Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Propriétés de compacité de l'opérateur de Green généralisé pour l'équation des milieux poreux

Jesus Ildefonso DIAZ et Ioan I. VRABIE

Résumé — On montre que l'opérateur $f \mapsto u$, avec u solution de l'équation de diffusion non linéaire $u_t - \Delta\varphi(u) = f$ sur $(0, T) \times \Omega$ associée aux conditions de bord parabolique $\varphi(u) = 0$ sur $(0, T) \times \partial\Omega$ et $u(0, .) = u_0(.)$ sur Ω ($u_0 \in L^1(\Omega)$) satisfait certaines propriétés de compacité sous l'hypothèse générale: φ est une fonction réelle continue, strictement croissante, nulle à l'origine.

Compactness properties of the generalized Green operator associated to the porous media equation

Abstract — *We show some compactness properties of the operator $f \mapsto u$, where u is the solution of the nonlinear diffusion equation $u_t - \Delta\varphi(u) = f$ on $(0, T) \times \Omega$ associated to the parabolic boundary conditions $\varphi(u) = 0$ on $(0, T) \times \partial\Omega$ and $u(0, .) = u_0(.)$ on Ω, u_0 a given function in $L^1(\Omega)$. Our results are carried out under the general assumption: φ is a real continuous strictly increasing function such that $\varphi(0) = 0$.*

1. INTRODUCTION. — Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné régulier, $T > 0$ et φ une fonction réelle continue non décroissante avec $\varphi(0) = 0$. Le but de cette Note est d'obtenir quelques propriétés de compacité de l'opérateur de Green généralisé $f \mapsto u$ où u est la solution de l'équation (dite des milieux poreux):

$$(1) \qquad \begin{cases} u_t - \Delta\varphi(u) = f & \text{sur} \quad (0, T) \times \Omega \\ \varphi(u) = 0 & \text{sur} \quad (0, T) \times \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{sur} \quad \Omega, \end{cases}$$

et u_0 est une fonction donnée dans $L^1(\Omega)$. Ce type de propriétés a plusieurs conséquences intéressantes et, en particulier, permet d'obtenir des résultats d'existence pour des systèmes couplés d'équations paraboliques faisant intervenir des opérateurs de la forme $-\Delta\varphi_i(.)$, $i = 1, \ldots, n$ [7]. Quelques propriétés de compacité de cet opérateur de Green ont été obtenues dans [2] et [8] en supposant la compacité du semi-groupe $S(t)$ de $L^1(\Omega)$ associé à l'opérateur $-\Delta\varphi(.)$. Si $\varphi(r) = |r|^{m-1} r$, il a été montré dans [2] (et après, étendu dans [1] et [4] à d'autres classes de fonctions φ plus générales) que $S(t)$ est compact si on a

$$(2) \qquad m > \max\{(N-2)/N, 0\}.$$

Dans [6] il a été précisé que, si $0 < m < N/(N-2)$, $S(t)$ n'est pas compact de $L^1(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$ bien que $S(t)$ soit compact de $L^p(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$ pour tout $1 < p \leqq +\infty$, et donc, dans le cas concret $\varphi(r) = |r|^{m-1} r$, le résultat mentionné ci-dessus est optimal.

Notre but est d'obtenir la compacité de l'opérateur de Green généralisé, de $L^1([0, T] \times \Omega)$ «faible» dans $C([0, T]; L^1(\Omega))$ «fort», pour une classe générale de fonctions φ pour lesquelles $S(t)$ n'est pas compact de $L^1(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$.

2. LES RÉSULTATS. — Soit M un ensemble mesurable borné dans $\mathbb{R}^p$ ($p \geqq 1$). On sait qu'un sous-ensemble F de $L^1(M)$ est relativement faiblement compact si et seulement si on a

$$(3) \qquad \lim_{K \to +\infty} f\chi_{\{|f| \leqq K\}} = f \quad \text{dans } L^1(M) \text{ uniformément pour } f \in F.$$

Note présentée par Haïm BREZIS.

0249-6291/89/03090221 $ 2.00

Soit $A : D(A) \subset L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ la réalisation de l'opérateur $-\Delta\varphi(.)$ dans $L^1(\Omega)$. Plus précisisément, on définit $D(A) = \{ u \in L^1(\Omega) : \varphi(u) \in W_0^{1,1}(\Omega), \Delta\varphi(u) \in L^1(\Omega) \}$ et $A u = -\Delta\varphi(u)$ si $u \in D(A)$.

On sait [3] que A est *m*-accrétif et donc le semi-groupe engendré $S(t)$ est une contraction. Notre résultat principal est le suivant :

THÉORÈME 1. — *Soient* $u_0 \in L^1(\Omega)$ *et* φ *telle que*

(H_φ) φ *est strictement croissante.*

Soit F *une partie faiblement compacte de* $L^1((0, T) \times \Omega$. *Alors l'ensemble* $\{ u_f ; f \in F \}$ *est relativement compact dans* $C([0, T] : L^1(\Omega))$ *où* u_f *représente la solution de* (1).

Une étape essentielle de la démonstration du théorème est le

THÉORÈME 2. — *Sous l'hypothèse* (H_φ), *le semi-groupe* $S(t)$ *associée à la réalisation de l'opérateur* $-\Delta\varphi(.)$ *dans* $L^1(\Omega)$ *applique toute partie faiblement compacte de* $L^1(\Omega)$ *dans une partie relativement compacte de* $L^1(\Omega)$. *En particulier,* $S(t)$ *est compact de* $L^p(\Omega)$ *dans* $L^q(\Omega)$ *si* $1 \leqq q < p \leqq +\infty$.

Une conséquence intéressante du théorème 2 est le

THÉORÈME 3. — *Soit* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, strictement croissante avec* $\varphi(0) = 0$. *Alors, pour tout* $u_0 \in L^1(\Omega)$ *et tout* $f \in L^1(\mathbb{R}_+ ; L^1(\Omega))$ *la solution* u *de* (1) *vérifie*

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0 \quad \textit{dans } L^1(\Omega) \tag{4}$$

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. — Soit B une partie relativement faiblement compacte de $L^1(\Omega)$. Puisque $S(t)$ est une contraction de $L^1(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$, en vertu de (3), il suffit de se ramener au cas où B est borné dans $L^\infty(\Omega)$.

On rappelle d'abord que

$$\| \nabla \varphi(S(t) u_0) \|_{L^2(\Omega)}^2 \leqq \frac{1}{t} \| j(u_0) \|_{L^1(\Omega)} \tag{5}$$

pour tout $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, où $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$j(r) = \int_0^r \varphi(\Theta) \, d\Theta, \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{R}.$$

A partir de (5) il est facile de voir que $\{ \varphi(S(t) u_0) ; u_0 \in B \}$ est borné dans $H_0^1(\Omega)$ et donc relativement compact dans $L^1(\Omega)$, si B est borné dans $L^\infty(\Omega)$. Puisque φ est strictement croissante et que $\| S(t) u_0 \|_{L^\infty(\Omega)} \leqq \| u_0 \|_{L^\infty(\Omega)}$ pour tout $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, la conclusion est une conséquence immédiate du théorème de Lebesgue.

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. — Puisque $(u_0, f) \mapsto u$, u solution de (1), est une contraction de $L^1(\Omega) \times L^1((0, T) \times \Omega)$ dans $C([0, T]; L^1(\Omega))$ en vertu de (3), il suffit de se ramener au cas $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et F borné dans $L^\infty((0, T) \times \Omega)$.

On sait (*cf.* par exemple [8], lemma 2.3.1) que

$$\| u_f(t+\lambda) - S(\lambda) u_f(t) \|_{L^1(\Omega)} \leqq \int_t^{t+\lambda} \| f(s) \|_{L^1(\Omega)} ds \leqq \lambda |\Omega| \| f \|_{L^\infty((0, T) \times \Omega)} \tag{6}$$

pour tout $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^\infty((0, T) \times \Omega)$, $t \geqq 0$ et $\lambda \geqq 0$. D'autre part (*cf.* [3])

$$\| u_f(t) \|_{L^\infty(\Omega)} \leqq \| u_0 \|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t \| f(s) \|_{L^\infty(\Omega)} ds \tag{7}$$

pour tout $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^1(0, T : L^\infty(\Omega))$ et $t \geqq 0$.

Mais (7) et le théorème 2 nous assurent que pour tout $t \in [0, T]$ et $\lambda > 0$, l'ensemble $\{S(\lambda) u_f(t); f \in F\}$ est relativement compact dans $L^1(\Omega)$. En faisant $\lambda \downarrow 0$ dans (6) on peut conclure aisément que pour tout $t \in (0, T]$ l'ensemble $\{u_f(t); f \in F\}$ est relativement compact dans $L^1(\Omega)$.

Maintenant, la conclusion est une conséquence du théorème de Ascoli-Arzela (*voir* aussi le théorème 2.3.1 de [8]).

5. Démonstration du théorème 3. — Comme dans la démonstration précédente, on peut se ramener toujours au cas $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $f \in L^1(\mathbb{R}+; L^\infty(\Omega))$. On considère d'abord le cas $f=0$. A partir de (5) on obtient successivement

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(S(t) u_0) = 0 \quad \text{dans } H_0^1(\Omega).$$

et

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(S(t) u_0) = 0 \quad \text{p. p. } t \text{ dans } \Omega.$$

Puisque φ est strictement croissante il en résulte que

$$\lim_{t \to +\infty} S(t) u_0 = 0 \quad \text{p. p. } t \text{ dans } \Omega$$

Enfin, (7) et le théorème de Lebesgue nous permettent de conclure que

$$\lim_{t \to +\infty} S(t) u_0 = 0 \quad \text{dans } L^p(\Omega) \text{ pour tout } p \in [1, +\infty). \tag{8}$$

On passe maintenant au cas $f \in L^1(\mathbb{R}+; L^\infty(\Omega))$, $f \neq 0$.

D'après (7) et le théorème 2 on sait que l'ensemble

$$K = \{S(1) u(t); t \geqq 1\}$$

est relativement compact dans $L^1(\Omega)$.

Mais

$$\| u(2t) \|_{L^1(\Omega)} \leqq \| u(2t) - S(t) u(t) \|_{L^1(\Omega)} + \| S(t-1) S(1) u(t) \|_{L^1(\Omega)}$$

pour tout $t \geqq 1$, et alors

$$\| u(2t) \|_{L^1(\Omega)} \leqq \int_t^{2t} \| f(s) \|_{L^1(\Omega)} ds + \sup_{v \in K} \| S(t-1) v \|_{L^1(\Omega)}$$

Puisque $f \in L^1(\mathbb{R}+; L^\infty(\Omega))$ et que K est relativement compact dans $L^1(\Omega)$, la démonstration de (4) s'ensuit par (8).

Les auteurs remercient Ph. Benilan pour ses suggestions qui ont permis de simplifier quelques démonstrations.

Note remise le 28 avril 1989, acceptée le 2 mai 1989.

Références bibliographiques

[1] M. Badii, J. I. Diaz et A. Tesei, *Rend. Sem. Math. Univ. Padova*, 78, 1987, p. 109-124.
[2] P. Baras, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 289, série A, 1979, p. 1113-1116.
[3] Ph. Benilan, *Thèse*, Orsay, 1972.
[4] Ph. Benilan et J. Berger, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 300, série I, 1985, p. 573-576.
[5] H. Brezis, *Analysis of nonlinear problems*, R.I.M.S., 1974, p. 2-27.
[6] H. Brezis et A. Friedman, *J. Math. Pures Appl.*, 62, 1983, p. 73-97.
[7] J. I. Diaz et I. I. Vrabie, *Existence for reaction diffusion systems* (à paraître).
[8] I. I. Vrabie, *Compactness methods for nonlinear evolutions*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 32, Longman Scientific & Technical, 1987.

J. I. D.: *Departamento de Matematica Aplicada, Univ. Complutense de Madrid*, 28040 *Madrid, Espagne;*

I. I. V.: *Département des Mathématiques, Institut polytechnique de Iasi*, 6600, *République Socialiste de Roumanie.*