C. R. Acad. Sci. Paris, t. 314, Série I, p. 1015-1020, 1992

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Équations elliptiques et symétrisation de Steiner

Angelo ALVINO, Jesus ILDEFONSO DIAZ, Pierre-Louis LIONS et Guido TROMBETTI

Résumé – Nous donnons une preuve nouvelle des résultats de comparaison obtenus par symétrisation de Steiner pour les solutions d'équations elliptiques. Cette démonstration repose sur un argument de « lignes de niveau ».

Elliptic equations and Steiner symmetrization

Abstract – *We present a new proof of comparison results via Steiner symmetrization for solutions of elliptic equations. This proof relies upon a "level sets" argument.*

Abridged English Version – It is well-known that sharp estimates for solutions of elliptic and parabolic equations can be obtained by the use of Schwarz symmetrization. They are deduced from comparison results between those solutions and solutions of suitable spherically symmetric problems. The first results of this kind are due to Talenti [12] in the elliptic case and to Bandle in the parabolic case. Various extensions of these initial results exist; and we recall for example Alvino and Trombetti ([4], [5]), Lions [10], Chiti [8], Talenti [13], Bandle [6], Mossino and Rakotosson [11], Alvino, Lions and Trombetti [2], ...

The method of proof in these works is to obtain a differential inequality involving the decreasing rearrangement u^* of the solution of the original problem. Then, one checks that this inequality becomes an equality when the problem is spherically symmetric and one deduces the desired comparison result using the maximum principle.

It is not clear how one should adapt this strategy in the case of other symmetrizations like for instance the Steiner symmetrization. However, comparison results in that case were shown in [3] by a totally different, maybe easier method relying upon simple properties of the fundamental solution of the heat equation and semi-groups arguments.

In this Note, we present a new proof of the result obtained in [3] in the case of Steiner symmetrization, illustrating a method which allows to work with "level sets" arguments. This method we are going to describe is not only new but is also more powerful since it allows to handle more general situations that are discussed in a forthcoming paper [1]. The main point in our method is a differentiation formula of integrals over certain partial level sets.

Let h be a measurable function on $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ with $n,\ m \geqq 1$, we set, for each $y \in \mathbb{R}^m$,

$$\mu_h(t, y) = \operatorname{meas}\{x \in \mathbb{R}^N;\ |h(x, y)| > t\}, \qquad t > 0$$

and

$$h^*(s, y) = \sup\{t > 0;\ \mu_h(t, y) > s\} \qquad \text{for} \quad s \geqq 0,$$

$h^\#(x, y) = h^*(C_n |x|^n, y)$ where C_n is the measure of the unit ball in $\mathbb{R}^n$. Let us recall that $h^*(s, y)$ is the decreasing rearrangement à la Hardy-Littlewood-Polya [9] of $h(.,y)$ for each y and that $h^\#$ is called the Steiner symmetrization of h with respect to x [or in other words the Schwarz symmetrization of $h(.,y)$ for each y].

Note présentée par Haïm BREZIS.

Finally, let Ω be a bounded open set in $\mathbb{R}^N$ and for the sake of simplicity, we assume that $\Omega=\Omega_x\times\Omega_y$ where Ω_x, Ω_y are respectively open sets in $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$. We denote by $\Omega^\sharp=\Omega_x^\sharp\times\Omega_y$ where $\Omega_x^\sharp$ is the ball centered at 0 in $\mathbb{R}^n$ with the same measure as Ω_x.

Next, we consider the following homogeneous Dirichlet problem

$$(1)\qquad -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)-\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\alpha_{ij}(y)\frac{\partial u}{\partial y_i}\right)=f(x,y)\quad\text{in }\Omega,\qquad u\in H_0^1(\Omega).$$

And we assume that

$$(2)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y)\xi_i\xi_j\geqq|\xi|^2,\qquad\forall\xi\in\mathbb{R}^n,\quad\forall(x,y)\in\Omega$$

$$(3)\qquad \sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}(y)\eta_i\eta_j\geqq\nu|\eta|^2,\qquad\forall\eta\in\mathbb{R}^n,\quad\forall y\in\Omega_y$$

for some $\nu>0$, and $a_{ij}\in L^\infty(\Omega)\,(\forall i,j)$, $\alpha_{ij}\in L^\infty(\Omega_y)\,(\forall i,j)$, $f\in L^2(\Omega)$ (for example).

We finally introduce the symmetrized problem (as in [3]) – which is invariant under rotations in x,

$$(4)\qquad -\Delta_x v-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\alpha_{ij}(y)\frac{\partial v}{\partial y_j}\right)=f^\sharp(x,y)\quad\text{in }\Omega,\qquad v\in H_0^1(\Omega^\sharp).$$

We give a new proof of the following

THEOREM [3]. – *Under the above assumptions, we have*

$$(5)\qquad \int_0^s u^*(\sigma,y)\,d\sigma\leqq\int_0^s v^*(\sigma,y)\,d\sigma,\qquad\forall s\in[0,\operatorname{meas}\Omega_x^\sharp].$$

In particular, this implies:

$$\|u(\cdot,y)\|_{L^p(\Omega_x)}\leqq\|v(\cdot,y)\|_{L^p(\Omega_x^\sharp)}\quad\textit{for all }1\leqq p\leqq\infty.$$

The method of proof is a delicate adaptation of the procedure generally used in the case of the Schwarz symmetrization. We first integrate the equation (1) on a level set of the function $u(\cdot,y)$ for a fixed y. The terms involving derivatives in x are treated as usual but the other terms need a new treatment. We show that, in those terms, the derivatives in y can be in some vague sense taken out of the integral sign with a co-area like formula, at least in a smooth situation. The rest of the proof is then essentially standard with a convenient maximum principle argument that yields the comparison (5).

1. INTRODUCTION. – Il est bien connu que les estimations précises sur les solutions d'équations elliptiques et paraboliques peuvent être obtenues grâce à la symétrisation de Schwarz. Ces estimées découlent de résultats de comparaison entre ces solutions et celles de problèmes à symétrie sphérique convenables. Les premiers résultats de ce type ont été obtenus par Talenti [12] dans le cas elliptique et par Bandle [6] dans le cas parabolique. Par la suite, ils ont été étendus à des situations plus générales; *voir* par exemple Alvino et Trombetti ([4], [5]), Lions [10], Chiti [8], Talenti [13], Bandle [6], Mossino et Rakotosson [11], Alvino, Lions et Trombetti [2].

La méthode de démonstration consiste à obtenir une inégalité différentielle portant sur le réarrangement décroissant u^* de la solution u du problème initial. Puis, on vérifie que cette inégalité devient une égalité pour un problème à symétrie sphérique et cela permet de conclure en utilisant le principe du maximum.

L'adaptation de cette stratégie au cas d'autres symétrisations, comme par exemple la symétrisation de Steiner, n'est pas claire. Néanmoins, des résultats dans ce cas analogues à ceux mentionnés ci-dessus ont été prouvés dans [3] par une approche totalement nouvelle, et probablement plus simple, reposant sur des propriétés élémentaires de la solution fondamentale de l'équation de la chaleur et sur des arguments de semi-groupes.

Dans cette Note, nous indiquons une nouvelle preuve du résultat obtenu dans [3] dans le cas de la symétrisation de Steiner, illustrant ainsi une méthode qui permet d'utiliser des arguments de « lignes de niveau ». Outre la nouveauté de l'approche, elle permet de considérer des situations plus générales que dans [3] qui font l'objet de l'article [1] dans lequel nous détaillons également les résultats et arguments présentés dans cette Note.

2. Notations et résultat principal. — Soit h une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^N=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ avec $n\geqq 1$, $m\geqq 1$. On note (x, y) un point générique de $\mathbb{R}^N$ et on introduit, pour (presque) tout $y\in\mathbb{R}^m$, la fonction de distribution de $h(\,.\,, y)$

$$\mu_h(t, y)=\operatorname{mes}\{x\in\mathbb{R}^N;\ |h(x, y)|>t\},\qquad t>0.$$

Et on note

$$h^*(s, y)=\sup\{t>0;\ \mu_h(t, y)>s\}\qquad(\forall s\geqq 0),$$

$h^\#(x, y)=h^*(C_n|x|^n, y)$ où C_n est la mesure de la boule unité de $\mathbb{R}^n$. On rappelle que $h^*(s, y)$, $h^\#(x, y)$ sont respectivement le réarrangement décroissant, la symétrisée de Schwarz de $h(\,.\,, y)$ pour chaque $y\in\mathbb{R}^m$ et que $h^\#(x, y)$ est également appelée symétrisée de Steiner de h par rapport à x. Enfin, si h est définie sur une partie mesurable de $\mathbb{R}^N$, $h^\#$, h^* sont définies comme précédemment en prolongeant h par 0 à $\mathbb{R}^N$. Enfin, on considère un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$ que, pour simplifier la présentation, on suppose être de la forme $\Omega=\Omega_x\times\Omega_y$ où Ω_x, Ω_y sont des ouverts respectivement de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$. Et on note $\Omega^\#=\Omega_x^\#\times\Omega_y$ où $\Omega_x^\#$ est la boule centrée en 0 dans $\mathbb{R}^n$ de même volume que Ω_x.

On considère ensuite le problème de Dirichlet homogène

$$(1)\qquad -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x, y)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)-\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\alpha_{ij}(y)\frac{\partial u}{\partial y_i}\right)=f(x, y)\quad\text{dans }\Omega,\qquad u\in H_0^1(\Omega).$$

Et on suppose que $a_{ij}\in L^\infty(\Omega)$, $\alpha_{ij}\in L^\infty(\Omega_y)\,(\forall i, j)$ et que, par exemple, $f\in L^2(\Omega)$. Enfin, on suppose que

$$(2)\qquad \exists\,\nu>0,\quad \text{p.p. } y\in\Omega_y,\quad \forall\,\eta\in\mathbb{R}^n,\qquad \sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}(y)\,\eta_i\eta_j\geqq\nu|\eta|^2$$

$$(3)\qquad \text{p.p. } (x, y)\in\Omega,\quad \forall\,\xi\in\mathbb{R}^n,\qquad \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x, y)\,\xi_i\xi_j\geqq|\xi|^2.$$

Puis, on introduit le problème suivant par rotations en x

$$(4)\qquad -\Delta_x v-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\alpha_{ij}(y)\frac{\partial v}{\partial y_j}\right)=f^\#(x, y)\quad\text{dans }\Omega,\qquad v\in H_0^1(\Omega^\#).$$

Nous décrivons dans ce qui suit une nouvelle démonstration du

THÉORÈME [3]. — *Sous les conditions précédentes, on a*

$$(5)\qquad \int_0^s u^*(\sigma, y)\,d\sigma \leqq \int_0^s v^*(\sigma, y)\,d\sigma, \qquad \forall s \in [0, \operatorname{meas} \Omega_x^\sharp],\quad p.p.\ y \in \Omega_y.$$

En particulier, cela implique :

$$\| u(.\,, y) \|_{L^p(\Omega_x)} \leqq \| v(.\,, y) \|_{L^p(\Omega_x^\sharp)} \qquad (\forall\, 1 \leqq p \leqq \infty).$$

La méthode de preuve est une adaptation délicate de la procédure utilisée en général dans le cas de la symétrisation de Schwarz. On commence par intégrer l'équation (1) sur la zone de niveau de la fonction $u(.\,, y)$ pour y fixé. Les termes de dérivées en x sont traités de manière classique mais les termes de dérivées en y nécessitent un argument nouveau. Nous montrons que dans ces termes, on peut, de manière très grossière, faire porter les dérivations en y à l'extérieur des intégrales grâce à une formule du type co-aire [*voir* (12) ci-dessous]. Le reste de la démonstration est alors relativement classique. Cette formule est donc le point central de la démonstration et nous la détaillons dans le paragraphe qui suit dans le cas particulier d'une fonction u régulière $u \in C^\infty(\Omega)$ et où $m = 1$, afin de simplifier la présentation.

3. UNE FORMULE DE DIFFÉRENTIATION. — Soit $u \in C^\infty(\Omega)$. Pour chaque $y \in \Omega_y$, on considère une ligne de niveau non critique de la fonction $u(.\,, y)$ notée

$$\Gamma_y^t = \{ (x, y);\ u(x, y) = t \}.$$

Par le lemme de Sard, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, Γ_y^t est non critique et $\Gamma_y^t = \partial G_y^t$ où $G_y^t = \{ (x, y);\ u(x, y) > t \}$.

Sur chaque ligne de niveau non critique, on considère le champ de vecteurs suivant

$$(6)\qquad \mathscr{A} = (A_i(x, y), 1), \qquad i = 1, \ldots, n$$

avec

$$(7)\qquad A_i(x, y) = A(x, y)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) |\nabla_x u|^{-1}$$

$$(8)\qquad A(x, y) = \frac{1}{|\nabla_x u|}\left(\int_{\Gamma_y} \frac{\partial u/\partial y}{|\nabla_x u|} H_{n-1}(dx)\right).\left(\int_{\Gamma_y} \frac{1}{|\nabla_x u|} H_{n-1}(dx)\right)^{-1} - \frac{\partial u/\partial y}{|\nabla_x u|}$$

où $\Gamma_y = \Gamma_y^t$. On déduit de (7) et (8)

$$(9)\qquad \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial y} = \beta\ (\text{Cte}) \quad \text{sur } \Gamma_y$$

$$(10)\qquad \int_{\Gamma_y} \mathscr{A}(x, y)\, H_{n-1}(dx) = 0.$$

Les courbes intégrales du système

$$(11)\qquad \frac{dx_1}{A_1(x, y)} = \frac{dx_2}{A_2(x, y)} = \ldots = \frac{dx_n}{A_n(x, y)} = dy$$

passant par les points d'une ligne de niveau critique donnée décrivent une surface qui vérifie

(i) son intersection avec un plan $y = \text{Cte}$ est une ligne de niveau notée Γ_y de la restriction de u à ce plan (la valeur de u sur Γ_y peut dépendre de y),

(ii) toute la ligne de niveau Γ_y est la frontière d'un ensemble de niveau G_y dont la mesure ne dépend pas de y.

L'introduction de ce champ A permet de faire évaluer la ligne de niveau Γ_y en conservant la propriété d'être le bord d'un ensemble de niveau dont la mesure est indépendante de y. En d'autres termes, pour tout x^0 dans un ensemble de niveau de $u(.,y)$, on note $x(x^0, y)$ la solution de (11) passant par x^0. Alors la variété définie par $x=x(x^0, y)$ pour y fixé est encore une ligne de niveau qui est le bord d'un ensemble de niveau dont la mesure est indépendante de y.

On démontre alors le

LEMME. — *Pour tout* $g \in C^\infty(\Omega)$, *on a*

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{G_y} g(x, y)\,dx=\int_{G_y}\frac{\partial g}{\partial y}dx-\int_{\Gamma_y} A\,g\,H_{n-1}(dx). \tag{12}$$

Le lemme se démontre aisément à partir des considérations précédentes.

Remarque. — Si l'on prend dans (12) la fonction u ou une fonction g qui a les mêmes lignes de niveau que u, (12) se réduit [grâce à (10)] à

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{G_y} g(x, y)\,dx=\int_{G_y}\frac{\partial g}{\partial y}dx. \tag{13}$$

Ce cas particulier a été prouvé par Bandle [6] (*voir* aussi Mossino et Rakotosson [11] pour des fonctions g moins régulières) pour obtenir un résultat de symétrisation dans le cas parabolique.

4. APPLICATION À LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. — La formule (12), ainsi que la version en codimension supérieure, est détaillée dans [1]. Nous indiquons rapidement comment déduire le théorème de (12). Pour chaque $y\in\Omega_y$, on intègre (1) sur un ensemble de niveau G_y dont le bord est une ligne de niveau non critique. On obtient

$$-\int_{G_y}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x, y)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx-\int_{G_y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx=\int_{G_y} f(x, y)\,dx. \tag{14}$$

Le premier terme et le troisième se traitent comme dans Talenti [12] et on en déduit

$$n^2 C_n^{2/n}\mu(t)^{2-2/n}\frac{1}{(-\mu'(t))}-\int_{G_y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\leqq\int_0^{\mu(t)} f^*(\sigma, y)\,d\sigma \tag{15}$$

où t est la valeur de u sur $\Gamma_y=\partial G_y$ et $\mu(t)=\operatorname{mes}(G_y)=\operatorname{mes}\{x;\,|u(x, y)|>t\}$.

Pour l'intégrale restante, on utilise deux fois (12) et se servant de (13), (9) et (7)

$$\begin{aligned}-\int_{G_y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx&=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha(y)\int_{G_y}\frac{\partial u}{\partial y}dx\right)-\alpha(y)\int_{\Gamma_y} A\frac{\partial u}{\partial y}H_{n-1}(dx)\\&=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha(y)\frac{\partial}{\partial y}\int_{G_y} u\,dx\right)+\alpha(y)\int_{\Gamma_y} A^2|\nabla_x u|\,H_{n-1}(dx)-\beta\int_{\Gamma_y} AH_{n-1}(dx).\end{aligned}$$

D'après (10) et puisque $\int_{G_y} u\,dx=\int_0^{\mu(t)} u^*(\sigma, y)\,d\sigma$, on obtient finalement

$$-\int_{G_y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\geqq-\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha(y)\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{\mu(t)} u^*(\sigma, y)\,d\sigma\right). \tag{16}$$

Et cette inégalité implique

$$(17)\quad n^2 C_n^{2/n} \mu(t)^{2-2/n} \frac{1}{(-\mu'(t))} \leqq \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha(y) \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\mu(t)} u^*(\sigma, y)\, d\sigma\right) + \int_0^{\mu(t)} f^*(\sigma, y)\, d\sigma.$$

En introduisant $U(s, y) = \int_0^s u^*(\sigma, y)\, d\sigma$ $[(s, y) \in [0, \text{mes}\, \Omega_x] \times \Omega_y]$, on en déduit de (17)

$$(18)\quad -n^2 C_n^{2/n} s^{-2+2/n} \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha(y) \frac{\partial U}{\partial y}\right) \leqq \int_0^s f^*(\sigma, y)\, d\sigma$$

avec

$$U(0, y) = 0 \quad \text{pour } y \in \Omega_y, \qquad U(s, y) = 0 \quad \text{pour } s \in (0, \text{mes}\, \Omega_x), \qquad y \in \partial\Omega_y,$$
$$\frac{\partial U}{\partial s}(\text{mes}\, \Omega_x, y) = 0 \quad \text{pour } y \in \Omega_y.$$

Dans le cas du problème à symétrie sphérique (4), *on vérifie aisément que*

$$V(s, y) = \int_0^s v^*(\sigma, y)\, d\sigma$$

vérifie l'inégalité dans (18) et les mêmes conditions aux limites. Cela permet de conclure grâce au principe du maximum.

Remarque. — Diverses variantes et extensions du théorème sont données dans [1] ainsi que les démonstrations détaillées esquissées ci-dessus. Nous donnons également dans [1] une démonstration directe de (16) (qui est moins géométrique) sans passer par (12), formule dont d'autres applications sont présentées dans [1].

Note remise le 13 avril 1992, acceptée le 15 avril 1992.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. ALVINO, J. I. DIAZ, P. L. LIONS et G. TROMBETTI (en préparation).

[2] A. ALVINO P. L. LIONS et G. TROMBETTI, *Ann. I.H.P., Anal. Non Lin.*, 7, 1990; *voir* aussi *C. R. Acad. Sci. Paris*, 303, série I, 1986, p. 947-950.

[3] A. ALVINO P. L. LIONS et G. TROMBETTI, *Differential and Integral Equations*, 4, 1991; *voir* aussi *C. R. Acad. Sci. Paris*, 303, série I, 1986, 975-978.

[4] A. ALVINO et G. TROMBETTI, *Ricerche Mat.*, 27, 1978.

[5] A. ALVINO et G. TROMBETTI, *Rend. Accad. Naz. Lincei*, 66, 1978.

[6] C. BANDLE, *J. Analyse Math.*, 30, 1976.

[7] C. BANDLE, *Isoperimetric Inequalities and Applications*, Pitman, London, 1980.

[8] G. CHITI, *Boll. Un. Mat. Ital.*, 16, 1979.

[9] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD et G. POLYA, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1980.

[10] P. L. LIONS, in *Non linear Partial Differential Equations and Their Applications*, Collège de France Seminar, 1, Pitman, London, 1980.

[11] J. MOSSINO et J. M. RAKOTOSSON, *Ann. Scuola. Norm. Sup.*, Pisa, 13, 1986.

[12] G. TALENTI, *Ann. Scuola. Norm. Sup.*, Pisa, 3, 1976.

[13] G. TALENTI, *Boll. Un. Mat. Ital.*, 4-B, 1985.

A. A. and G. T. : *Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Complesso universitario de M.S. Angelo, via Cinthia*, 80126 *Napoli;*

J. I. D. : *Departemento de Matematica Aplicada, Universidad Complutense de Madrid*, 28040 *Madrid;*

P. L. L. : *C.E.R.E.M.A.D.E., Université Paris-Dauphine, place de Lattre-de-Tassigny*, 75775 *Paris Cedex* 16.