Доклады Академии наук
1992. Том 325, № 6

УДК 532.540.013:517.946 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

© С.Н. АНТОНЦЕВ, Х.И. ДИАС, А.В. ДОМАНСКИЙ

УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЗАДАЧ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

(Представлено академиком П.Я. Кочиной 28 IV 1992)

Фильтрация двух несмешивающихся жидкостей в неоднородной анизотропной пористой среде описывается системой дифференциальных уравнений, состоящей из вырождающегося параболического для насыщенности $s(x, t)$ и эллиптического для "приведенного" давления $p(x, t)$ уравнения. Система имеет вид [1]

$$\frac{\partial(sm(x))}{\partial t} = \operatorname{div}(K_0(x)a(x)\nabla s + K_1(x, s)\nabla p + f_0(x, s)), \tag{1}$$

$$0 = \operatorname{div}(K(x, s)\nabla p + f(x, s)), \tag{2}$$

где Ω – ограниченная, вообще говоря, многосвязная область с границей Γ. Коэффициенты K_0, $K_i = K_0 k_{0i}(s)$, $i = 1, 2$, $K = K_1 + K_2$, f, f_0, a, m – заданные, соответственно тензорные, векторные и скалярные функции указанных аргументов. Здесь и далее оператор ∇ действует только на независимые переменные x_i, $i = 1, 2, 3$.

Для системы (1), (2) рассматривается следующая начально-краевая задача:

$$s(x, t) = s_0(x, t), p(x, t) = p_0(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma_{1T} = \Gamma_1 \times (0, T), \tag{3}$$

$$(K\nabla p + f)n = -Q(x, t), \quad (K_0 a\nabla s + K_1\nabla p + f)n = -Q_1(x, t), \tag{4}$$

$$(x, t) \in \Gamma_{2T} = \Gamma_2 \times (0, T),$$

$$s(x, 0) = s_0(x, 0), \quad x \in \Omega. \tag{5}$$

Здесь $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$; n – нормаль к Γ, каждая Γ_i, $i = 1, 2$, может состоять из нескольких достаточно гладких несвязных компонент; p_0, s_0, Q, Q_1 – заданные функции.

В работе [1] доказано существование "в целом" по времени обобщенных решений s, p как в регулярной $(0 < \delta_0 \leqslant s(x, t) \leqslant 1 - \delta_1 < 1,\ 0 < \delta(\delta_0, \delta_1) \leqslant a(s))$, так и в вырождающейся $(0 \leqslant s \leqslant 1, a \geqslant 0)$ задаче. Для регулярных задач в [1] доказаны устойчивость решений относительно начальных и граничных данных, а также их стабилизация при $t \to \infty$.

Единственность обобщенных решений вырождающейся задачи (1)–(5) доказана в [2], а при $\Gamma = \Gamma_1$ – в [3].

В [4, 5] для решений системы (1), (2) установлены конечное время стабилизации и конечная скорость распространения возмущений от начальных данных ($s_0 \equiv \equiv 0$ или $s_0 \equiv 1$).

В данной работе с использованием методики [2] для вырождающейся задачи доказана устойчивость решения относительно коэффициентов, начальных и граничных данных, а также сходимость его к стационарному решению при $t \to \infty$.

1. Устойчивость обобщенных решений. В [1] доказано су-

ществование обобщенного решения задачи (1)–(5) в следующем смысле:

$s(x, t)$, $p(x, t)$ – ограниченные измеримые функции,

$$0 \leqslant s(x, t) \leqslant 1, \quad p(x, t) \in L_\infty(\Omega_T) \cap L_\infty(0, T;\ W_2^1(\Omega)),$$

$$u(x, t) \equiv \int_0^{s(x,t)} \sqrt{a(\xi)}\, d\xi \in L_2(0, T;\ W_2^1(\Omega)),$$

удовлетворяющие (3) в смысле следов из $W_2^1(\Omega)$;

для всех $(\varphi(x, t), \psi(x, t)) \in W_2^1(\Omega_T)$,

$$\varphi(x, t) = \psi(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_{1T}, \quad \varphi(x, T) = 0, \quad x \in \Omega,$$

и почти всех $t \in (0, T)$ выполнены интегральные тождества

$$(6) \qquad (ms, \varphi)_{\Omega_t} - ((K_0 a \nabla s + K_1 \nabla p + f_0), \nabla\varphi)_{\Omega_t} - (ms(x, \tau), \varphi)_\Omega \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} - (Q_1, \varphi)_{\Gamma_{2t}} =$$

$$(7) \qquad (K \nabla p + f, \nabla\psi)_\Omega + (Q, \psi)_{\Gamma_2} = 0.$$

Здесь

$$(u, v)_\Omega = \int_\Omega uv\, dx, \qquad \Omega_t = \Omega \times (0, t), \quad \Gamma_{2t} = \Gamma_2 \times (0, t).$$

Отметим, что в [1] указаны также условия, при которых $p(x, t)$ облад дополнительным свойством – $|\nabla p| \leqslant M < \infty$.

Далее будут рассматриваться лишь обобщенные решения задачи (1)–(соответствующие заданным функциям

$$\mathfrak{M} \equiv (a^i, m^i, s_0^i, p_0^i, f^i, f_0^i, K^i, K_0^i, K_1^i, Q^i, Q_1^i), \qquad i = 1, 2.$$

Будем предполагать, что функции a^i удовлетворяют одному из следующих ловий:

$$(8) \qquad \begin{gathered} \left|\int_0^{s_2} (a^1 - a^2)\, d\xi\right|^q \leqslant M \int_0^1 a^1(\tau s^2 + (1-\tau) s^1)\, d\tau, \quad \forall (s^1, s^2) \in [0, 1], \\ \int_0^{s_0^1(x,t)} a^1(\xi)\, d\xi = \int_0^{s_0^2(x,t)} a^2(\xi)\, d\xi, \quad (x, t) \in \Gamma_{1T}, \quad q \in (0, 2), \end{gathered}$$

или

$$(8') \qquad \begin{gathered} a^1(s) \leqslant M a^2(s) \quad \forall s \in [0, 1], \\ s_0^1(x, t) = s_0^2(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma_{1T}. \end{gathered}$$

Первые условия в (8), (8′) аналогичны используемым в [6].

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнено условие* (8) *или* (8′) *и дополнительно*

$$M^{-1} \leqslant (m^1, (K^1 \xi, \xi)) \leqslant M, \quad \forall \xi \in R^3, \quad |\xi|^2 = (\xi, \xi) = 1,$$

$$(9) \qquad \left| f^1, f_0^1, \frac{\partial}{\partial s}(K_1^1, f^1, f_0^1)/\sqrt{a^1} \right| \leqslant M,$$

$$0 \leqslant a^i \in C[0, 1], \quad K_0^1(x) \in C^1(\Omega), \quad \operatorname{mes} \Gamma_1 > 0, \quad i = 1, 2.$$

Тогда для обобщенных решений $\omega^i = (s^i, p^i)$, *таких, что* $|\Delta p^i| \leqslant M$, *справедл оценка*

$$(10) \qquad \left(s, \int_{s^2}^{s_1} a^1(\xi)\, d\xi\right)_{\Omega_T} + \|p\|_{2,\Omega_T}^2 \leqslant C(M, T) H,$$

где $s = s^1 - s^2$, $p = p^1 - p^2$,

$$H \equiv \|m^1 - m^2\|_{2,\Omega} + \|s_0^1 - s_0^2\|_{2,\Gamma_{1T}} + \|s_0^1 - s_0^2\|_{2,\Omega} + \|p_0^1 - p_0^2\|_{2,\Gamma_{1T}} +$$

$$+ \|Q^1 - Q^2\|_{2,\Gamma_{2T}} + \|Q_1^1 - Q_1^2\|_{\Gamma_{2T}} + \|f^1 - f^2\|_{\infty, Y} + \|f_0^1 - f_0^2\|_{\infty, Y} +$$

$$+ \|K^1 - K^2\|_{\infty, Y} + \|K_1^1 - K_1^2\|_{\infty, Y} + \|K_0^1 - K_0^2\|_{\infty, \Omega} + (\|a^1 - a^2\|_{C[0,1]})^{1-q}$$

$Y = (0, 1) \times \Omega$ *и* $q = 1$ *в случае условия* (8′).

Доказательство теоремы 1 проводится с помощью метода сопряженной задачи для системы уравнений, примененного в [2] при доказательстве теоремы единственности.

Используя интегральные тождества (6), (7), справедливые для каждого из решений (s^i, p^i), после ряда преобразований получаем равенство

$$(11)\quad (m^1 s, L_1(\varphi, \psi))_{\Omega_T} + (p, L_2(\varphi, \psi))_{\Omega_T} = -\epsilon(m^1 s, \operatorname{div}(K_0^1 \nabla\varphi))_{\Omega_T} + E(\varphi, \psi, \mathfrak{M}^1 - \mathfrak{M}^2).$$

Здесь

$$(12)\quad L_1(\varphi, \psi) \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial t} + A^\epsilon \operatorname{div}(K_0^1 \nabla\varphi) + A_1(x, t)\nabla\varphi + C_1(x, t)\nabla\psi,$$

$$(13)\quad L_2(\varphi, \psi) \equiv \operatorname{div}(B(x, t)\nabla\psi - D(x, t)\nabla\varphi,$$

$$(14)\quad A^\epsilon \equiv A_0 + \epsilon,\quad A_0 = (C^i(s^1) - C^1(s^2))/m^1(s^1 - s^2),\quad C^i(s) = \int_0^s a_i(\xi)d\xi,$$

$$-A_1 = (\nabla p^1(K_1^1(x, s^1) - K_1^1(x, s^2)) + f_0^1(x, s^1) - f_0^1(x, s^2))/m^1(s^1 - s^2),$$

$$-C_1 = (\nabla p^1(K^1(x, s^1) - K^1(x, s^2)) + f_1^1(x, s^1) - f^1(x, s^2))/m^1(s^1 - s^2),$$

$$B = K^1(x, s^2),\quad D = K_1^1(x, s^2),$$

а функция E определяется разностью данных задач (1)–(5) $\mathfrak{M}^1 - \mathfrak{M}^2$.

Затем рассматривается начально-краевая задача

$$(15)\quad L_1(\varphi, \psi) = h_1,\quad L_2(\varphi, \psi) = h_2,$$

$$(16)\quad \varphi|_{\Gamma_{1T}} = \psi|_{\Gamma_{1T}} = K_0^1 \Delta\varphi \cdot n|_{\Gamma_{2T}} K_0^1 \nabla\psi \cdot n|_{\Gamma_{2T}} = \varphi|_{t=T} = 0$$

со специально выбранными функциями $h_i = h_i(s, p)$: Доказывается разрешимость задачи (15), (16) для всех $\epsilon > 0$ и в (11) делается предельный переход при $\epsilon \to 0$. Оценки слагаемых в левой части (11) снизу, а в правой сверху завершают доказательство.

Замечание 1. *В численных расчетах задачи (1)–(5) обычно сначала решают регуляризированное уравнение (1), в котором заменяется на $a^\epsilon = a + \epsilon$, $\epsilon > 0$. Согласно теореме 1 для разности $s - s^\epsilon$, $p - p^\epsilon$ между решениями точной и регуляризированной задачи справедлива оценка*

$$(17)\quad ((s - s^\epsilon)\int_{s^\epsilon}^{s} a(\xi)d\xi)_{\Omega_T} + \| p - p^\epsilon \|^2_{2,\Omega_T} \leqslant C\sqrt{\epsilon}.$$

Изучим теперь устойчивость решения в $\|\cdot\|_\Omega$ относительно изменения только начальных данных $s_0(x)$.

Отметим, что сложная структура вырождающейся сопряженной системы (12), (13) не позволяет применить здесь известные для одного вырождающегося параболического уравнения методы исследования устойчивости решения в $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

Пусть далее Δ обозначает оператор Лапласа и $g_k(x)$, $\lambda_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots$, решения задачи

$$(18)\quad \begin{aligned} &(\Delta + \lambda_k)g_k = 0,\quad x \in \Omega,\quad (g_i, g_k) = \delta_{ik},\\ &g_k|_{\Gamma_1} = 0,\quad \left.\frac{\partial g_k}{\partial n}\right|_{\Gamma_2} = 0. \end{aligned}$$

Известно, что $g_k(x)$ образуют полную систему, и для $\forall v(x) \in L_2(\Omega)$ имеем

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k v_k,\quad v_k = (v, g_k)_\Omega,\quad \| v \|^2_{H^{-1}(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2}{\lambda_k} \equiv -(v, \Delta^{-1} v)_\Omega.$$

Здесь Δ^{-1} обозначает обратный к Δ оператор при условиях (18). В частности, при $\Gamma = \Gamma_1$ имеем обычное определение:

$$\| v \|^2_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{g \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)} (|(v, g)_\Omega / \| g \|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)}).$$

Т е о р е м а 2. *Пусть $\omega^i = (s^i, p^i)$, $i = 1, 2$, – обобщенные решения задач (1) – (5), различающиеся только начальными данными $s_0^i(x)$; выполнены условия теоремы 1, $m = 1$, $K_0^{ij} = \delta^{ij} K_0$.*

Тогда справедлива оценка

$$\| s^1(x, t) - s^2(x, t) \|_{H^{-1}(\Omega)} + \| p^1 - p^2 \|_{2, \Omega_t} \leqslant C \| s_0^1(x) - s_0^2(x) \|_{H^{-1}(\Omega)}$$

$$\forall t \leqslant T; \quad C = C(M, T).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о использует равенство

$$(s(x, \tau), \varphi(x, \tau))_\Omega \Big|_{\tau = 0}^{\tau = t} + (S, L_1(\varphi, \psi))_{\Omega_t} + (p, L_2(\varphi, \psi))_{\Omega_t} = -\epsilon(s, \operatorname{div}(K_0 \nabla \varphi))_{\Omega_t}.$$

При этом в сопряженной задаче (15), (16) полагаем

$$h_1 = 0, \quad h_2 = p, \quad \varphi(x, t) = \Delta^{-1} S(x, t),$$

где оператор Δ^{-1} определяется задачей (18).

2. С т а б и л и з а ц и я о б о б щ е н н ы х р е ш е н и й. Рассмотрим теперь стационарное решение соответствующей задачи (1) – (5). Это решение $\omega_0 = (s_0(x), p_0(x))$, $0 \leqslant s_0 \leqslant 1$, удовлетворяет интегральным тождествам

(19) $\quad -(K_0 a(s_0) \nabla s_0 + K_1(x, s_0) \nabla p_0 + f_0(x, s_0), \nabla \varphi)_\Omega - (R_1, \varphi)_{\Gamma_2} = 0,$

(20) $\quad (K(x, s_0) \nabla p_0 + f(x, s_0), \nabla \psi)_\Omega + (R, \psi)_{\Gamma_2} = 0$

и условиям

(21) $\quad S_0(x) = 1, \;\; x \in \Omega, \;\; p_0(x) = p^0(x), \;\; x \in \Gamma_1.$

Здесь $R_1(x)$, $R(x)$ аналоги $Q_1(x, t)$, $Q(x, t)$ для стационарного случая. При $R_1 = R$ задача (19) – (21) допускает решение $s_0(x), p_0(x)$, в котором

(22) $\quad S_0(x) \equiv 1, \;\; x \in \Omega,$

а $p_0(x)$ удовлетворяет задаче

(23) $\quad \operatorname{div}(K(x, 1) \nabla p_0 + f(x, 1)) = 0,$

(24) $\quad (K \nabla p_0 + f) h = -R, \;\; x \in \Gamma_2,$

(25) $\quad p_0 = p^0(x), \;\; x \in \Gamma_1.$

При этом учитываются следующие свойства коэффициентов системы (1), (2) (см. [4, стр. 212]):

(26) $\quad K(x, 1) = K_1(x, 1), \;\; f(x, 1) = f_0(x, 1).$

З а м е ч а н и е 2. *Решение (22) – (25) соответствует физическому случаю полного вытеснения нефти, первоначально занимающей объем Ω, водой.*

Будем предполагать выполненными следующие условия:

(27) $\quad \displaystyle\int_{s^0(x, t)}^{1} a(\xi) d\xi \in L_1(\Gamma_1 \times (0, \infty)),$

$$(Q_1 - R_1, Q - R) \in L_1(\Gamma_2 \times (0, \infty)), \quad R_1 = R,$$

$$\lim_{t \to \infty} \| Q - R \|_{1, \Gamma_2} = 0, \quad | f'_{0s}, f'_s, K_{1s} | / a \leqslant M,$$

$$| \nabla p | \leqslant M, \quad s(x, t) \in C^{\alpha, \alpha/2}(\Omega_T), \quad k_{0i}(s) \in C^{1+\alpha}[0, 1], \quad i = 1, 2,$$

$$K_0(x) \in C^{1+\alpha}(\Omega), \quad (f, f_0) \in C^\alpha(\Omega) \times C^{1+\alpha}[0, 1], \quad 0 < \alpha < 1,$$

и существуют функции $\varphi(\tau)$, $g(\tau)$ такие, что

$$(28)\quad (g(\tau)/\tau)' > 0, \quad \tau > 0, \quad \int_\tau^1 \frac{d\xi}{g(\xi)} \to \infty, \quad \tau \to 0,$$

$$\varphi''(\tau) > 0, \quad \tau > 0, \quad \int_s^1 a(\xi)\,d\xi \geqslant \varphi(1-s), \quad \tau\varphi(y/\tau) \geqslant g(y), \quad 0 \leqslant \tau < \infty.$$

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\omega = (s(x,t), p(x,t))$, $\omega_0 = (s_0(x), p_0(x))$ *– обобщенные решения соответствующих задач* (1)–(5), (22)–(25) *и выполнены условия* (27), (28).

Тогда

$$\lim_{t \to \infty} (\| 1 - s \|_{1,\Omega} + \| p - p_0 \|_{W_2^1(\Omega)}) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3 приведено в [7].

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева
Сибирского отделения Российской академии наук
Новосибирск

Поступило
30 IV 1992

ЛИТЕРАТУРА

1. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 319 с. *Antontsev S.N., Kazhikhov A.V., Monakhov V.N.* In: Studies in Mathematics and its Applications. Amsterdam, 1990. 309 p. 2. *Антонцев С.Н., Доманский А.В.* – Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1984, т. 15, № 6, с. 15–27. 3. *Кружков С.Н.* – Вестн. МГУ. Сер. Матем. Мех, 1985, № 2, с. 28–33. 4. *Antontsev S.N., Diaz J.I.* – Nonlinear Analysis, Theory, Methods, Applications, 1991, vol. 16, № 4, p. 299–313. 5. *Антонцев С.Н.* Локализация решений вырождающихся решений механики сплошной среды. Новосибирск, 1986. 108 с. 6. *Калашников А.С.* – Прикл. мат. и мех., 1978, т. 42, № 1, с. 183–185. 7. *Доманский А.В.* – Дифференц. уравнения, 1991, т. 27, № 4, с. 641–648.