PROBLEMAS ESTATICOS CON FRONTERA LIBRE EN MECANICA DE MEDIOS CONTINUOS

por

J. I. Díaz

(Publicado en la Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, de Madrid. Tomo LXXXIII, Cuaderno Primero)

MADRID - 1989

*Problemas estáticos con frontera libre en mecánica de medios continuos**

Por J. I. DÍAZ

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid

Abstract

In this note we present several results on the free boundary arising in the Plateau and Capillary problem when a membrane (attached to a low rigid plane $z = h$ in his boundary) is in contact with another rigid bottom plaze $z = 0$, or when a small volume V of a liquid is put on a big container (open to the air) and a portion of the bottom remain dry. In both cases the boundary F of this bottom part is «a priori» unknown and it is called as «free boundary». Our results concern the following properties on this free boundary: positive and negative criteria for the existence of F, space location estimates, isoperimetric type properties (Plateau's problem) and approximation results. A detailed version will appear elsewhere.

INTRODUCCION

En esta nota se considera la frontera libre originada en problemas de tipo Plateau así como en problemas de tipo capilaridad. El primero de ellos se puede ilustrar mediante el análisis de una membrana elástica en equilibrio sujeta en su borde a una altura h suficientemente pequeña en relación con el tamaño de su proyección Ω sobre el plano de la base. La experiencia muestra que tal membrana entra entonces en contacto con el plano rígido de la base $z = 0$ en una región que depende de la «forma» de Ω y, por tanto, desconocida «a priori». Un fenómeno similar ocurre al verter un volúmen V de un líquido sobre un contenedor abierto al aire. Si el volumen es pequeño en relación al «tamaño» de Ω (dependiendo de cuál sea el ángulo de contacto entre el líquido, el contenedor y el aire) se comprueba que una parte de la base, desconocida «a priori», permanece seca, concentrándose el líquido en torno a las paredes del contenedor. La frontera de ambas regiones es llamada «frontera libre». Si representamos por $u:\Omega \to [0, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a la superficie de la membrana o de separación del líquido y el aire, tal frontera libre puede definirse mediante la siguiente notación:

$$F = \partial N \cap \partial P \quad \text{siendo} \quad N = \{x \in \Omega : u(x) = 0\},\ P = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}.$$

Es bien conocido (Bernstein 1907, Leray 1939, Finn 1954, Serrin 1986) la imposibilidad de obtener soluciones clásicas para estos problemas si $\partial\Omega$ no tiene una curvatura media suficientemente grande. La formulación variacional evita esta dificultad aunque no arroja más que soluciones débiles:

* Presentada en la Sesión Científica del día 1 de febrero de 1989.

Pb de Plateau: $u = \min_{v \in K_1} J_1(v),\ K_1 = \{v \in BV(\Omega),\ v \geqslant 0 \ \text{ en } \ \Omega\}.$

$$J_1(v) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla v|^2}\, dx + \frac{k}{2}\int_\Omega v^2 dx + \lambda \int_\Omega v dx + \int_{\partial\Omega} |v - h|\, d\Gamma$$

Los términos k y λ son constantes no negativas que vienen determinadas por la tensión superficial, diferencia de presiones y densidades (por simplicidad supondremos $h > 0$). Resultados de existencia, unicidad y regularidad para esta Inecuación Variacional han sido dados por diversos autores (Hartman-Stampacchia 1966, Levy Stampacchia 1971, M. Miranda 1971, Brezis-Kinderlehrer 1974, Gerhardt 1974, etc.). En particular, es bien conocido que $u \in C^{1,1}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)\ \forall p < \infty$ y que $\|u\|_\infty \leqslant h$ (si $\lambda > 0$).

Pb de capilaridad: $u = \min_{v \in K_2} J_2(v),\ K_2 = \{v \in BV(\Omega);\ v \geqslant 0 \text{ en } \Omega,\ \int_\Omega v dx = V\},$

$$J_2(v) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla v|^2}\, dx + \frac{k}{2}\int_\Omega v^2 dx - \cos\gamma \int_{\partial\Omega} v d\Gamma.$$

De nuevo $k \geqslant 0$ viene determinada por la tensión superficial y la diferencia de densidades, γ representa el ángulo de contacto entre la superficie y las paredes laterales (se supone que el ángulo de contacto con el contenedor en la base es nulo). Introduciendo multiplicadores de Lagrange se comprueba (Gerhardt [7]) que una formulación equivalente es:

$$u = \min_{v \in K_1} J_2(v) + \lambda \int_\Omega v dx,$$

siendo λ una constante real dependiendo continua y decrecientemente de V. En el caso del campo gravitatorio (aquí supuesto) el argumento de Laplace (véase, p. ej.: Finn [6]), permite ver que $\lambda = (|\partial\Omega| \cos\gamma - kV) \cdot |P|^{-1}$, y así $\lambda > 0$ si $V < |\partial\Omega| \cos \gamma k^{-1}$. La existencia, unicidad y regularidad de u es bien conocida (véase, p. ej.: Finn [6]) y en particular, $u \in C^{1,1}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)\ \forall p < \infty$ con $\|u\|_\infty \leqslant h$, donde ahora h es una cierta constante positiva. En ambos casos se puede asegurar que (en el caso del Pb. de Plateau, hay que pedir, además, $|kh + \lambda| \leqslant (n - 1)\, H_{n-1}(x)$, $H_{n-1}(x) =$ $=$ curvatura de $\partial\Omega$):

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) + ku = -\lambda \text{ en } P \tag{1}$$

$$u = h \ \text{ ó } \ \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \cdot \vec{v} = \cos\gamma \ \text{ en } \ \partial\Omega \tag{2}$$

El estudio de F cobra especial interés cuando Ω no tiene simetria radial:

Teorema 1. *Supongamos $k \geqslant 0$ y $\lambda > 0$. Entonces se verifican las siguientes estimaciones:*

$$N \supset \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \geqslant R_N\} \tag{3}$$

$$P \subset \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \leqslant R_1\} \tag{4}$$

siendo $R_N = \text{máx}\,\{h, N/\lambda\}$, $R_1 = \min\,\{h^*, 1/(\lambda + kh^*)\}$ *con* $h^* = h$ *(Pb. de Plateau) y* $h^* = \min u|_{\partial\Omega}$ *(Pb. de capilaridad: en cuyo caso se supone* Ω *convexo).*

Corolario. *Sea* ρ_Ω *el radio de la mayor bola inscrita en* Ω. *Si* $\rho_\Omega \geqslant R_N$ *entonces* $F \neq \phi$, *pero si* $\rho_\Omega < R_1$ $F = \phi$.

Observaciones: 1. La estimación sobre N se obtiene por el método de superposiciones locales (|2|, |3|, |5|) comparando con semiesferas $\bar{u}(x : x_0) = R - (R^2 - |x - x_0|^2)^{1/2}$. Para la estimación de P compárese con $u(x : x_0) = R - (R^2 - [x_{0,1} - x_1]_+)^{1/2}$ supuesto que $x_0 \in \partial\Omega$ y $\vec{v} = \vec{x}_1$.

2. Ambas estimaciones pueden ser afinadas. Así, por ejemplo, para N se pueden utilizar las superficies de Delauny como supersoluciones locales y en el caso de P la hipótesis de Ω convexo puede evitarse.

Las propiedades extremales de las bolas al relacionar la medida interior con la del contorno (propiedad isoperimétrica) se manifiesta en este contexto mediante el siguiente resultado:

Teorema 2. *Sea* Ω^* *una bola centrada en el origen con* $|\Omega^*| = |\Omega|$. *Sean* u *y* U *las soluciones del problema de Plateau sobre* Ω *y* Ω^* *respectivamente. Entonces se tiene:* a) *si* $U > 0$ *en* Ω^* *necesariamente* $u > 0$ *en* Ω, b) $|N(u)| \leqslant |N(U)|$.

Observaciones: 3. La demostración utiliza la noción de «reordenamiento simétrico» de una función (Hardy-Littlewood-Polya 1929) y sigue las líneas del Teorema 2.20 de |3| trabajando ahora en el espacio de Orliz-Sobolev asociado (Talenti |8|). El caso del problema de capilaridad permanece abierto.

4. La parte a) del Teorema 2 permite mejorar la conclusión de no existencia de F del Corolario tomando $\rho_\Omega < R^*$, R^* radio de Ω^*.

Teorema 3. *Sean* $h_n \to h$ (resp. $V_n \to V$, $\gamma_n \to \gamma$). *Entonces, las soluciones respectivas* u_n *son tales que* $u_n \to u$ *al menos en* $L^\infty(\Omega)$ *y* $F_n \to F$ *en «medida»* ($|P_n \Delta P| \to 0$ *si* $n \to \infty$).

Observaciones: 5. La demostración pasa por la obtención de propiedades de no degeneración (Caffarelli [1], Díaz-Nochetto [4]).

6. La aproximación $F_n \to F$ tiene lugar en distancia de Hausdorff, supuesto que N es convexo.

BIBLIOGRAFIA

[1] CAFFARELLI, L. A.: «A remark on the Hausdorff measure of a free boundary and the convergence of coincidence sets», Boll. Unione Mat. Ital. *18* (1981), 1297-1299.

[2] DÍAZ, J. I.: «Técnica de superposiciones locales para problemas estacionarios no lineales», Memoria n.º XVI de la Real Academia de Ciencias, Madrid 1982.
[3] DÍAZ, J. I.: «Nonlinear partial differential equations and free boundaries Vol. I. Elliptic equations». Research Notes in Mathematics 106, Pitman (Londres), 1985.
[4] DÍAZ, J. I., y NOCHETTO, R.: «Stability of the free boundary for quasilinear equations» (aparecerá).
[5] DÍAZ, J. I., SAA, J. E., y THIEL, U.: «Sobre la ecuación de curvatura media prescrita y otras ecuaciones cuasilineales elípticas con soluciones anulándose localmente». Aparecerá en Revista de la Unión Matemática Argentina (volumen en honor de Julio Rey Pastor).
[6] FINN, R.: «Equilibrium Capillary Surfaces». Springer, 1986.
[7] GERHARDT, C.: «On the Capillarity Problem with Constant Volume». Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa *2* (1975), 303-320.
[8] TALENTI, G.: «Nonlinear elliptic equations, rearrangements of functions and Orlicz spaces». Ann. Mat. Pura Appl. *120* (1977), 159-184.