных поляр, соответствующая регулярному отражению косого скачка уплотнения от стенки, изображена на рис. 2. Течение в области *2* определяется неоднозначно: точка *2* отвечает течению за слабым отраженным скачком, *2** — за сильным $(p_2^* > p_2)$.

В [7] также показано, что в газах с уравнениями состояния $\varepsilon = \varepsilon(\tau, p)$, $p = g(\tau, S)$ (S — энтропия, ε — внутренняя энергия), удовлетворяющими условию

$$(p + \tau g_\tau)\varepsilon_p + p\tau \leqslant 0, \tag{1.2}$$

за сильным отраженным скачком течение всегда дозвуковое (политропный газ удовлетворяет (1.2)). Если же условие (1.2) нарушается, то течение за сильным скачком может быть и дозвуковым и сверхзвуковым. В данной работе рассматриваются нестационарные возмущения до-