Revista de la
Unión Matemática Argentina
Vol. 35 1990.

SOBRE LA ECUACION DE CURVATURA MEDIA PRESCRITA Y OTRAS ECUACIONES CUASILINEALES ELIPTICAS CON SOLUCIONES ANULANDOSE LOCALMENTE

JESUS I. DIAZ , JOSE E. SAA Y URSULA THIEL

Dedicado a la memoria de Julio Rey Pastor con motivo del centenario de su nacimiento.

Resumen. En este trabajo se considera la ecuación cuasilineal elíptica

$$-\operatorname{div}(Q(|\nabla u|)\ \nabla u) + f(u) = g(x)$$

en un dominio Ω de $\mathbb{R}^N$ con condiciones de contorno de Dirichlet o bien de tipo capilaridad. Dicha formulación incluye el caso de ecuaciones semilineales $Q(r) = 1$; cuasilineales de tipo degenerado apareciendo en la teoría de fluídos no Newtonianos $Q(r) = r^{p-2}$, $p > 1$; y la ecuación no paramétrica de una superficie con curvatura media prescrita como aparece, por ejemplo, en fluidoestática separando la región ocupada por un líquido en reposo y el aire, $Q(r) = (1 + r^2)^{-1/2}$. Se dan condiciones necesarias y suficientes sobre Q , f para que la solución u se anule localmente en alguna subregión de Ω (zona seca de la vasija) supuesto que el "tamaño" de Ω sea suficientemente grande. Tal fenómeno es peculiar de perturbaciones f con derivada infinita en el orígen cuando Q es, por ejemplo, la dada en el primer o tercer ejemplo. Esto motiva el establecimiento de resultados de existencia, unicidad y regularidad de soluciones que generalizan los existentes en la literatura y en los que se imponía una condición de Lipschitz sobre f. En la obtención de la existencia juega un papel primordial las estimaciones "a priori" sobre ∇u en el espacio $L^\infty(\Omega)$.

Introducción

En este trabajo se estudia la ecuación cuasilineal elíptica

(1) $$-\operatorname{div}(Q(|\nabla u|)\nabla u) + f(u) = g(x) \text{ en } \Omega,$$

junto con condiciones de contorno de tipo Dirichlet

(2) $$u = h \quad \text{en } \partial\Omega$$

o bien de tipo Neumann o capilaridad

(3) $$Q(|\nabla u|)\nabla u \cdot \vec{\upsilon} = \beta \quad \text{en } \partial\Omega,$$

donde $\vec{\upsilon}$ es el vector unitario normal exterior a $\partial\Omega$.

Las hipótesis estructurales que admitiremos en lo que sigue son las siguientes:
Ω abierto, acotado y de frontera regular.
$Q: [0, \infty) \to [0, \infty)$ función con las propiedades

$$(4) \quad \begin{cases} \text{(i) } \forall K \text{ compacto de } \mathbb{R}^N \text{ existe una constante } c = c(K) > 0 \text{ tal que} \\ \qquad (Q(|\xi_1|)\xi_1 - Q(|\xi_2|)\xi_2)(\xi_1 - \xi_2) \geq C|\xi_1 - \xi_2|^m, \\ \qquad \forall \xi_1, \xi_2 \in K \text{ y algún } m > 1. \\ \text{(ii) La función } a: [0,\infty) \to [0,\infty) \text{ dada por } a(s) = Q(s)\,s \text{ verifica} \\ \qquad a \in C^0([0,\infty)) \cap C^1((0,\infty)),\ a(0) = 0,\ a'(s) > 0 \text{ si } s > 0. \end{cases}$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función tal que $f(0) = 0$, $f(r) > 0$ si $r > 0$, f no-decreciente.
g y $h: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ funciones de $L^\infty(\Omega)$ y $L^\infty(\partial\Omega)$ respectivamente, $\beta \in \mathbb{R}$,
$\beta \in (-a_\infty, a_\infty)$, $a_\infty = \lim_{r\to\infty} Q(r)\,r$,

(la hipótesis $f(0) = 0$ puede ser suprimida sustituyendo $f(x)$ por $\tilde{f}(x) = f(x) - f(0)$ y $g(x)$ por $\tilde{g}(x) = g(x) - f(0)$).

Problemas del tipo (1) (2) ó (1) (3) han atraído la atención de numerosos autores en los últimos años toda vez que la ecuación (1) modeliza importantes modelos concretos. Un tratamiento monográfico del caso de no linealidades potenciales $Q(r) = r^{p-2}$, $p > 1$, fue realizado en [Di], donde el lector podrá encontrar numerosas referencias así como alusiones a la aparición de (1) en el estudio de partículas catalíticas, en el caso semilineal $p = 2$, o en el tratamiento de fluídos no Newtonianos si $p \neq 2$. Uno de los objetivos de este trabajo es extender la teoría desarrollada en [Di] al caso de funciones Q no necesariamente homogéneas y más en especial al caso de superficies de curvatura media prescrita $Q(r) = (1 + r^2)^{-1/2}$. Una descripción de como la ecuación (1) modela tal tipo de superficies puede encontrarse, por ejemplo, en [Gi-Tr]. Físicamente, en procesos en los que aparece un medio continuo sometido a una tensión superficial, la ecuación (1) aparece con frecuencia dado que dicha tensión superficial viene expresada por la curvatura media de la superficie.Problemas del tipo (1) (2) ó (1) (3) con esa elección de Q han sido objeto de consideración de muy prestigiosos autores desde finales del siglo pasado, recibiendo dichos problemas los nombres de "problema de Plateau" y "problema de la capilaridad" respectivamente. El problema de Plateau aparece, por ejemplo, en el estudio de la deformación de una membrana elástica por la acción de un campo de presiones (en la ecuación representado por el término $g(x) - f(u(x))$ supuesto que la membrana tiene sus bordes fijados rígidamente (vease, p.e., [Ca-Ke]).

El problema de la capilaridad aparece en Hidrostática (vease, p.e., [Fi]): La función u representa entonces la altura de la superficie de un fluído reposando sobre una vasija cilíndrica de base Ω y el ángulo de contacto del fluído con las paredes verticales de la vasija viene dado por γ. En ese caso $\beta = \cos\gamma$. El término $f(u(x)) - g(x)$ representa un campo de presiones o fuerzas másicas. La zona de Ω en la que u es cero representa la región en que la membrana toca el suelo o bien la parte de la base de la vasija que queda seca. En ambos casos es intuitivamente claro que el dominio Ω debe ser adecuadamente grande en relación con la altura máxima de la membrana o el volúmen total del líquido que han de suponerse "pequeños". Tal balance será explicitado con precisión (vease por ejemplo el Teorema 7). Por último señalemos que el caso físicamente más frecuente corresponde al de un campo de fuerzas gravitatorio, lo que corresponde a perturbaciones del tipo $f(u) = \lambda\, u\, \chi_{\{u>0\}}$, donde $\chi_{\{u>0\}}$ vale cero sobre la zona en que $u=0$ y uno donde $u > 0$. Tal tipo de funciones f cae fuera de las hipótesis estructurales que suponemos en este trabajo, sin embargo nuestros resultados son de interés en la aproximación de esa formulación física. En efecto, los argumentos de existencia, regularidad, etc, de esos problemas se basan en la aproximación de esa f (multívoca en $u = 0$) por una sucesión de funciones f_n que usualmente se toman regulares (por ejemplo mediante argumentos de penalización, vease p.e. [Ki-St]). Nuestros resultados muestran que en ese proceso desaparecen las fronteras libres y así, para el estudio de la frontera libre (separando las zonas $u > 0$ de $u=0$) resulta de más utilidad aproximar f por funciones f_n no Lipschitcianas (por ejemplo $f_n(u) = \lambda u^{1/n}$ sign (u)). Para terminar estas alusiones al modelo de la hidrostática señalemos que nuestras soluciones serán de clase C^1 con lo que $\nabla u = 0$ en la frontera libre. Tal situación corresponde a cuando el fluído moja la base de la vasija y así el ángulo de contacto del líquido con la base es cero.

El contenido de este trabajo es el siguiente. En la Sección 2 abordamos la existencia, unicidad y acotación de soluciones de los problemas (1) (2) y (1) (3). La dificultad primordial radica en la supresión de toda condición de Lipschitcianidad sobre f y en la gran generalidad de la hipótesis (4) sobre Q que permite casos de operadores degenerados ($Q'(0) = 0$) o bien no uniformemente elípticos (como por ejemplo cuando $Q(r) = (1+r^2)^{-1/2}$). En la obtención de los resultados de la Sección 2 la estimación "a priori" en $L^\infty(\Omega)$ del ∇u juega un papel primordial. Dado que la derivación de esas estimaciones es bastante larga y de un interés en sí mismo hemos desarrollado ese tema en la Sección 3. El tipo de estimaciones será de la forma

$$(5) \qquad |\nabla u(\xi)| \leq \phi(u(x)), \quad x \in \Omega,$$

para una cierta función ϕ que solo depende de Q, f, el mínimo de u en $\overline{\Omega}$ y la curvatura media de $\partial\Omega$ (pero sin hacer alusión a la derivabilidad de f). Tal resultado es obtenido mediante la aplicación del principio del máximo a un adecuado funcional que involucra a $|\nabla u|$. Nuestra estimación resultará "óptima" en el sentido de que en el caso particular de que g sea una constante y $N = 1$ se tiene la igualdad en (5). Otras aplicaciones de la estimación (5) son dadas más tarde.

Por último en la Sección 4 nos centraremos en el estudio de la llamada "zona nula" de la solución $N(u) = \{x \in \overline{\Omega} : u(x) = 0\}$ y de su frontera, la frontera libre $F(u) = \partial(N(u)) \cap \partial(S(u))$ (donde S(u) es el soporte de la solución, es decir, $S(u) = \{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$). Daremos criterios de existencia y no existencia de la frontera libre, así como una estimación sobre su localización. La existencia de frontera libre viene dada esencialmente por el cumplimiento de dos hipótesis:

(a) un adecuado balance entre los términos de difusión y absorción.

(b) un adecuado balance entre los tamaños del dominio y de la solución.

Se obtendrá también un útil "principio fuerte del máximo", que, en esencia, nos dice que si no se verifica (a) entonces o bien $u = 0$ en Ω o bien $u > 0$ en Ω. Si lo que no se cumple es (b) también demostraremos la positividad de la solución, es decir, la no formación de la frontera libre. Estos resultados son así una extensión de los expuestos en [Di] para el caso de $Q(r) = r^{p-2}$.

Sección 1. Resultados de existencia, unicidad y acotación de soluciones

La ecuación en derivadas parciales (1) bajo la hipótesis estructural (4) es muy general abarcando como casos particulares ecuaciones de una naturaleza bien distinta. Así, por ejemplo, cuando $Q(r) = r^{p-2}$ la ecuación es *degenerada* cuando $p > 2$ pues pierde su carácter estrictamente elíptico para $r = 0$. Este hecho conduce a importantes patologías en sus soluciones que se manifiestan en torno a los subconjuntos de Ω donde $\nabla u = 0$. En particular es bien conocido (vease p.e. la exposición de [Di]) que en ese caso puede no existir solución clásica incluso cuando todos los datos del problema son todo lo regulares que se quiera. Otro tipo bien distinto de ecuaciones englobadas en la formulación (1) corresponde al caso de las *no uniformemente elípticas* como por ejemplo $Q(r) = r^{p-2}$ o $Q(r) = 1/(1+r^2)^{1/2}$. Ahora la dificultad viene ligada a que la constante de coercitividad C en (4) es tal que $C(K) \to 0$ cuando $|K| \to +\infty$ y de nuevo importantes patologías aparecen en las soluciones, en este caso en puntos en los que $|\nabla u|$ es grande (como p.e. en $\partial\Omega$). Sin duda de estos dos últimos ejemplos es el del operador de curvatura media prefijada el que ha sido más tratado en la literatura.

Contraejemplos para la existencia de soluciones clásicas bajo ciertas condiciones geométricas sobre $\partial\Omega$ pueden encontrarse en [Se] (problema de Plateau) y [Fi] (problema de capilaridad).

Con el fin de introducir una noción de solución débil para (1) observemos que la ecuación es "formalmente" la ecuación de Euler del funcional

$$J_0(v) = \int_\Omega B(|\nabla v|) + \int_\Omega (F(v) - g v) \tag{6}$$

siendo

$$B(s) = \int_0^s a(\tau)\, d\tau \ , \quad a(\tau) := Q(\tau)\,\tau \tag{7}$$

$$F(s) = \int_0^s f(\tau)\, d\tau . \tag{8}$$

Para dar sentido al funcional J_0 habrá que trabajar con funciones v en un espacio de energía $W(\Omega)$ adecuado con la propiedad

$$v \in W(\Omega) \Rightarrow \int_\Omega B(|\nabla v|) < \infty .$$

En el caso de $Q(r) = r^{p-2}$ resulta $W(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ mientras que el de curvatura media prefijada $Q(r) = (1+r^2)^{-1/2}$ permite elecciones del tipo $W(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$ o bien $W(\Omega) \subset BV(\Omega)$, siendo esta úlltima la más útil dado que J_0 no es semicontinuo inferiormente sobre $W^{1,1}(\Omega)$. Más en general, bajo la hipótesis de convexidad sobre B (entre otras condiciones) es posible trabajar con éxito sobre el espacio de Sobolev-Orlicz asociado $W^{1,B}(\Omega)$ (véase referencias en [Di] p. 245 y 246).

Dadas las patologías originadas sobre $\partial\Omega$ antes comentadas, una noción de solución débil para datos h en el contorno con $h \in L^1(\Omega)$ fue introducida en el caso del problema de Plateau por diferentes autores (véase p.e. [Ge**], [Gi] y sus referencias) minimizando el funcional

$$J_1(v) = J_0(v) + \int_{\partial\Omega} |v - h|\, d\mathcal{H}_{N-1}$$

sobre $W(\Omega)$. En el caso del problema con condiciones de contorno (3) el funcional a minimizar pasa a ser

$$J_2(v) = J_0(v) + \beta \int_{\partial\Omega} v\, d\mathcal{H}_{N-1} .$$

En lo que sigue denominaremos *soluciones variacionales* a las encontradas mediante la minimización de J_1 ó J_2. (En el caso de condiciones de Dirichlet y si por ejemplo $Q(r) = r^{p-2}$, $p > 1$, basta minimizar J_0 incluyendo la condición $u = h$ en $\partial\Omega$ en la propia definición de $W(\Omega)$).

La cuestión de la existencia de soluciones variacionales es bastante compleja debido a la gran generalidad de la formulación (1). Así, en el caso de $Q(r) = r^{p-2}$ $(p > 1)$ y condiciones de Dirichet la existencia viene garantizada con solo pedir que $\partial\Omega$ sea Lipschitz, $g \in W^{-1,p'}(\Omega)$, f no-decreciente y $h \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $F(h) \in L^1(\Omega)$, donde F es una primitiva de f (véase funciones f_n que usualmente se toman regulares (por ejemplo mediante argumentos de penalización, vease p.e. [Ki-St]). Nuestros resultados muestran que en ese proceso desaparecen las fronteras libres y así, para el estudio de la frontera libre (separando las zonas $u > 0$ de $u=0$) resulta de más utilidad aproximar f por funciones f_n no Lipschitcianas (por ejemplo $f_n(u) = \lambda u^{1/n}$ sign (u)). Para terminar estas alusiones al modelo de la hidrostática señalemos que nuestras soluciones serán de clase C^1 con lo que $\nabla u = 0$ en la frontera libre. Tal situación corresponde a cuando el fluído moja la base de la vasija y así el ángulo de contacto del líquido con la base es cero.

El contenido de este trabajo es el siguiente. En la Sección 2 abordamos la existencia, unicidad y acotación de soluciones de los problemas (1) (2) y (1) (3). La dificultad primordial radica en la supresión de toda condición de Lipschitcianidad sobre f y en la gran generalidad de la hipótesis (4) sobre Q que permite casos de operadores degenerados ($Q'(0) = 0$) o bien no uniformemente elípticos (como por ejemplo cuando $Q(r) = (1 + r^2)^{-1/2}$). En la obtención de los resultados de la Sección 2 la estimación "a priori" en $L^\infty(\Omega)$ del ∇u juega un papel primordial. Dado que la derivación de esas estimaciones es bastante larga y de un interés en sí mismo hemos desarrollado ese tema en la Sección 3. El tipo de estimaciones será de la forma

$$(5) \qquad |\nabla u(\xi)| \leq \phi(u(x)), \quad x \in \Omega,$$

para una cierta función ϕ que solo depende de Q, f, el mínimo de u en $\overline{\Omega}$ y la curvatura media de $\partial\Omega$ (pero sin hacer alusión a la derivabilidad de f). Tal resultado es obtenido mediante la aplicación del principio del máximo a un adecuado funcional que involucra a $|\nabla u|$. Nuestra estimación resultará "óptima" en el sentido de que en el caso particular de que g sea una constante y $N = 1$ se tiene la igualdad en (5). Otras aplicaciones de la estimación (5) son dadas más tarde.

Por último en la Sección 4 nos centraremos en el estudio de la llamada "zona nula" de la solución $N(u) = \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$ y de su frontera, la frontera libre $F(u) = \partial(N(u)) \cap \partial(S(u))$ (donde S(u) es el soporte de la solución, es decir, $S(u) = \{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$). Daremos criterios de existencia y no existencia de la frontera libre, así como una estimación sobre su localización. La existencia de frontera libre viene dada esencialmente por el cumplimiento de dos hipótesis:

(a) un adecuado balance entre los términos de difusión y absorción.

(b) un adecuado balance entre los tamaños del dominio y de la solución.

Se obtendrá también un útil "principio fuerte del máximo", que, en esencia, nos dice que si no se verifica (a) entonces o bien $u = 0$ en Ω o bien $u > 0$ en Ω. Si lo que no se cumple es (b) también demostraremos la positividad de la solución, es decir, la no formación de la frontera libre. Estos resultados son así una extensión de los expuestos en [Di] para el caso de $Q(r) = r^{p-2}$.

Sección 1 . Resultados de existencia, unicidad y acotación de soluciones

La ecuación en derivadas parciales (1) bajo la hipótesis estructural (4) es muy general abarcando como casos particulares ecuaciones de una naturaleza bien distinta. Así, por ejemplo, cuando $Q(r) = r^{p-2}$ la ecuación es *degenerada* cuando $p > 2$ pues pierde su carácter estrictamente elíptico para $r = 0$. Este hecho conduce a importantes patologías en sus soluciones que se manifiestan en torno a los subconjuntos de Ω donde $\nabla u = 0$. En particular es bien conocido (vease p.e. la exposición de [Di]) que en ese caso puede no existir solución clásica incluso cuando todos los datos del problema son todo lo regulares que se quiera. Otro tipo bien distinto de ecuaciones englobadas en la formulación (1) corresponde al caso de las *no uniformemente elípticas* como por ejemplo $Q(r) = r^{p-2}$ o $Q(r) = 1 / (1 + r^2)^{1/2}$. Ahora la dificultad viene ligada a que la constante de coercitividad C en (4) es tal que $C(K) \to 0$ cuando $|K| \to +\infty$ y de nuevo importantes patologías aparecen en las soluciones, en este caso en puntos

Supondremos también que Q *es estrictamente elíptico* $(a'(s) > 0\,,\ a(s) = Q(s)\,s)$ *en el caso en el que DQ no sea uniformemente coercitivo (e.d. si* $C(K) \to 0$ *cuando* $|K| \to +\infty$*). Por último si* $H_{N-1}(x)$ *es la curvatura media de* $\partial\Omega$*, supondremos también la condición*

$$(11) \qquad f(k) \leq N a\,(A^{-1}(A(+\infty)/N)\,H_{N-1}(x)\,,\ x \in \partial\Omega\,,$$

siendo

$$A(r) = \int_0^r a'(s)\,s\,ds\,,\ A(+\infty) = \lim_{r\to+\infty} A(r)$$

y donde

$$k = \max\,\{u(x) : x \in \partial\Omega\,\} \text{ en el caso de } (P_N)\,.$$

Entonces (P_D) *y* (P_N) *admiten al menos una solución débil en la clase* $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

Demostración del Teorema 1. En ambos problemas estableceremos varias etapas:

Primera etapa : Sustituyamos Q por $\tilde{Q}$ y f por f_n, donde

$$\tilde{Q}(t) = \begin{cases} Q(t) \text{ si } t \in [0\,,M]\,, \\ Q(M) + Q'(M)\,(t - M) \text{ si } t \in (M, \infty)\,, \end{cases}$$

con $M > 0$ a determinar con posterioridad, y f_n la aproximación Yosida de f (recuérdese que f es un grafo maximal monótono al ser continuo y no-decreciente), es decir,

$$(12) \qquad f_n(r) = \frac{J_n(r) - r}{1/n} = f(J_n(r))\,,$$

con $J_\lambda(r) = (I + (1/\lambda)\,f)^{-1}(r)$ (la λ-resolvente de f).
Así, transformamos los problemas (P_D) y (P_N) en (*)

$$(\tilde{P}_{D,n}) = \begin{cases} -\operatorname{div}(\tilde{Q}(|\nabla u_n|)\ \nabla u_n) + f_n(u_n) = g & \text{en } \Omega\,, \\ u_n = K & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

y

$$(\tilde{P}_{N,n}) = \begin{cases} -\operatorname{div}(\tilde{Q}(|\nabla u_n|)\ \nabla u_n) + f_n(u_n) = g & \text{en } \Omega\,, \\ \tilde{Q}(|\nabla u_n|)\ \nabla u_n\,.\,\vec{\upsilon} = \beta & \text{en } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

(*) En lo que sigue mantendremos el símbolo de g aunque en nuestro caso es $g \equiv 0$. Se pretende mostrar cómo se trataría el caso de $g \in L^\infty$ y ∇u_n acotado independientemente de n.

respectivamente, con la particularidad de que ahora $\tilde{Q}$ ya es globalmente coercitivo y f_n cumple las siguientes propiedades (véase, por ejemplo, [Br*]):

f_n es Lipschitciana de constante $1/n$,

f_n es maximal monótono (no decreciente),

$f_n(r) \uparrow f(r) \ \forall r \in \mathbb{R}$,

$|f_n(r)| \leq |f(r)|$.

Estas propiedades nos permiten asegurar la existencia de una única solución

$$u_n \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\Omega) \cap C^2\{x \in \Omega : |\nabla u| \neq 0\}.$$

de $(\tilde{P}_{D,n})$ y de $(\tilde{P}_{N,n})$ respectivamente; véase, por ejemplo, [Iv], [DBe], [To], [La-Ur].

Segunda etapa: Con el fin de pasar al límite en u_n cuando $n \to \infty$ necesitamos estimaciones previas de $\|u_n\|_{L^\infty}$ y $\|\nabla u_n\|_{L^\infty}$ independientes de n.

Si consideramos los problemas $(\tilde{P}_{D,n})$ basta comparar con una función constante C tal que $C \geq K$ y $f(C) > \|g\|_{L^\infty}$ (que existe ya que se verifica (11). Por el principio de comparación, obsérvese que $f_n(C) \to f(C)$, tenemos que

$$u_n(x) \leq C \ \forall x \in \Omega.$$

En forma análoga podemos acotar inferiormente la sucesión.

Si, por el contrario, estamos interesados en los problemas $(\tilde{P}_{N,n})$ comparamos con una función del tipo $v(x) = c_1 \phi(x) + c_2$, con c_1 o c_2 constantes a determinar y ϕ, por ejemplo, la primera autofunción del operador laplaciano con condiciones de contorno homogéneas de tipo Dirichlet. Por el principio fuerte del máximo ([Gi-Tr]) se sabe que existe una constante positiva m tal que $-M \leq \nabla\phi \cdot \vec{\upsilon} \leq -m$ en $\partial\Omega$. Elijamos c_1 tal que

$$\tilde{Q}(|\nabla v|)\, \nabla v \cdot \vec{\upsilon} \geq \beta, \tag{13}$$

y c_2 para que se verifique

$$-\operatorname{div}(\tilde{Q}(|\nabla v|)\, \nabla v) + f_n(v) \geq g, \tag{14}$$

con c_2 independiente de n, lo que es posible ya que $\phi \in C^2(\overline{\Omega})$ (por la regularidad de $\partial\Omega$ y, por ejemplo, el lema 14.16 de [Gi-Tr]), $f_n(r) \uparrow f(r) \ \forall r \in \mathbb{R}$, $g \in L^\infty(\Omega)$ y la hipótesis (11). Por el teorema de comparación para problemas coercitivos con condiciones de contorno de tipo Neumann (véanse las referencias antes citadas) de (13) y (14) obtenemos que

$$u_n(x) \leq v(x) \leq C.$$

Análogamente obtenemos una acotación inferior de la sucesión.

La estimación de $\|\nabla u_n\|_{L^\infty}$ independiente de n resultará inmediata cuando $g = 0$, a partir del Teorema 2 que mostraremos en la Sección 3 aplicado a f_n en vez de f y de la acotación de la sucesión $\|u_n\|_{L^\infty}$.

Tercera etapa: (paso al límite en la sucesión u_n).

De la etapa anterior y del hecho que Ω es acotado tenemos que u_n está acotada en $W^{1,p}(\Omega)$ $\forall\, p \in [1, \infty]$, de lo que deducimos que existe una subsucesión, que seguiremos llamando u_n, tal que:

(15) $u_n \rightharpoonup u$ en $W^{1,p}(\Omega)$ (débilmente) $\forall\, p \in (1,\infty)$ (por ser los espacios $W^{1,p}(\Omega)$ reflexivos si $p \in (1, \infty)$) y

(16) $u_n \rightharpoonup u$ en $L^p(\Omega)$ $\forall\, p \in [1, \infty]$ (por los teoremas de inclusión compacta).

Cuarta etapa: Para acabar, comprobemos que u es solución de (P_D) y (P_N) respectivamente. Como $\| u_n \|_{L^\infty}$ está acotado y $| f_n(r) | \leq | f(r) |$ sabemos que

$$\| f_n(u_n) \|_{L^\infty} \leq C ,$$

de donde se sigue

(17) $f_n(u) \rightharpoonup h$ en $L^p(\Omega)$ (débilmente) con $p \in (1, \infty)$.

Además, por ser f maximal monótono y por la definición (12) de f_n se verifica que

(18) $h = f(u)$,

(véase, por ejemplo, [Br*] pag. 27). Por otra parte, el operador

$$D : W^{1,p}(\Omega) \to (W^{1,p})'(\Omega)$$

$$u \to \operatorname{div}(\tilde{Q}(|\nabla u|)\, \nabla u).$$

es monótono y hemicontinuo, en consecuencia, de la convergencia

$$u_n \rightharpoonup u \text{ en } W^{1,p}(\Omega) \text{ (débilmente) con } p \in (1, \infty),$$

se deduce por el argumento de Minty

(19) $D(u_n) \rightharpoonup D(u)$ en $(W^{1,p})'(\Omega)$ (débilmente),

(véase, por ejemplo, el capítulo 2 de [Li*]).

Por lo tanto, si u_n son soluciones de $(\tilde{P}_{D,n})$ tenemos que $u_n \in K + W_0^{1,p}(\Omega)$ y

$$-\langle \operatorname{div}(\tilde{Q}(|\nabla u_n|)\nabla u_n), \xi \rangle + \int_\Omega f_n(u_n)\, \xi = \int_\Omega \xi, \quad \forall\, \xi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

donde el corchete $<.,.>$ representa la dualidad $W^{1,p} x (W^{1,p})'$. Tomando límites y utilizando las convergencias (19), (17) y (18) se sigue que

$$-\langle \operatorname{div}(\tilde{Q}(|\nabla u|)\nabla u), \xi \rangle + \int_\Omega f(u)\, \xi + \int_\Omega g\, \xi, \qquad \forall\, \xi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

Como $\tilde{Q}(|\nabla u|)\nabla u \in L^\infty(\Omega)$ y $K + W_0^{1,p}(\Omega)$ es un convexo y cerrado en la topología fuerte (y en consecuencia también en la débil) se tiene que

$$-<\operatorname{div}\ (\tilde{Q}(|\nabla u|)\nabla u)\,,\xi> = \int_\Omega \tilde{Q}(|\nabla u|)\nabla u\,\nabla\xi\,,$$

y así u es solución de $(\tilde{P}_D)$, es decir, del problema (P_D) con $\tilde{Q}$ en lugar de Q. Análogamente se obtiene que si u_n son soluciones de $(\tilde{P}_{N,n})$ entonces u es solución de $(\tilde{P}_N)$.

Asimismo, por estar ∇u_n acotada en L^∞ sabemos que

$$\nabla u_n \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla u \quad \text{en } L^\infty \text{ (débil *)}$$

y por la semicontinuidad de la norma

$$||\nabla u||_{L^\infty} \le C$$

(con C cualquier cota superior de $||\nabla u_n||_{L^\infty}$). Eligiendo la constante M de la definición de $\tilde{Q}$ tal que $M \ge C$ se sigue que

$$\tilde{Q}(|\nabla u|) = Q(|\nabla u|)\,,$$

y por tanto, que u es también solución de (P_D) y (P_N) respectivamente.

Pasemos ahora a tratar del problema de la unicidad y comparación de soluciones. El primer resultado explota el hecho de que en la clase de soluciones en $W^{1,\infty}(\Omega)$ la ecuación puede tratarse como una ecuación uniformemente coercitiva.

Proposición 1. *Supongamos que se verifican las hipótesis del Teorema 1, entonces existe a lo sumo una solución en* $W^{1,\infty}(\Omega)$ *de los problemas* (P_D) *y* (P_N).

Demostración. Es inmediata a partir de la coercitividad local de Q,

$$(Q(|\xi_1|)\xi_1 - Q(|\xi_2|\xi_2)(\xi_1-\xi_2) \ge C(K)\ |\xi_1-\xi_2|^m\,,$$

$$\forall\, \xi_1\,,\ \xi_2 \in K \text{ y } m>1,$$

y de la monotonía de f (véase este tipo de argumentos en [Di]).

Señalemos también que la comparación de soluciones es igualmente satisfecha en la clase de soluciones $W^{1,\infty}(\Omega)$. La existencia de tal clase de soluciones ha requerido hipótesis de tipo geométrico sobre $\partial\Omega$ que sin embargo no son necesarias para la existencia de soluciones variacionales. El siguiente resultado recoge diversas respuestas para esta clase de soluciones.

Proposiciones 1 *. a) *Sean* u *y* v *soluciones variacionales asociadas al funcional* J_1 *(respectivamente* J_2 *). Entonces a lo sumo* u *y* v *difieren en una costante. En particular si* f *es estrictamente creciente entonces* $u = v$.

b) *Sean* u_i, $i=1,2$, *soluciones variacionales del funcional*

$$J^i(v) = \int_\Omega B(|\nabla v|)\,dx + \int_\Omega (F(v) - g_i\,v)\,dx + \int_{\partial\Omega} j_i(x,v)\,dH_{N-1}$$

donde $j_i(x,\cdot)$ *es una función convexa. Supongamos que una de las soluciones* u_i *es única, que* $g_1 \le g_2$ *y que* $j_1(x,\cdot) - j_2(x,\cdot)$ *es no-decreciente en* $\partial\Omega$. *Entonces* $u_1 \le u_2$ *en* Ω. *En particular si* u_i *es la solución variacional correspondiente al problema de Plateau (resp. de capilaridad) asociado a* h_i *(resp.* β_i*) entonces* $h_1 \le h_2$ *(resp.* $\beta_1 \le \beta_2$*) implica que* $u_1 \le u_2$ *en* Ω.

c) *Sea* u *solución variacional única del funcional*

$$J(v) = \int_\Omega B(|\nabla v|)\,dx + \int_\Omega (F(v) - gv)\,dx + \int_{\partial\Omega} |v-h|\,dH_{N-1}$$

con $j(x,\cdot)$ *convexa. Sea* $\bar{u} \in W^{1,\infty}(U)$ *supersolución de la ecuación sobre* $U \subset \Omega$ *tal que*

$$u_{|\partial U - \partial\Omega} \leq \bar{u}_{|\partial U - \partial\Omega} \quad , \; h \leq u \text{ en } \partial U \cap \partial\Omega.$$

Entonces $u \leq \bar{u}$ *en* U.

Demostración. La primera parte se obtiene por argumentos clásicos de convexidad junto con el hecho de que

$$(Q(|\xi_1|)\xi_1 - Q(|\xi_2|)\xi_2) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \geq 0 \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$$

La conclusión b) es una (fácil) adaptación del Lema 3.3. de [Ge]. Consideremos por último el apartado c). La dificultad esencial radica en que al satisfacer u la ecuación y la condición de contorno meramente en sentido variacional no podemos afirmar que $u_{|\partial\Omega} = h$ en sentido de trazas. Sin embargo, si v es una función arbitraria definida sobre U y tal que

$$\int_U B(|\nabla v|)\,dx < +\infty$$

entonces $J(u) \leq J(\tilde{v})$, siendo

$$\tilde{v} = \begin{cases} v \text{ en } U \\ u \text{ en } \Omega - U. \end{cases}$$

En particular se tiene que

$$\int_U B(|\nabla u|) + \int_U F(u) + \int_{\partial U \cap \partial\Omega} |u-h|\,dH_{N-1} \leq \int_{UJ0} B(|\nabla v|) + \int_U F(v) +$$

$$+ \int_{\partial U \cap \partial\Omega} |v-h|\,dH_{N-1} + \int_{\partial U - \partial\Omega} |u-v|\,dH_{N-1}.$$

Tomando ahora $v = \min(u, \bar{u})$ y utilizando que $\bar{u}$ es una supersolución sobre U se llega a que de hecho $J(u) = J(v)$ y como u es un mínimo estricto, se concluye que $u \leq \bar{u}$ en U.

Observación. Una manera alternativa de mostrar la unicidad de soluciones variacionales se basa en el hecho de que dos posibles soluciones tengan igual traza sobre una parte de la frontera, para lo cual se hace necesario imponer hipótesis del tipo (11) ó (10) sobre una parte de $\partial\Omega$ (véase p.e. [Ge**] ó [Gi]).

Sección 2. Acotación óptima del Gradiente

Como ya hemos adelantado, nuestro objetivo es obtener una estimación del gradiente del tipo $|\nabla u(x)| \leq \phi(u(x))$, siendo u una solución del problema (1) con condiciones de contorno tanto del tipo (2), con $h(x) = k \geq 0$ en $\partial\Omega$ como (3). Probaremos esta acotación mediante un argumento de principio del máximo, denominado "el mejor" por algunos autores, siguiendo los métodos de L.E. Payne (véase la monografía de [Sp], o las referencias [Pa-Ph], [Pa-St], [Sp-St], etc).

Un primer resultado en este sentido es el siguiente.

Teorema 2 *Sea* u *solución de* (1) *con condiciones de contorno del tipo* (2) *ó (3), tal que* $u \in W^{2,\infty}(\{x \in \Omega : \nabla u(x) \neq 0\}) \cap C^1(\bar{\Omega})$. *Entonces, para cada* $x \in \bar{\Omega}$ *se tiene*

$$(20) \qquad A(|\nabla u(x)|) \leq F(u(x)) - \alpha(u(x) - m) \;,$$

donde

$$m = \text{mín}\,\{u(x) : x \in \bar{\Omega}\} \geq 0 \;,$$

$$A(r) = \int_0^r (Q(s)\,s)'\; s\; ds \;,$$

$$F(r) = \int_m^r f(s)\; ds \quad \text{y}$$

$$\alpha = \text{mín}\,\{0, \text{mín}\,\{(N-1)\,H(x)\;\; Q(|\nabla u(x)|)\,\nabla u(x)\,.\,\vec{\upsilon} \;:\; x \in \partial\Omega\}\}:$$

siendo H(x) *la curvatura media de* $\partial\Omega$.

Observación 1. La regularidad exigida a la solución no es restrictiva, dado que el operador a lo sumo degenera donde $\nabla u = 0$. Es bien conocido que en muchos casos importantes, entre ellos el operador de superficies mínimas y el laplaciano - p, las soluciones débiles tienen dicha regularidad (véase [DBe]).

Observación 2. Es fácil observar que la estimación (20) es óptima en el sentido de que de hecho es una igualdad para N = 1. En efecto, multiplicando la ecuación (1) por u' e integrando sobre (0, x) se obtiene

$$-\int_0^x (Q'(|u'|)\;|u'| + Q(|u'|))\,u'\,u'' + \int_0^x f(u)\,u' = 0 \,.$$

y por tanto

$$A(|u'(x)|) = F(u(x)) \,.$$

Demostración. Para obtener la estimación (20), basta probar que la función

$$(21) \qquad J(x) = A(|\nabla u(x)|) - F(u(x)) + \alpha\, u(x) \;\; \forall\; x \in \bar{\Omega} \;,$$

verifica

$$J(x) \leq \alpha\, m \;\; \forall\, x \in \bar{\Omega}.$$

Como J es continua en $\bar{\Omega}$, compacto, existe al menos un $p \in \bar{\Omega}$ tal que

$$(22) \qquad J(p) = \max\,\{J(x) : x \in \bar{\Omega}\},$$

luego es suficiente con observar que

(23) $J(p) \leq \alpha\, m$.

Emplearemos la notación $D_\varepsilon = \{ x \in \Omega : |\nabla u(x)| > \varepsilon \}$, para $\varepsilon > 0$.

Primera Etapa: Probemos que

(24) " *Existe un operador estrictamente elíptico* T *tal que* $\forall\, \varepsilon > 0$

$T(J) \in L^\infty(D_\varepsilon)$ y $T(J(x)) \geq 0 \ \forall\, x \in D_\varepsilon$ " .

Diferenciando J en sentido de distribuciones (como haremos en toda la demostración) se obtiene

(25) $$D_j T = (Q'(|\nabla u|)\, |\nabla u| + Q(|\nabla u|))\, D_l u\, D_{lj} u - f(u)\, D_j u + \alpha D_j u \quad \text{en } D_\varepsilon,$$

(26) $$D_{kl}\, J = (Q''(|\nabla u|) + 2\,\frac{Q'(|\nabla u|)}{|\nabla u|})\, D_j u D_{jk} u\, D_i u\, D_{il} u +$$

$$+ (Q'(|\nabla u|)\, |\nabla u| + Q(|\nabla u|))\, (D_{jl} u\, D_{jk} u + D_j u\, D_{jkl} u) -$$

$$- f'(u)\, D_k u\, D_l u - f(u)\, D_{kl} u + \alpha\, D_{kl} u \quad \text{en } D_\varepsilon$$

(27) $$\Delta J = (Q''(|\nabla u|) + 2\,\frac{Q'(|\nabla u|)}{|\nabla u|})\, D_j u D_{jk} u\, D_i u\, D_{ik} u +$$

$$+ (Q'(|\nabla u|)\, |\nabla u| + Q(|\nabla u|))\, ((D_{jk} u)^2 + D_j u\, \Delta(D_j u)) -$$

$$- f'(u)\, |\nabla u|^2 - f(u)\, \Delta u + \alpha\, \Delta u \quad \text{en } D_\varepsilon .$$

En (25) , (26) , (27) y en el resto de la demostración usaremos el convenio de sumación de Einstein . Diferenciando ahora la ecuación (1) y tras algunos cálculos se sigue

(28) $$D_j u\, \Delta(D_j u) = (\frac{Q'^2(|\nabla u|)}{Q'^2(|\nabla u|)\,|\nabla u|^2} + \frac{Q''(|\nabla u|)}{Q(|\nabla u|)\,|\nabla u|^2} +$$

$$+ \frac{Q'(|\nabla u|)}{Q(|\nabla u|)\,|\nabla u|^3})\, (D_i u\, D_{il} u\, D_l u)^2 -$$

$$- \frac{2\, Q'(|\nabla u|)}{Q(|\nabla u|)\,|\nabla u|}\, (D_{ij} u\, D_j u\, D_{il} u\, D_l u) -$$

$$- \frac{Q'(|\nabla u|)}{Q(|\nabla u|)\,|\nabla u|}\, (D_i u\, D_j u\, D_l u\, D_{ijl} u) -$$

$$- \frac{Q'(|\nabla u|)}{Q^2(|\nabla u|)\,|\nabla u|}\, f(u)\, (D_j u\, D_i u\, D_{ij} u) +$$

$$+ \frac{f'(u)}{Q(|\nabla u|)}\, |\nabla u|^2 \cdot$$

Si definimos el operador G, mediante su actuación sobre una función ψ, como

$$G(\psi) = \Delta\psi + \frac{Q'(|\nabla u|)}{Q(|\nabla u|)\,|\nabla u|} D_k u\, D_l u\, D_{kl}\, \psi \quad \text{en } D_\varepsilon .$$

podemos obtener, utilizando (26), (27) y (28) y tras varios cálculos,

$$G(J) = A_1(D_j\, u\, D_{jk} u\, D_{ki} u\, D_i\, u) + A_2\,(D_{jk}\, u)^2 + A_3\,(D_i\, u\, D_{il}\, u\, D_l\, u)^2 + \\ + A_4(D_i\, u\, D_{ij}\, u\, D_j\, u) + \frac{f(u)}{Q(|\nabla u|)} (\alpha - f(u)) \quad \text{en } D_\varepsilon , \tag{29}$$

donde

$$A_1 = Q''(|\nabla u|) - \frac{Q'^2(|\nabla u|)}{Q(|\nabla u|)} + \frac{Q'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} ,$$

$$A_2 = Q'(|\nabla u|)\,|\nabla u| + Q(|\nabla u|) ,$$

$$A_3 = \frac{Q'^3(|\nabla u|)}{Q^2(|\nabla u|)\,|\nabla u|} + 4\,\frac{Q'^2(|\nabla u|)}{Q(|\nabla u|)\,|\nabla u|^2} - \\ - \frac{Q''(|\nabla u|)}{|\nabla u|^2} + \frac{Q'(|\nabla u|)}{|\nabla u|^3} .$$

$$A_4 = -f(u)\left(\frac{Q'^2(|\nabla u|)}{Q^2(|\nabla u|)} + \frac{Q'(|\nabla u|)}{Q(|\nabla u|)\,|\nabla u|} \right).$$

Se tiene, claramente, que $G(J) \in L^\infty(D_\varepsilon)$. Consideremos ahora el operador T definido por

$$T(\psi) = G(\psi) - W_k(\psi)\, D_k\, \psi \quad \text{en } D_\varepsilon ,$$

con

$$W_k(\psi) = A_4 \frac{D_k u}{Q'(|\nabla u|)\,|\nabla u| + Q(|\nabla u|)} + \\ + A_3 \frac{|\nabla u|^2\,(D_k\,\psi + 2D_k u\,(f(u)-\alpha))}{(Q'(|\nabla u|)\,|\nabla u| + Q(|\nabla u|))^2} + \\ + \left(A_1 + \frac{A_2}{|\nabla u|^2}\right) \frac{(D_k\,\psi + 2D_k u\,(f(u)-\alpha))}{(Q'(|\nabla u|)\,|\nabla u| + Q(|\nabla u|))^2} .$$

Como $D_k J \in L^\infty(D_\varepsilon)$, $W_k(J) \in L^\infty(D_\varepsilon)$ y $G(J) \in L^\infty(D_\varepsilon)$ entonces $T(J) \in L^\infty(D_\varepsilon)$.
Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y tras varios cálculos más obtenemos que

$$T(J(x)) \geq 0 \quad \forall\, x \in D_\varepsilon .$$

Para ver que T es un operador estrictamente elíptico basta tener en cuenta que de $(Q(r)\ r)' > 0$ se obtiene que $-(Q'(r))\ /\ (r\,Q(r)) < (1/r^2)$.

Segunda etapa: Definiendo $D = \bigcup_{\varepsilon>0} D_\varepsilon$, probaremos que

(30) "*Si* p, *definido por* (22), *es tal que* $p \in \Omega$ con $|\nabla u(p)| \neq 0$,

entonces $J(x) = J(p)\ \forall\ x \in \bar{D}$".

Sea $0 < \varepsilon < |\nabla u(p)|$, por la primera etapa sabemos que T es un operador estrictamente elíptico tal que $T(J) \in L^\infty(D_\varepsilon)$ y $T(J(x))\ 0 \geq\ \forall\ x \in D_\varepsilon$. Usando el principio fuerte del máximo de Hopf podemos concluir que $J(x) = J(p)\ \forall\ x \in \bar{D}_\varepsilon$.

Tomando ε todo lo próximo a 0 como queramos y por continuidad de J obtenemos que $J(x) = J(p)\ \forall\ x \in \bar{D}$.

Tercera etapa: Probemos que:

(31) " *Si estamos en el caso de condiciones de contorno de Dirichlet y* $p \in \partial\Omega$ *entonces, o bien* $J(x) = J(p)\ \forall\ x \in \bar{D}$, *o bien* $\nabla u(x) = 0\ \ \forall\ x \in \partial\Omega$. *Si las condiciones de contorno son de tipo Neumann entonces* $p \notin \partial\Omega$ ".

Supongamos, en primer lugar, que estamos en el caso de condiciones de contorno de Dirichet, es decir, que se verifica (2). Como u es constante en $\partial\Omega$, la ecuación (1) evaluada en $\partial\Omega$ queda de la forma (D_η = derivada respecto a la normal)

(32) $$Q(|\nabla u|)\,(D_{\eta\eta} u + (N-1) H D_\eta u) + Q'(|\nabla u|)\,|\nabla u|\ D_{\eta\eta} u = f(u) \ \text{ en } \partial\Omega .$$

Derivando por otra parte la función J en la dirección de las coordenadas normales a la curva $\partial\Omega$, es decir, en la dirección de η, y usando que u es constante en $M\partial\Omega$, obtenemos

(33) $$D_\eta J = (Q'(|\nabla u|)\,|\nabla u| + Q(|\nabla u|))\ D_\eta u\, D_{\eta\eta} u - f(u) D_\eta u + \alpha D_\eta u$$

$$\text{en } \partial\Omega.$$

Despejando $D_{\eta\eta} u$ en (32) y sustituyendo en (33) nos queda

$$D_\eta J = D_\eta u\,(\alpha - (N-1) H\, Q(|\nabla u|)\ D_\eta u) \quad \text{en } \partial\Omega .$$

Al ser u solución de (1), (2) verifica $u \leq k$ y por lo tanto $D_\eta u \geq 0$, lo que unido a la elección de α nos permite concluir

(34) $$D_\eta J \leq 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

Si p, dado por (22), es tal que $|\nabla u(p)| \neq 0$ podemos usar el principio fuerte del máximo de Hopf como en la etapa anterior y concluir que o bien $J(x) = J(p)\ \forall x \in \bar{D}$ o bien $D_\eta J(p) > 0$. Como la última posibilidad contradice (34), se sigue que $J(x) = J(p)\ \forall x \in \bar{D}$.

Si por el contrario $\nabla u(p) = 0$, de $J(p) = \max\{J(x) : x \in \bar{\Omega}\}$ y $u(x) = k\ \forall x \in \partial\Omega$ se deduce $\nabla u(x) = 0\ \forall\ x \in \partial\Omega$.

Supongamos, ahora, que estamos en el caso de condiciones de contorno de Neumann, es decir, que se verifica (3). Para no complicar excesivamente los cálculos vamos a restringirnos al caso bidimensional. Para abordar el caso general, se procederá de forma totalmente análoga. Consideremos

$x(s) = (x_1(s), x_2(s))$ la parametrización de la curva $\partial\Omega$ respecto al arco

$t(s) = \frac{dx}{ds}(s) = (x'_1(s), x'_2(s))$ la tangente a la curva $\partial\Omega$, y

$\eta(s) = (\eta_1(s), \eta_2(s)) = (-x'_2(s), x'_1(s))$ la normal exterior a la curva $\partial\Omega$;

entonces

$$|t(s)| = 1$$

(35) $$\frac{dt}{ds}(s) = -H(s)\,\eta(s), \text{ es decir, } x''_1(s) = -H(s)\,\eta_1(s) \text{ y } x''_2(s) = -H(s)\,\eta_2(s)$$

Siguiendo la notación empleada anteriormente $D_s f = \frac{\partial}{\partial s} f(x_1(s), x_2(s)) = \nabla f(x) \cdot t(s)$.

Como en esta etapa necesitaremos relacionar con frecuencia $D_i u$ con $D_s u$ y $D_\eta u$, exponemos las siguientes fórmulas (que se obtienen tras unos sencillos cálculos)

(36) $$\begin{pmatrix} D_s u \\ D_\eta u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 \\ -x'_2 & x'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 u \\ D_2 u \end{pmatrix} ,$$

(37) $$D_{\eta\eta} u = D_{11} u\, x'^2_2 - 2 D_{12} u\, x'_1\, x'_2 + D_{22} u\, x'^2_1 ,$$

(38) $$D_{ss} u = D_{11} u + D_{22} u - D_{\eta\eta} u - H D_\eta u \quad \text{y}$$

(39) $$D_{\eta s} u = (D_{22} u - D_{11} u)\, x'_1\, x'_2 + D_{12} u\,(x'^2_1 - x'^2_2) + H D_s u .$$

Como $D_\eta u \neq 0$ en $\partial\Omega$ se sigue $\nabla u \neq 0$ en $\partial\Omega$ y entonces podemos aplicar el principio fuerte del máximo de Hopf para obtener que en el punto p en el que J alcanza el máximo se verifica.

(40) $$D_\eta J(p) > 0 \;,\; D_s J(p) = 0 \;\text{ y }\; D_{ss} J(p) \leq 0 .$$

Derivando J respecto del arco, siempre en sentido de distribuciones, obtenemos

$$D_s J = (Q'(|\nabla u|)\, |\nabla u| + Q(|\nabla u|))\, (D_s u\, D_{ss} u + D_\eta u\, D_{\eta\eta} u) -$$

$$- f(u)\, D_s u + \alpha D_s u = 0 \quad \text{en} \quad p .$$

Derivando la condición de frontera (3), se sigue

$$\frac{Q'(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\, (D_s u + D_{ss} u + D_\eta u\, D_{\eta s} u)\, D_\eta u + Q(|\nabla u|)\, D_s u = 0 \quad \text{en} \quad p$$

y, despejando,

(41) $$D_{\eta s} u = - \frac{Q'(|\nabla u|)\, D_s u\, D_\eta u\, D_{ss} u}{Q(|\nabla u|)\, |\nabla u| + (D_\eta u)^2\, Q'(|\nabla u|)} \quad \text{en} \quad p .$$

Sustituyendo el valor de $D_{\eta s}u$ en el valor de $D_s J$ obtenemos

$$(42)\quad D_s J = D_s u \left\{ \frac{D_{ss} Q(|\nabla u|)|\nabla u| \,(Q(|\nabla u|) + |\nabla u|\, Q'(|\nabla u|))}{Q(|\nabla u|)\,|\nabla u| + (D_\eta u)^2\, Q'(|\nabla u|)} - f(u) + \alpha \right\} = 0 \text{ en } p$$

De (42) extraemos dos posibilidades

$$(a)\quad D_{ss}u = \frac{(f(u) - \alpha)\,(Q(|\nabla u|)|\nabla u| + (D_\eta u)^2\, Q'(|\nabla u|))}{Q(|\nabla u|)\,|\nabla u|\,(Q(|\nabla u|) + |\nabla u|\, Q'(|\nabla u|))} \quad \text{en } p\ ,$$

ó

$$(b)\quad D_s u = 0 \quad \text{en } p\,.$$

Caso (a). La condición (41) puede ser escrita, ahora, en la forma

$$D_{\eta s}u = \frac{(\alpha - f(u)\, D_s u\, D_\eta u\, Q'(|\nabla u|)}{|\nabla u|\, Q(|\nabla u|)\,(Q(|\nabla u|) + |\nabla u|\, Q'(|\nabla u|))} \quad \text{en } p\,.$$

El valor de $D_{\eta\eta}u$ puede calcularse usando la ecuación diferencial (1) evaluada en p,

$$Q(|\nabla u|)\,(D_{\eta\eta}u + D_{ss}u + H\, D_\eta u) - f(u) + \frac{Q'(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\,(D_s u)^2 D_{ss}u + (D_\eta u)^2\, D_{\eta\eta}u\ +$$

$$+\ 2 D_\eta u\, D_s u\, D_{s\eta}u - 2\,(D_s u)^2 D_\eta u\, H + (D_s u)^2 D_\eta u\, H\,) = 0 \text{ en } p\,.$$

(ya que se tiene (36), (37), (38) y (39)), y se obtiene

$$(43)\quad D_{\eta\eta}u = \frac{f(u) - D_{ss}u\, Q(|\nabla u|) + (D_s u)^2 \dfrac{Q'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} - 2\dfrac{Q'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} D_s u\, D_\eta u\, D_{\eta s}u}{(Q(|\nabla u|) + (D_\eta u)^2 \dfrac{Q'(|\nabla u|)}{|\nabla u|})} +$$

$$+ \frac{-Q(|\nabla u|)\, H\, D_\eta u + (D_s u)^2\, D_\eta u\, H}{(Q(|\nabla u|) + (D_\eta u)^2 \dfrac{Q'(|\nabla u|)}{|\nabla u|})} \quad \text{en } p\,.$$

Insertando el valor de $D_{ss}u$ dado en (a) y los valores de $D_{\eta s}u(p)$ y $D_{\eta\eta}u(p)$ dados en las fórmulas anteriores en la igualdad

$$(44)\quad D_\eta J = (Q(|\nabla u|) + Q'(|\nabla u|)\,|\nabla u|)\,(D_\eta u\, D_{\eta\eta} u + D_{\eta s} u\, D_s u - H (D_s u)^2) -$$

$$- f(u)\, D_\eta u + \alpha\, D_\eta u \quad \text{en } p,$$

obtenemos, tras algunas manipulaciones,

$$D_\eta J = \frac{|\nabla u|(Q(|\nabla u|) + Q'(|\nabla u|)\,|\nabla u|)}{Q(|\nabla u|)\,(Q(|\nabla u|)\,|\nabla u| + (D_\eta u)^2\, Q'(|\nabla u|))}\Big(-f(u)\cos\gamma + 2\alpha\cos\gamma -$$

$$- H Q^2(|\nabla u|)\,|\nabla u|^2 \Big) \quad \text{en } p \ \text{(ya que se verifica (3))}.$$

Como por hipótesis $\alpha \le H\, Q(|\nabla u|)\, D_\eta u$ y $Q(|\nabla u|)\, D_\eta u = \cos\gamma$ se tiene que

$$2\alpha\cos\gamma - H Q^2(|\nabla u|)\,|\nabla u|^2 \le 0 \quad \text{en } p,$$

y por lo tanto $D_\eta J(p) \le 0$, lo que contradice (40).

Caso (b). Si $D_s u(p) = 0$, obtenemos de (41)

$$D_{\eta s} u(p) = 0$$

y derivando en (42)

$$D_{ss} J = D_{ss} u(D_{ss} u\, Q(|\nabla u|) + (\alpha - f(u)) \quad \text{en } p.$$

Como por (40) sabemos que $D_{ss} J(p) \le 0$ entonces ha de verificarse que

$$D_{ss} u(p) \ge 0 \ \text{ y } \ D_{ss} u(p) \le \frac{f(u) - \alpha}{Q(|\nabla u|)}$$

Usando $D_s u(p) = D_{\eta s} u(p) = 0$ obtenemos de (43) y (44) las expresiones

$$D_{\eta\eta} u = \frac{f(u) - D_{ss} u\; Q(|\nabla u|) - Q(|\nabla u|)\; H\, D_\eta u}{Q(|\nabla u|) + |\nabla u|\; Q'(|\nabla u|)} \quad \text{en } p$$

$$D_\eta u = (Q(|\nabla u|) + |\nabla u|\; Q'(|\nabla u|))\, D_\eta u\, D_{\eta\eta} u - f(u)\, D_\eta u \;\; \alpha\, D_\eta u \quad \text{en } p.$$

Por tanto

$$D_\eta J = - D_{ss} u \cos\gamma + D_\eta u\, (\alpha - D_\eta u\, H\, Q(|\nabla u|) \quad \text{en } p.$$

Como $D_{ss} u(p) \ge 0$, $D_\eta u(p) > 0$ y $\alpha \le H\, Q(|\nabla u|) D_\eta u$ entonces $D_\eta J(p) \le 0$, lo que contradice (40).

Por tanto, en el caso de condiciones de contorno de Neumann se tiene $p \notin \partial\Omega$, como anunciábamos en (31).

Conjeturamos, de las etapas 2 y 3, que

$$\nabla u(p) = 0$$

y por tanto $u(p) = m$ (ya que J alcanza el máximo en p), con lo que concluimos (23).
En efecto, si $\nabla u(p) \neq 0$ entonces usando (30) y (31) obtendríamos que $J(x) = J(p)$ $\forall x \in \bar{D}$. En el caso de que $\bar{D} = \bar{\Omega}$ tomando $p^* \in \Omega$ tal que $u(p^*) = m$, que verificará, por tanto $\nabla u(p^*) = 0$, llegaríamos a una contradicción con $J(p^*) = J(p)$. Si, por el contrario, $\bar{D} \subsetneq \bar{\Omega}$, consideraríamos un $p^* \in \partial\bar{D}$; como por continuidad $J(p^*) = J(p)$ y $\nabla u(p^*) = 0$, entonces $u(p^*) = m$ y por lo tanto $\nabla u(p) = 0$, con lo que volveríamos a llegar a una contradicción.

Observación 3. El Teorema (2) extiende resultados previos de [Pa-Ph] para el caso de ecuaciones cuasilineales fuertemente elípticas. Un avance preliminar del Teorema 2 para el caso de condiciones de Dirichlet fue presentado en [Di-Sa]. La estimación (20) es de gran utilidad si

$$(45) \qquad F(u(x)) - \alpha(u(x) - m \in [0, A(+\infty)] \text{ a.e. } x \in \Omega, \quad A(+\infty) = \lim_{t\to\infty} A(t)$$

como es el caso de cuando Q es uniformemente coercitivo (p.e. $Q(r) = r^{p-2}$ y $p \geq 2$). Sin embargo en el importante caso de $Q(r) = (1 + r^2)^{-1/2}$ no es difícil ver que $A(+\infty) = 1$ y así la condición (45) es bastante confusa por su carácter implícito. Un caso en que tal condición es satisfecha corresponde a cuando $H_{N-1} \geq 0$ y $F(k) \leq 1$.

Con el fin de exclarecer la condición (45) cuando $A(+\infty) < +\infty$ recordemos el siguiente resultado para operadores fuertemente elípticos (compárese con (4) (ii)).

Teorema 2 * ([Pa-Ph]). *Sean* f *y* Q *como en la introducción. Supongamos además que*

$$a'(s) > 0 \quad si \quad s \geq 0 \; siendo \; a(s) = Q(s)\,s$$

Sea u *una solución regular de la ecuación* (1). *Entonces la función*

$$J^*(x) = A(|\nabla u(x)|) - \frac{1}{N} F(u(x))$$

alcanza su máximo en $\partial\Omega$.

Observación 4. En el trabajo antes señalado se supone una hipótesis técnica sobre f que es satisfecha en nuestro caso, así como la derivabilidad de f que puede suprimirse mediante aproximación y paso al límite.

Como consecuencia de los teoremas 2 y 2* se obtiene.

Corolario 1. *Sean* Q *y* f *como en la introducción,* Q *estrictamente elíptica y* u *solución de* (1) *con* $u = K$ *en* $\partial\Omega$, K *constante* ≥ 0 *y con la regularidad del Teorema* 2. *Supongamos además que* $\partial\Omega$ *tiene curvatura media no negativa* $H_{N-1} \geq 0$ *tal que*

$$(46) \qquad f(k) \leq N a(A^{-1}(A(\infty)/N))\, H_{N-1}(x), \qquad x \in \partial\Omega.$$

Entonces $f(u(x)) \in [0, A(+\infty))$ $x \in \bar{\Omega}$ *y en particular*.

$$(46^*) \qquad |\nabla u(x)| \leq A^{-1}(F(u(x)) - F(u\ min)) \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

La estimación (46*) *es también válida para el caso de condiciones de contorno* (5) *donde ahora* $K = \max_{\partial\Omega} u$.

Demostración. Sean $q_0 = \max \{ |\nabla u(x)| : x \in \partial\Omega \}$ y $H_{min} = \min \{H_{N-1}(x) : x \in \partial\Omega)$. Por el Teorema 2* se tiene que

$$-\frac{1}{N} (F(u) - F(k) \leq A(q_0) - A(|\nabla u|)$$

En particular

$$-\frac{1}{N} (F(u_{min}) - F(k)) \leq A(q_0)$$

Evaluando $\partial J^*/\partial\eta$ y utilizando la ecuación (1) en $\partial\Omega$ se obtiene de manera similar a (33) y (32) (véase (2.44) de [Pa-Ph]) que

$$Q(q_0)\, q_0 \leq \frac{f(k)}{N\, H_{min}}$$

e.d.

$$q_0 \leq a^{-1} \left(\frac{|f(k)|}{N\, H_{min}} \right)$$

En consecuencia se tiene que

$$-\frac{1}{N} (F(u) - F(k)) \leq A(a^{-1} (\frac{f(k)}{N\, H_{min}})) - A(q) .$$

y por tanto

$$(46^{**}) \qquad -\frac{1}{N} (F(u_{min}) - F(k)) \leq A(a^{-1} (\frac{f(k)}{N\, H_{min}})) .$$

Utilizando ahora la demostración del Teorema 2 deducimos que la función $A(|\nabla u(x)|) - F(u(x))$ alcanza su máximo en un punto crítico de u (véase también el Corollary 1 de [Pa-Ph]). Entonces

$$A(|\nabla u|) - F(u) \leq A(0) - F(u_{min}) = -F(u_{min}) .$$

e.d.

$$(47^*) \qquad A(|\nabla u|) \leq F(u) - F(u_{min})$$

Dado que $u \leq k$ en Ω se tendrá en virtud de (46**), que

$$F(u) - F(u_{min}) \leq F(k) - F(u_{min}) \leq N\, A(a^{-1} (\frac{f(k)}{N\, H_{min}})) .$$

Finalmente, como $A(s) \leq A(+\infty)$ $\forall s \geq 0$ la condición $F(u) - F(u_{min})$ $A(+\infty)$ está asegurada por la hipótesis (46) con lo que se puede invertir A en (47*) lo que prueba el resultado. El tratamiento del caso de condiciones de contorno (3) es similar con la modificación señalada en el enunciado.

Observación. Tal y como se señala en [Pa-Ph], en el caso particular de $Q(r) = (1 + r^2)^{-1/2}$ y $f(r) = r$, la condición (46) es más débil que la (10) debida a Serrin, cuando $N \leq 3$. Respecto del caso de condiciones de contorno de tipo (3) señalemos que una estimación de $\| u \|_{L^\infty(\Omega)}$ ha sido ya dada en la demostración del Teorema 1 (ver segunda etapa) en el supuesto de $\partial\Omega$ regular. Estimaciones más finas y válidas para $\partial\Omega$ meramente Lipschitz pueden encontrarse en [Fi] y [Ge] para el caso de $Q(r) = (1 + r^2)^{-1/2}$.

Sección 3. Criterios de existencia y localización de la frontera libre.

Para el estudio de la frontera libre de soluciones de la ecuación (1) es muy útil comenzar estudiando el caso particular del problema de *Dirichet simétrico*, es decir, $\Omega = B(0; R)$, $g = 0$ y $h(x) = k > 0$. Usando la simetría de este caso reduciremos la ecuación en derivadas parciales a una ecuación ordinaria fácil de tratar.

Sea, por lo tanto, el problema

$$(P_R) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(Q(|\nabla u|)\nabla u) + f(u) = 0 & \text{en} \quad B(0;R), \\ u = k & \text{en} \quad \partial B(0;R) \end{cases}$$

Supongamos que se verifica la condición (11) o bien que f es estrictamente creciente. Por la unicidad de soluciones se tiene que la solución de (P_R) es radial, con lo que podemos escribir $u(x) = u(r)$ con $r = |x|$. la solución u de (P_R) debe verificar que

$$(47) \qquad L(u) = -\frac{1}{r^{N-1}} \cdot \frac{d}{dr}\left(r^{N-1} Q\left(\left|\frac{du}{dr}\right|\right)\frac{du}{dr}\right) + f(u) = 0 \quad \text{en } (0, R),$$

$$(48) \qquad u(R) = k, \quad u'(0) = 0.$$

La principal dificultad del estudio de (47) es debida a que si $N > 1$ la ecuación (47) es no autónoma, por lo que al igual que en [Di] parece conveniente comenzar estudiando el caso $N = 1$. Para ello vamos a definir varias funciones auxiliares. Comenzamos por la función

$$(49) \qquad A(r) = \int_0^r a'(s)\, s\, ds, \quad \forall r \geq 0,$$

recuérdese que $a(s) = Q(s)\, s$. Se observa que A está bien definida a pesar de que a' no exista en 0. Integrando por partes,

$$A(r) = a(r)\, r - \int_0^r a(s)\, ds,$$

lo que prueba que $A \in C^1(0,\infty) \cap C^0[0,\infty)$. Además ,se verifica que $A(0) = 0$, A es creciente, y si llamamos $A(\infty) = \lim_{r\to\infty} A(r)$ entonces Rango $A = [0, A, (\infty))$. Sean también

$$(50) \qquad F(r) = \int_0^r f(s)\, ds, \quad \forall r \geq 0,$$

es fácil ver que F es creciente, y $F(0) = 0$; y

$$(51) \qquad \psi(r) = \int_0^r \frac{ds}{A^{-1}(F(s))} \qquad \text{con } r \in [0, F^{-1}(A(\infty))),$$

entendiendo por $F^{-1}(A(\infty)) = \infty$ si $A(\infty) = \infty$, que verifica

$$\psi \in C^2(0, F^{-1}(A(\infty)) \cap C^1[0, F^{-1}(A(\infty))), \quad \psi'(r) > 0 \ \text{ y } \ \psi''(r) \neq 0.$$

Por último, definimos

$$\eta(r) = \psi^{-1}(r) \ , \tag{52}$$

obsérvese que $\eta \in C^2(0, \psi(F^{-1}(A(\infty)))) \cap C^1[0, \psi(F^{-1}(A(\infty))))$, $\eta(0) > 0$ y $\eta'(0) \neq 0$.

y η es creciente. De [Di] se sigue inmediatamente el resultado:

Lema 1. *Si se verifica que*

$$\psi(0^+) < \infty \quad \text{, es decir, que existe un } \varepsilon > 0 \text{ tal que} \tag{53}$$

$$\psi(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \frac{ds}{A^{-1}(F(s))} < \infty \ ; \ y$$

$$k \leq \min \{ F^{-1}(A(\infty)), \psi^{-1}(R) \} \tag{54}$$

entonces la solución de P_R *con* $N=1$ *viene dada por*

$$u(x) = \eta([|x| - R + \psi(k)]^+) = \begin{cases} 0 \ \text{si} \ |x| \leq R - \psi(k) \\ \eta(|x| - R + \psi(k)) \ \text{si} \ R - \psi(k) < |x| . \end{cases} \tag{55}$$

Por otra parte, si $R > \psi(k)$ *entonces* $u > 0$ *en* $[-R, R]$.

Observación 4 . En el problema unidimensional ya se observa la naturaleza de las hipótesis suficientes para la existencia de la frontera libre, a saber:

(a) un adecuado balance entre los términos de difusión y absorción, $\psi(0^+) < +\infty$ (que, por ejemplo, en el caso del problema homogeneo $a(s) = s^{p-1}$ y $f(s) = \lambda |s|^{q-1} s$ se traduce en la conocida hipótesis de $q < p - 1$) .

(b) un adecuado balance entre los tamaños del dominio y de la solución $\psi(k) \leq R$.

La hipótesis $k \leq F^{-1}(A(\infty))$ es técnica y no aparece en el caso del operador laplaciano-p al ser $A(\infty) = \infty$, pero si en otros operadores, como por ejemplo en el de superficies mínimas, donde $A(\infty) = 1$.

En el problema (P_R) , como en el caso unidimensional, la existencia de frontera libre está relacionada con la existencia de soluciones no triviales del problema de Cauchy.

$$(Pc) \quad \begin{cases} L(u) = -(a(u'))' - \dfrac{N-1}{r} a(u') + f(u) = 0 \ \text{en} \ (o, R) \\ u(0) = 0 \ , \ u'(0) = 0 \ , \end{cases}$$

donde $u' = du/dr$. Para poder utilizar argumentos análogos a los del caso unidiensional necesitamos modificar ligeramente la definición de la función ψ . Así, dado $\mu > 0$, introducimos la función $\psi_\mu : [0, \theta_\mu] \to [0, \infty)$ como

(56) $$\psi_\mu(r) = \int_0^r \frac{ds}{A^{-1}(\mu F(s))}\ , \quad \text{donde} \quad \theta\mu = F^{-1}(A(\infty)/\mu).$$

El resultado base del caso radial es:

Lema 2. *Sea* N ≥ 2 *y supongamos que se verifica* (53). *Definamos*

(57) $$\eta(\,.\,,\mu) : [0, \psi_\mu(\theta_\mu)) \to [0, \theta_\mu) \ \textit{tal que} \ \eta(r;\mu) = \psi_\mu^{-1}(r),$$

entonces se tiene

(i) *Si* $\mu \geq 1$ *entonces* $L(\eta(r;\mu)) < 0$ *para* $r > 0$

(ii) *Si* $0 < \mu < \frac{1}{N}$ *entonces* $L(\eta(r;\mu)) > 0$ *y* $L(\eta(r, \frac{1}{N})) \geq 0$ *para* $r > 0$

(iii) $\forall\, \tau \geq 0$ la función $\eta_\tau(r;\mu) = \eta([r-\tau]^+;\mu)$ *verifica que para* $r > \tau$

$$L(\eta_\tau(r;\mu)) = \begin{cases} <0 & \text{si} \quad \mu \geq 1 \\ >0 & \text{si} \quad 0 < \mu < 1/N \end{cases} \qquad \text{y para} \quad r \leq \tau\ L(\mu_\tau(r;\mu)) = 0.$$

Demostración. De la definición de $\eta(r;\mu)$ se sigue que

(58) $$r = \int_0^{\eta(r;\mu)} \frac{ds}{A^{-1}(\mu F(s))}\ , \quad \text{con} \ 0 \leq r < \psi_\mu(\theta_\mu).$$

Como $\eta(\,.\,,\mu) \in C^1[0,\infty) \cap C^2(0,\infty)$ podemos diferenciar en (59) y obtenemos

$$\eta'(r;\mu) = A^{-1}(\mu F(\eta(r;\mu))) \ \ \text{y}$$

$$A(\eta'(r;\mu)) = \mu F(\eta(r;\mu)).$$

Diferenciando de nuevo se verifica que

$$a'(\eta'(r;\mu))\,\eta'(r;\mu)\,\eta''(r;\mu) = \mu f(\eta(r;\mu))\,\eta'(r;\mu),$$

y como $\eta'(r;\mu) > 0$ si $r > 0$ nos queda

$$(a(\eta'(r;\mu)))' = \mu f(\eta(r;\mu)) \ \text{en}\ r > 0.$$

Por tanto

(59) $$L(\eta(r;\mu)) = (1-\mu)\ f(\eta(r;\mu)) - \frac{N-1}{1}\, a(\eta'(r;\mu)) \ \text{si}\ r > 0.$$

De (59) se sigue inmediatamente (i).

Para demostrar (ii) usemos la función auxiliar $\phi(r;\mu) = a(\eta'(r;\mu))$. Se tiene que $\phi(0;\mu) = 0$, $\phi(r;\mu) > 0$ si $r > 0$ y ϕ es convexa (ya que $\phi'(r;\mu) = (a(\eta'(r;\mu)))' = \mu f(\eta(r;\mu))$ es no decreciente) por lo que $\phi(r;\mu) \leq r\,\phi'(r;\mu)$ si $r > 0$ (se emplea el teorema del valor medio y el no-decreciente de la derivada).

Si $0 < \mu \leq 1/N$ tenemos que

$$L(\eta(r;\mu)) = (1-\mu)\ f(\eta(r;\mu)) - \frac{N-1}{r}\ \phi(r;\mu) \tag{60}$$

$$\geq (1-\mu)\ f(\eta(r;\mu)) - (N-1)\ \phi'(r;\mu)$$

$$= (1-N\mu)\ f(\eta(r;\mu))$$

y por tanto (ii).

Para acabar, sea $\tau > 0$ y $s = r - \tau$ con $r \geq \tau$, entonces

$$L(\eta([r-\tau]^+;\mu)) = -(a(\eta'(s)))' - \frac{N-1}{s+\tau}\ a(\eta'(s)) - f(\eta(s))$$

$$= (1-\mu)\ f(\eta(s)) - \frac{N-1}{s+\tau}\ a(\eta'(s))$$

Si $\mu \geq 1$ y $r > \tau$ es obvio que $L(\eta_\tau(r;\mu)) < 0$ y si $\mu < 1/N$ que $L(\eta_\tau(r;\mu)) > 0$ (ya que de $\phi(s) \leq s\phi'(s) \leq (s+\tau)\phi'(s)\ \forall \tau > 0$ obtenemos que $L(\eta_\tau(r;\mu)) = (1-\mu N)\ f(\eta(s))$).

Estamos ya en condiciones de demostrar que la existencia de frontera libre de la solución del problema de Dirichlet (1) (2) viene dada, como en el Lema 1, por una adecuada relación (balance) entre los términos de difusión y absorción así como entre los tamaños del dominio Ω y de la solución u. Admitiremos a partir de ahora, y sólo para simplificar las demostraciones, que f es impar (en caso contrario ver observación 6). Supondremos también que g y h son funciones generales y no 0 y cte respectivamente toda vez que los argumentos que siguen son independientes de los de la existencia de soluciones.

El resultado que sigue será válido para soluciones variacionales acotadas de (1) y por tanto también para soluciones en la clase $W^{1,\infty}(\Omega)$ como las obtenidas en el Teorema 1 tanto para (P_D) como para (P_N).

Teorema 3 . *Supongamos que se verifica* (53) . *Sea* u *solución variacional de* (1), (2) *(resp.* (3) *)* *y* $M > 0$ *tal que* $\|u\|_{L^\infty} \leq M$. *Si* $M \leq F^{-1}(N\,A(\infty))$ *entonces*

$$N(u) \supset \{ x \in N(g) \ :\ d_1(x) \geq \psi_{1/N}(M) \} ,$$

donde $d_1(x) = d(x, S(g))$.

Observación 5. La hipótesis (53) establece el balance entre la difusión y la absorción, mientras que el balance entre el tamaño del conjunto N(g) y la solución viene reseñado en la conclusión del teorema. Por otra parte, un exámen detallado de la demostración que sigue pone en evidencia que en el caso de condiciones de Dirichlet se puede mejorar la estimación de N(u) sustituyendo $d_1(x)$ por $d_1^*(x) = d(x, S(g) \cup S(h \mid \partial\Omega))$

Demostración. Sea $x_0 \in N(g)$ tal que $d_1(x_0) > \psi_{1/N}(M)$ y

$$R = d_1(x_0) - \varepsilon \quad \text{con} \quad \varepsilon = \{ d_1(x_0) - \psi_{1/N}(M) \} .$$

Definamos una supersolución $\bar{u}(x;x_0) \geq 0$ en $B_R(x_0)$, es decir, una función $\bar{u}$ que verifica

$$- \operatorname{div} (Q(|\nabla \bar{u}|)\ \nabla \bar{u}) + f(\bar{u}) \geq 0 \text{ en } B(x_0 ; R) \text{ y}$$

$$\bar{u} \geq M \qquad \text{en } \partial B(x_0; R) .$$

Por ejemplo, nos vale $\bar{u}(x ; x_0) = \eta(|x - x_0| ; 1/N)$ en virtud del Lema 1, ya que $R \geq \psi_{1/N}(M)$. Por el principio del máximo (Proposición 1*C) se tiene que $u(x) \leq \bar{u}(x ; x_0)$ en $B(x_0 ; R) \cap \Omega$.

Análogamente tomemos una subsolución $\underline{u}(x ; x_0) \leq 0$ en $B(x_0 ; R)$, por tanto $\underline{u}$ verifica

$$- \operatorname{div} (Q(|\nabla \underline{u}|)\ \nabla \underline{u}) + f(\underline{u}) \leq 0 \text{ en } B(x_0 ; R) \text{ y}$$

$$\underline{u} \leq -M \text{ en } \partial B(x_0; R) .$$

Podemos tomar $\underline{u}(x ; x_0) = -\eta(|x - x_0| ; 1/N)$, y argumentando igual que con la supersolución obtenemos

$$-\eta(|x - x_0| ; 1/N) \leq u(x) \leq \eta(|x - x_0| ; 1/N) \text{ en } B(x_0 ; R) \cap \Omega .$$

Como $u \in C(\Omega)$ entonces $u(x_0) = 0$ y $x_0 \in N(u)$, como queríamos demostrar.

Observación 6 . Se puede omitir la hipótesis de f impar. La única diferencia estriba en que hay que construir la subsolución $\underline{u}(x ; x_0)$ de distinta forma. Para proceder sin esta hipótesis hay que extender ψ_μ a todo R, de forma natural como,

$$\psi_\mu(\tau) = \int_0^\tau \frac{ds}{A^{-1}(\mu F(s))} = -\int_\tau^0 \frac{ds}{A^{-1}(\mu F(s))} \qquad \text{si } \tau < 0 .$$

Evidentemente, ha de verificarse que $\mu F([\tau , 0]) \subset \operatorname{Rang}(A)$ y es fácil comprobar que $\psi_\mu(\tau) < 0$ si $\tau < 0$. Suponiendo en lugar de (53) que

$$\max \left\{ \int_{0^+} \frac{ds}{A^{-1}(\mu F(s))} , \int_{0^-} \frac{ds}{A^{-1}(\mu F(s))} \right\} < \infty ,$$

entonces ψ_μ está bien definida y podemos definir $\eta(r ; \mu)$ como $\psi_\mu^{-1}(r)$. Definiendo, entonces $\underline{u}(x ; x_0) = \eta(-|x - x_0| ; 1/N)$ obtenemos la subsolución que marcha bien cuando la f no es impar.

El método de las sub y super soluciones locales también sirve para estudiar como se anula la función en puntos de la frontera del soporte de g y $h / \partial\Omega$. Veremos que para que la solución se anule en estos puntos son necesarias hipótesis adicionales sobre g o h .

Teorema 4. *Supongamos que se verifica* (53) *y que si* $x_0 \in F(g)$ *entonces existen* $R > 0$, $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ *tal que*

(61) $$L(-\eta(|x - x_0| ; \mu_1)) \leq g(x) \leq L(\eta(|x - x_0| ; \mu_2))$$

en c.t. $x \in \Omega \cap B_R(x_0)$.

Admitamos también que se cumple o bien que

(62) $$\partial(\Omega \cap B_R(x_0)) \subseteq N(h / \partial\Omega) , \quad \textit{o bien que}$$

(63) $$d(x_0 , \partial S(h / \partial\Omega)) \geq R \ \ y \ \ \eta(R ; \mu_i) \geq \| u \|_{L^\infty} \quad (i = 1 , 2)$$

Entonces se tiene que toda solución u *de* (1) *y* (2) *verifica*

$$(64) \qquad -\eta(|x-x_0|;\mu_1) \leq u(x) \leq \eta(|x-x_0|;\mu_2) \text{ en } \bar{\Omega}\cap B_R(x_0).$$

En particular $u(x_0)=0$.

Demostración . Definamos $\bar{u}(x;x_0) = \eta(|x-x_0|;\mu_2)$, por (61) sabemos que $L\bar{u}\geq g$ en $\tilde{\Omega}=B_R(x_0)\cap\Omega$ y como $u\leq\bar{u}$ en $\partial\tilde{\Omega}$ (ya que si se verifica (62) $u=0$ en $\partial\tilde{\Omega}$ y si lo que se verifica es (63), como $R\leq d(x_0,\partial S(h/\partial\Omega))$ y $\eta(R,\mu_2)\geq||u||_{L^\infty}$, $u=0$ en $\partial\tilde{\Omega}\cap\partial\Omega$ y $u\leq||u||_{L^\infty}\leq\eta(R;\mu_2)=\bar{u}$ en $\partial\tilde{\Omega}-\partial\Omega$), por el principio del máximo podemos concluir que $u(x)\leq\bar{u}(x;x_0)$ en $\tilde{\Omega}$. Análogamente si $\underline{u}(x;x_0)=-\eta(|x-x_0|;\mu_1)$ se tiene la desigualdad $\underline{u}(x;x_0)\leq u(x)$ en $\tilde{\Omega}$.

Un caso particular en donde con hipótesis adecuadas se obtiene la *no difusión del soporte*, e.d., que el soporte de la solución coincide con el de la función g es el siguiente:

Teorema 5. *Supongamos que se verifica* (53) *y que existen* $R>0$ *y* $\mu_1,\mu_2\in(0,1/N]$ *tales que*

$$(65) \qquad -(1-\mu_1N)\, f(\eta(d(x,\partial S(g));\mu_1)) \leq g(x) \leq (1-\mu_2N)\, f(\eta(d(x,\partial S(g));\mu_2))$$

$$\textit{en c.t. } x\in S(g) \textit{ tal que } d(x,\partial S(g))\leq R,$$

donde $R<\min\{\psi_{\mu_1}(\theta_{\mu_1}),\ \psi_{\mu_2}(\theta_{\mu_2})\}$.

Admitamos también que

$$(66) \qquad d(S(h/\partial\Omega),S(g))\geq 2R \ \text{ y } \ \eta(R;\mu_i)\geq||u||_{L^\infty} \quad (i=1,2).$$

Entonces si u *es solución de* (1), (2) *se tiene que* $u(x)=0$ *si* $x\in N(g)$ *y* $d(x,S(h/\partial\Omega))\geq R$.
En particular si $h=0$ *en* $\partial\Omega$ *entonces* $\mathrm{Sop}(u)=\mathrm{Sop}(g)$.

Demostración . Veamos en primer lugar que $u=0$ en $\partial S(g)$. Sea $x_0\in\partial S(g)$, si $x_0\in S(g)\cap\partial\Omega$ la conclusión es obvia a partir de (66). Si $x_0\in\partial S(g)-\partial\Omega$, es claro que $\forall x\in\Omega\cap B_R(x_0)$ $d(x,\partial S(g))\leq|x-x_0|$ y usando (65), la monotonía de f y η y (60) se tiene que

$$(67) \qquad g(x)\leq(1-\mu_2N)\, f(\eta(|x-x_0|;\mu_2))\leq L(\eta(|x-x_0|;$$

$$\text{en c.t. } x\in\Omega\cap B_R(x_0)$$

Además por (66) sabemos que $d(x_0,\partial S(h/\partial\Omega))\geq R$ y $\eta(R;\mu_i)\ ||u||_{L^\infty}$, luego se satisface la hipótesis (63) del Teorema 4. De la desigualdad (67) y la análoga con $-\eta(|x-x_0|;\mu_1)$ se sigue que también se verifica (61) por lo que podemos aplicar el Teorema 4 y obtener $u(x_0)=0$.

Hasta aquí hemos probado que $u=0$ en $\partial S(g)$. Consideremos ahora la región

$$\tilde{\Omega}=\{x\in N(g) : d(x,S(g))\leq R\},$$

en la que el problema (1), (2) se puede escribir en la forma

(68) $$-\operatorname{div}(Q(|\nabla u|\nabla u) + f(u) = 0 \text{ en } \tilde{\Omega}, \quad u = 0 \text{ en } \partial\tilde{\Omega},$$

para probar que $u = 0$ en $\partial\tilde{\Omega}$, dividimos $\partial\tilde{\Omega} = \partial_1\tilde{\Omega} \cap \partial_2\tilde{\Omega} \cap \partial_3\tilde{\Omega}$, donde $\partial_1\tilde{\Omega} = \partial\tilde{\Omega} \cap \partial\Omega$, $\partial_2\tilde{\Omega} = \partial(S(g)) \cap \tilde{\Omega}$ y $\partial_3\tilde{\Omega} = \{x \in N(g) : x \in \partial\tilde{\Omega}, x \notin \partial\Omega \text{ y } d(x, \partial S(g)) = R\}$. Es trivial comprobar que $u = 0$ en $\partial_1\tilde{\Omega} \cup \partial_2\tilde{\Omega}$. Empleando que ψ_μ es decreciente en μ y usando (66) tenemos que

$$\eta(d(S(h/\partial\Omega), S(g)); 1/N) > \|u\|_{L^\infty},$$

lo que unido al Teorema 3 da la inclusión

$$N(u) \supset \{x \in N(g) \cup N(h/\partial\Omega) : d(x, S(g) \cup S(h/\partial\Omega)) \geq R\}.$$

Basta observar que $\partial_3\tilde{\Omega} \subset \{x \in N(g) \cup N(h/\partial\Omega) : d(x, S(g) \cup S(h/\partial\Omega)) \geq R\}$ para obtener que $u = 0$ en $\partial_3\tilde{\Omega}$ y por lo tanto en todo $\partial\tilde{\Omega}$. Por la unicidad de soluciones del problema (68) concluimos que $u = 0$ en todo $\tilde{\Omega}$.

En muchas aplicaciones es deseable evitar la formación de la frontera libre. Por ello vamos a estudiar bajo qué condiciones la solución es estrictamente positiva (para simplificar la exposición vamos a considerar únicamente soluciones no negativas, que por otra parte son las de la mayoría de las aplicaciones). Veremos que cuando falla la hipótesis (53), o cuando no se verifica el adecuado balance entre el tamaño de N(g) y $\|u\|_{L^\infty}$, no se forma la frontera libre. A partir de ahora, el considerar sólo soluciones no negativas obviamos la hipótesis de que f sea impar, sin embargo, hemos de añadir la de que Ω sea conexo.

Nuestro primer resultado es un importante principio fuerte del máximo, que siguiendo a [Va] reproduce el esquema de demostración original de [Ho] :

Teorema 6. *Supongamos que* $\psi(0^+) = \infty$, *e.d.,*

$$\int_{0^+} \frac{ds}{A^{-1}(F(s))} = \infty \; ; g \equiv 0.$$

Sea $u \in C^{1,\alpha}_{Loc}(\Omega)$, $u \geq 0$, *solución de la ecuación* (1), *entonces, o bien* $u = 0$ *en* Ω, *o bien* $u > 0$ *en* Ω. *Aún es más, para todo compacto* $K \subset \Omega$ *existe una constante* $\nu = \nu(k)$ *tal que* $u \geq \nu > 0$ *en* K.

La idea central de la demostración es construir una subsolución local adecuada, lo que haremos por medio del resultado auxiliar siguiente:

Lema 3 . *Sean* r_1, v_1 *dos números positivos cualesquiera con* $r_1 < R$. *Entonces existe una única función* $v \in C^{1,\alpha}[0, r_1]$ *solución del problema.*

(69) $$-(Q(|v'|)v')' + \frac{N-1}{R-r} Q(|v'|)v' + f(v) = 0 \text{ en } (0, r_1), \; v(0) = 0, \; v(r_1) = v_1.$$

Dicha función verifica $v \geq 0$ *y* $v' \geq 0$. *Además, si* $\psi(0^+) = \infty$ *se tiene que* $v'(0) > 0$ *y* $0 < v(r) < v_1$ *para todo* $0 < r < r_1$.

Demostración. La existencia se obtiene por argumentos estandar y la unicidad es consecuencia de la monotonía de f y de la monotonía estricta de $Q(s)\, s$. Por resultados de monotonía también tenemos que $v \geq 0$. De la ecuación (69) obtenemos que

$$(70) \qquad ((R-r)^{N-1} Q(|v'(r)|)\, v'(r))' = (R-r)^{N-1} f(v(r)) \geq 0 \ ,$$

por lo tanto $(R-r)^{N-1} Q(|v'(r)|)\, v'(r)$ es no decreciente, y como $Q(|v'(0)|)\, v'(0) \geq 0$ entonces $Q(|v'(r)|)\, v'(r) \geq 0$ en $[0, r]$ lo que implica que $v'(r) \geq 0$ en $[0,r_1]$. Sea $r_0 = \sup\{r \geq 0 \text{ tal que } v(r) = 0\}$, sabemos que $0 \leq r_0 \leq r_1$ ya que $v_1 \geq 0$ .Como $Q(|v'(r)|)\, v'(r) > 0$ si $v(r) \neq 0$ entonces $v'(r) > 0$ si $v(r) \neq 0$, por lo que la función v es biyectiva de $[r_0, r_1]$ en $[0,v_1]$, con lo que podemos cambiar de variable en la integración y obtener

$$(71) \qquad \int_{r_0}^{r_1} \frac{v'(r)}{A^{-1}(F(v(r)))}\, dr = \int_0^{v_1} \frac{ds}{A^{-1}(F(s))} = +\infty \ .$$

Por otra parte, integrando la expresión (70) sobre (r_0, r), (con $r \leq r_1$), obtenemos

$$\begin{aligned}(R-r)^{N-1} Q(|v'(r)|)\, v'(r) &= \int_{r_0}^{r} (R-s)^{N-1} f(v(s)\, ds \\ &\leq f(v(r))\, \frac{(R-r_0)^N - (R-r)^N}{N} \ ,\end{aligned}$$

existe, por tanto, una constante c_1 tal que

$$Q(|v'(r)|)\, v'(r) \leq c_1 f(v(r)) \quad \forall\ r \in (r_0, r_1) .$$

Multiplicando esta desigualdad por $v'(r)$ y volviendo a integrar sobre (r_0, r) nos queda

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{v'(s)}{A^{-1}(F(v(s)))}\, ds < +\infty \ .$$

Esta última desigualdad contradice (71) y por lo tanto $v'(r_0) \neq 0$.

Demostración del teorema 6. Supongamos que u se anula en alguna parte de Ω pero que no es idénticamente igual a 0, entonces $P(u) = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$ verifica que $P(u) \subseteq \Omega$ y $P(u) \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in P(u)$ tal que $d(x_0, \partial P(u)) < d(x_0, \partial\Omega)$ y si $R = d(x_0, \partial P(u))$ entonces $R/2 < F^{-1}(A(\infty))$. Es obvio que existe algún $y \in \partial B(x_0 ; R) \cap \Omega$ tal que $u(y) = 0$ y como $u > 0$ en $B(x_0 ; R)$ entonces $\nabla u(y) = 0$ (recuérdese que $u \in C^{1,\alpha}_{Loc}(\Omega)$). Mediante una subsolución adecuada vamos a llegar a ver que $\nabla u(y) \neq 0$, con lo que tendremos una contradicción y por tanto demostrado el teorema. Sea el anillo $A = \{x \in R^N : R/2 < |x - x_0| < R\} \subset \Omega$ y $a = \inf \{u(x) : |x - x_0| = R/2\}$, obviamente $u > 0$ en A y $a > 0$. Consideremos la función $\underline{u}(x) = v(R - |x - x_0|)$ con $x \in A$, donde v es la solución del problema

$$-(Q(|v'|)\, v')' + \frac{N-1}{R-r} Q(|v'|)\, v' + f(v) = 0\ , \quad v(0) = 0\ , \quad v(R/2) = a\ ,$$

Por lo tanto u verifica

$$-\mathrm{div}\,(Q(|\nabla \underline{u}|)\, \nabla \underline{u}) + f(\underline{u}) = 0 \text{ en } A\ , \quad \underline{u} \leq u \text{ en } \partial A\ ,$$

con lo que es una subsolución de (1). Aplicando el principio de comparación se sigue que $\underline{u} \leq u$ en A y entonces obtenemos

$$\liminf_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \{ u(y + t(x_0 - y)) - u(y) \} \geq \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \{ \underline{u}(y + t(x_0 - y)) - \underline{u}(y) \}$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} \frac{v(R - (1 - t) R) - v(0)}{t} = R\, v'(0).$$

Como por el lema 3 $v'(0) > 0$ podemos concluir que $\nabla u(y) \neq 0$, con lo que demostramos que $u = 0$ en Ω ó $u > 0$ en Ω, el resto es estandar.

Observación 7. Es fácil observar que el resultado del Teorema 6 sigue siendo cierto para subsoluciones. Además, también se puede obtener una versión puntual en la frontera. En concreto si $u \in C^1(\Omega \cup \{x_0\})$ satisfaciendo Ω en x_0 la condición de esfera interior y que $u(x_0) = 0$ entonces se tiene que $(\nabla u \,.\, \nu)(x_0) > 0$. Por otra parte, si no nos restringimos a soluciones no-negativas se verifica que o bien $u(x) = \inf_{\partial\Omega} u^- \ \forall x \in \Omega$ o bien $u(x) > \inf_{\partial\Omega} u^- \ \forall x \in \Omega$ (con $r^- = \min(r, 0)$).

Hemos visto en el Teorema 3 que si se verifica (5.37) entonces $u(x_0) = 0 \ \forall x_0 \in N(g) \cup N(h/\partial\Omega)$ tal que $d(x_0, S(g) \cup S(h/\partial\Omega)) \geq \psi_{1/N}(M)$. Si no existen puntos cumpliendo las propiedades de x_0, por ejemplo, si no se verifica que

$$\rho \geq \psi_{1/N}(M), \tag{77}$$

$$\int_{r_0}^{r} Q(|v'(s)|)\, v'^2(s)\, ds \leq c_1 \int_{r_0}^{r} f(v(s))\, v'(s)\, ds = c_1 F(v(r)). \tag{72}$$

También sabemos que

$$F(v(r)))' = f(v(r))\, v'(r) = ((Q(|v'(r)|)\, v'(r))' - \frac{N-L}{R-r} Q(|v'(r)|)\, v'(r))\, v'(r),$$

y por lo tanto

$$(R - r)^{N-1} (F(v(r)))' = ((R - r)^{N-1} Q(|v'(r)|)\, v'(r))'\, v'(r). \tag{73}$$

Utilicemos estas expresiones para probar que $v'(r_0) \neq 0$, lo que unido al hecho de que $v \in C^{1,\alpha}([0, r_1])$ implica que $r_0 = 0$ y acabamos la demostración.

Supongamos que no es cierto, es decir, que $v'(r_0) = 0$. Integrando el término de la izquierda de la igualdad (73) sobre (r_0, r), (con $r \leq r_1$), y estimándolo superiormente nos queda.

$$\int_{r_0}^{r} (R - s)^{N-1} (F(v(s)))'\, ds \leq (R - r_0)^{N-1} \int_{r_0}^{r} (F(v(s)))'\, ds \tag{74}$$

$$= (R - r_0)^{N-1} F(v(r)).$$

Integrando sobre (r_0, r), ahora el término de la derecha de la igualdad, (73), y estimándolo inferiormente resulta

$$\int_{r_0}^{r} ((R-s)^{N-1} Q(|v'(s)| v'(s))' v'(s)\, ds \geq (R-r_1)^{N-1} \Big(\int_{r_0}^{r} (Q(|v'(s)|) v'(s))' v'(s)\, ds -$$

$$- \int_{r_0}^{r} \frac{N-1}{R-s} Q(|v'(s)|)\, v'^2(s)\, ds \Big)$$

$$\geq (R-r_1)^{N-1} \Big(A(v'(r)) -$$

$$- \frac{N-1}{R-r_1} \int_{r_0}^{r} Q(|v'(s)|)\, v'^2(s)\, ds \; .$$

Usando (72) se sigue

$$(75) \qquad \int_{r_0}^{r} ((R-s)^{N-1} . Q(|v'(s)|)\, v'(s))' v'(s)\, ds \geq C_2 (A(v'(r)) - C_3\, F(v(r)))$$

(donde c_i representa una constante positiva).

Uniendo las expresiones (74) y (75) obtenemos

$$(76) \qquad A(v'(r)) \leq C_4 F(v(r)) \, .$$

Sea D una constante positiva tal que $C_4 f(s) \leq D f(D s)$ $\forall$ $s \in (0, v_1)$ (siempre existe al ser f no decreciente, por ejemplo, $D = \max\{C_4, 1\}$), entonces

$$C_4 F(s) \leq F(D s) \quad \forall \; s \in (0, v_1) \; ,$$

y la desigualdad (76) se puede escribir como

$$A(v'(r)) \leq F(D(V(r))) \, ,$$

lo que implica que

donde ρ es el radio de la mayor bola inscripta en $N(g) \cup N(h / \partial\Omega)$, nos preguntamos si podemos afirmar que no existe frontera libre. Queremos saber si las condiciones suficientes para la existencia de frontera libre son también necesarias en algún sentido. El Teorema 6 nos dice que si no se verifica (53) no existe frontera libre. Si lo que no se verifica es el balance entre los tamaños del dominio y la solución, es decir, si no se cumple (77), no se puede demostrar con toda generalidad la falta de la frontera libre, pero daremos un resultado en esta dirección.

Teorema 7. *Supongamos que* Ω *es convexo y se verifica la hipótesis* (11) . *Sea* u *solución de* (1) *en la clase* $W^{1,\infty}(\Omega)$ *con* $g = 0$ *verificando o bien la condición de contorno* (2) *con* $h = k$ *o bien la condición* (3) . *Sea* x_m *un punto tal que* $u(x_m) = m = \min\{u(x) : x\, \tilde{\Omega}\}$ *y* $l = \min\{u(x) : x\, \partial\Omega\}$, *entonces*

$$(78) \qquad d(x_m, \partial\Omega) \geq \int_{m}^{l} \frac{ds}{A^{-1}(F(s))} \; ,$$

En particular,

$$N(u) = \emptyset \quad \text{si} \quad \rho < \psi_1(l) = \int_m^l \frac{ds}{A^{-1}(F(s))}$$

donde ρ *es el radio de la mayor esfera inscripta en* Ω.

Demostración. Está basada en la estimación del gradiente del Teorema 2,

$$|\nabla u(x)| \leq A^{-1}(F(u(x))),$$

ya que al ser Ω convexo $\alpha = 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_m \notin \partial\Omega$. Sean $x_1 \in \partial\Omega$, $r = d(x_1, x_m)$, $v_1 : [0, r] \to R^N$ definida como

$$v_1(s) = x_m + s\left(\frac{x_1 - x_m}{r}\right)$$

y $s_1 \in [0, r]$ un punto tal que $u(v_1(s_1)) = m$ y $u(v_1(s)) > m \ \forall s \in (s_1, r]$. Claramente tenemos que

$$\frac{d}{ds} u(v_1(s)) \leq |\nabla u(v_1(s))| \leq A^{-1}(F(u(v_1(s)))).$$

Integrando esta expresión sobre $[s_1, r]$ y operando se sigue

$$d(x_2, x_1) = \int_{s_1}^r ds \geq \int_{s_1}^r \frac{d(u(v_1(s)))}{A^{-1}(F(u(v_1(s))))} \geq \int_m^1 \frac{dt}{A^{-1}(F(t))}.$$

Como $d(x_m, x_1) \geq d(x_2, x_1)$ y x_1 es un punto arbitrario de $\partial\Omega$ obtenemos la primera parte del teorema. Para la segunda basta considerar el caso cuando $m = 0$ y observar que $\rho \geq d(x_m, \partial\Omega)$.

Agradecimientos. Los autores agradecen a R.L.Cignoli y S.E.Trione por su gentil invitación a contribuir en el número especial de esta revista dedicado al homenaje a Julio Rey Pastor. Las investigaciones de J.I. Díaz y J.E. Saa han sido parcialmente patrocinadas por la CICYT de España (proyecto PB86-0485). Las investigaciones de U. Thiel tuvieron lugar durante su estancia en las Universidades Autónoma y Complutense de Madrid en calidad de becaria postdoctoral del Ministerio de Educación y Ciencia español y de la Deutsche Forschungsgemeinschaft. Esta autora quiere aprovechar esta ocasión para agradecer a las instituciones involucradas el apoyo recibido durante su estancia en España.

Bibliografía.

[Br*] BREZIS, H. *Operateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les espaces de Hilbert.* Notes de Matématica 5, North-Holland.

[Ca-Fr] CAFFARELLI, L.A. y FRIEDMAN, A. *Regularity of the Boundary of a Capillary Drop on an Inhomogeneous Plane and Related Variational Problems.* Rev. Matem. Iberoam Vol. No.1, 1985, p.p. 61-84.

[Ca-Ke] CALLEGARI, A.J. y KELLER, J.B. *Contact of inflated membranes with rigid surfaces.* J.Appl.Mech. 41, 1974, pp.189-191.

[Co-Fi] CONCUS, P. y FINN, R. *On capillary free surfaces in a gravitational field.* Acta Math. 132, 1974, pp. 207-223.

[DBe] DI BENEDETTO, E. *$C^{1+\alpha}$local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations.* Nonlinear analysis th. Meth. and Appl, 7, 1983, pp. 827-850.

[Di] DÍAZ, J.I. *Nonlinear partial differential equations and free boundaries.* Vol .1. Elliptic equations. Research Notes in Mathematics, 106. Pitman 1985.

[Di-Sa] DÍAZ, J.I. y SAA, J.E.*Optimal gradient bounds for some second order quasilinear equations.* Actas IX CEDYA, Univ. Valladolid, 1986, pp. 147-151.

[Fi] FINN, R. *Equilibrium Capillary Surfaces.* Springer 1986.

[Fr-La-Se] FRANCHI, B., LANCONELLI, E. y SERRIN, J. *Essistenza é unicitá degli stati fondamentali per equazioni ellitiche quasilineari.* Por publicar.

[Ge] GERHARDT, C. *On the capillarity problem with constant volume.* Ann. Scuola norm. Sup. Pisa Sci. fis. mat., Serv. IV, V, 2, 1975, pp.303-320.

[Ge*] GERHARDT, C. *Boundary value problems for surface of prescribed mean curvature.* J.Math. pures et appl, 58, 1979, pp. 75-109.

[Ge**] GERHARDT, C. *Existence, regularity, and boundary behaviour of generalized surfaces of prescribed mean curvature.* Math. Z. Vol.139, 1974, pp.173-198.

[Ge***] GERHARDT, C. *Global regularity of the solutions to the capillary problem.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.,3(4), 1976, pp. 157-176.

[Gi] GIUSTI, E. *Boundary Value Problems for Non-parametric Surfaces of Prescribed Mean Curvature.* Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa, 34 pp. 501-548.

[Gi-Gi] GIAQUINTA, M. y GIUSTI, E. *Sharp Estimates for the Derivatives of Local Minima of Variational Integrals.* Bool U.M.I. 6, 3-A, 1984, pp. 239-248.

[Gi-Tr] GILBARG, D. y TRUDINGER, N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, 1983.

[Ho] HOPF, E. *Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller differential-geic hunger zweiter ordnung vom elliptischen typus.* Sitz. Be. Preuss. Akad. Wissensch, Berlín Math.,Phys, Kl 19, 1927, pp. 147-152.

[Iv] IVANOV. *Quasilinear degenerate and nonuniformly elliptic and parabolic equations of second order.* a.M.S. 1982.

[Ki-St] KINDERLEHRER, D. y STAMPACCHIA, G. *An introduction to Variational Inequalities and Their Applications.* Academic Press, 1980.

[Ko] KOREVAAR, N.J. *Maximum principle gradient estimates for the capillary problem.* Comm. in Partial Diffe. Equs, 13(1), 1988, pp.1-13.

[La-Ur] LADYZENSKAIA, O.A. y URALTSEVA, N.N. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations.* Academic Press, 1968.

[Li*] LIONS, J. K. *Quelques Méthodes de résolution de problémes aux limites non lineaires.* Dunod, 1969.

[Lie] LIEBERMAN, G. M. *Gradient estimates for capillary - type problems via de maximum principle.* Comm. in Partial Diffe. Equs, 13(1), 1988, pp.33-59.

[Pa-Ph] PAYNE, L.E. y PHILLIPIN, G.A. *Some maximum principles.* Nonlinear Analysis Th. Math. and Appl, 3, 1979, pp. 193-211.

[Pa-St] PAYNE, L.E. y STAKGOLD, I. *Nonlinear Problems in Nuclear Reactor Analysis.* Springer Lecture Notes in Math, 322, 1972, pp. 298-307.

[Se*] SERRIN, J. *The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables.* Philos. Trans. Roy. Soc.London, Ser. A 264, 69, pp. 413-496.

[Sp] SPERB, R. *Maximum Principles and Their Applications.* Acad. Press, 1982.

[Sp-St] SPERB, R. y STAKGOLD, I. *Estimates for membranes of varying density.* Applicable Anal.,8, 1979, pp. 301-318.

[Ta] TALENTI, G. *Nonlinear Elliptic Equations, Rearrangements of Functions and Orlicz Spaces.* Ann. Mat Pura Appl. IV, 120, 1977, pp. 159-184.
[To] TOLKSDORFF, P. *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations.* J.Diff. Eqns, 50, 1983, pp. 1627-1650.
[Va] VÁZQUEZ, J.L. *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations.* Appl. Math. and Optimization, 12, 1984, pp. 191-202.

Recibido por U.M.A. el 28 de febrero de 1989.

Jesús Ildefonso Díaz
Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid 28040, Madrid , España.

José Evaristo Saa
Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid, 28040 Madrid, España.

Ursula Thiel
Donderforschungsbereich 123, Universitaet Heidelberg, Im Neuenheimer Feld 294, 6900 Heidelberg, Fed. Rep. Germany.