Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Solutions d'équations de réaction-diffusion non linéaires explosant au bord parabolique

Catherine BANDLE, Gregorio DIAZ et Jesús Ildefonso DIAZ

Résumé — Nous étudions l'existence, le comportement asymptotique près du bord parabolique et l'unicité des solutions qui explosent au bord parabolique, d'une classe d'équations de réaction-diffusion non linéaires et nous étendons des résultats établis pour le cas elliptique ([1], [4]). Un outil important est la construction de sur- et sous-solutions appropriées.

Solutions of reaction-diffusion equations blowing up on the parabolic boundary

Abstract — *We study the existence, the asymptotic behaviour near the parabolic boundary and the uniqueness of the solutions of nonlinear reaction-diffusion equations, which blow up on the parabolic boundary. We extend some results for elliptic problems given in* ([1], [4]). *A fondamental tool is the construction of suitable upper and lower solutions.*

Abridged English Version — We consider reaction-diffusion problems of the form

$$(\mathscr{P})\qquad \begin{cases} u_t - \Delta\phi(u) = -f(u) \quad \text{in } \mathrm{D}\times\mathbb{R}_+ \\ u(x, t) \to \infty \quad \text{as } (x, t) \to \Sigma := (\partial\mathrm{D}\times\mathbb{R}_+) \cup (\partial\mathrm{D}\times\{0\}). \end{cases}$$

Under the assumptions (C_1)-(C_3) we establish the existence of a minimal solution to the problem. The proof is based on a Perron process combined with *a priori* estimates. It is also shown that this minimal solution $u(x, t)$ converges to $\mathrm{V}(x)$, as $t \to \infty$, where V is the unique solution of the corresponding stationary problem

$$-\Delta\phi(v) + f(v) = 0 \quad \text{in D}, \qquad v(x) \to \infty \quad \text{as } x \to \partial\mathrm{D}.$$

We then prove that

$$\frac{u(x, t)}{z(t)} \to 1 \quad \text{as } (x, t) \to \partial\mathrm{D}\times\{0\}$$

where $z' = -f(z)$, $\lim_{t\to 0} z(t) = \infty$. Moreover we deduce

$$\frac{u(x, t)}{\mathrm{V}(x)} \to 1 \quad \text{as } (x, t) \to \partial\mathrm{D}\times\mathbb{R}_+$$

Under the additional assumptions (C_4)-(C_5), this behaviour can be shown to hold for any other solution of the original problem $\mathrm{U}(x, t)$. Since $\mathrm{U}(x, t)/u(x, t) \to 1$ as $(x, t) \to \Sigma$, a refined version of a Laetsch type argument implies that there is only one solution $u(x, t)$. This solution satisfies an isoperimetric inequality. Moreover in convex domains its level surfaces are also convex if $\phi(s) = s$. We also add some remarks on inhomogeneous problems. This Note extends results known for the corresponding stationary problem ([1], [2], [4]). The motivation came from a control problem [5]. The study of $(\mathscr{P})$ is also important, if

Note présentée par Jacques-Louis LIONS.

0764-4442/94/03180455 $ 2.00 © Académie des Sciences

we want to establish universal bounds in reaction-diffusion procesess with sinks (*see* [3] and its references).

---

1. Soit $D \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné de frontière $\partial D \in \mathscr{C}^3$. Désignons par Σ le bord parabolique $(D \times \{0\}) \cup (\partial D \times \mathbb{R}_+)$. Le sujet de cette Note est l'étude du problème parabolique non linéaire

$$(\mathscr{P}) \qquad \begin{cases} u_t - \Delta \phi(u) = -f(u) & \text{dans } D \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, t) \to \infty & \text{lorsque } (x, t) \to \Sigma. \end{cases}$$

Nous supposons que ϕ et f sont des fonctions positives, définies sur $\mathbb{R}_+$, vérifiant les conditions

$$(C_1) \qquad \phi(0)=0, \quad \phi'(s)>0 \quad \text{et} \quad \phi''(s) \geqq 0, \quad \forall s>0.$$

$$(C_2) \qquad f(0)=0 \quad \text{et} \quad f'(s) \geqq 0, \quad \forall s>0, \quad f'(0)<\infty.$$

Nous associons à $(\mathscr{P})$ le problème dynamique

$$(\mathscr{D}) \qquad \frac{dz(t)}{dt} = -f(z(t)) \quad \text{pour } t>0, \qquad z(t) \to \infty \quad \text{lorsque } t \to 0$$

et le problème stationnaire

$$(\mathscr{S}) \qquad \Delta\phi(v) = f(v) \quad \text{dans } D, \qquad v(x) \to \infty \quad \text{lorsque } x \to \partial D.$$

Si on pose $g(s) := f(\phi^{-1}(s))$ et $G(s) = \int_0^s g(\sigma)\, d\sigma$, il est bien connu ([1], [4]) que $(\mathscr{S})$ possède une *solution unique* $V(x)$ si et seulement si

$$(C_3) \qquad \chi(s) = \int_s^\infty (d\sigma/\sqrt{2\,G(\sigma)}) < \infty.$$

Les conditions (C_1)-(C_3) impliquent [1] que

$$\psi(s) := \int_s^\infty \frac{d\sigma}{f(\sigma)} < \infty.$$

Par conséquent, la solution de $(\mathscr{D})$ existe et elle est donnée par $z(t) = \psi^{-1}(t)$.

Remarques. — 1. Les conditions (C_1)-(C_3) sont vérifiées pour $\phi(s) = s^m$ avec $m \geqq 1$ et pour $f(s) = s^p$ avec $m < p$ ou bien pour $f(s) = e^s - 1$. □

2. Afin d'établir l'existence d'une solution de $(\mathscr{P})$, nous considérons le problème tronqué

$$(\mathscr{P})_n \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta\phi(u_n) = -f(u_n) & \text{dans } D \times \mathbb{R}_+ \\ u_n(x, t) = n & \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

De façon analogue nous définissons les problèmes $(\mathscr{D})_n$ et $(\mathscr{S})_n$. Nous désignons par v_n et par z_n les solutions correspondantes. Comme dans [1], [4] il est facile de voir que $v_n \to v$ dans $\mathscr{C}(K)$ si $n \to \infty$, pour tout compact $K \subset D$ et que v est une solution classique de $(\mathscr{S})$ [et donc $v(x) = V(x)$, $x \in D$]. De même $z_n \to z$ dans $\mathscr{C}(I)$, si $n \to \infty$, pour tout intervalle compact I de $\mathbb{R}_+$ et z est une solution de $(\mathscr{D})$. On a

THÉORÈME 1. — (*a*) *Supposons que* f *et* ϕ *vérifient* (C_1)-(C_2). *Alors* $\forall (x, t) \in D \times \mathbb{R}_+$

$$u(x, t) = \lim_{n \to \infty} u_n(x, t)$$

est une solution classique de $(\mathscr{P})$ *qui est minimale au sens que* $u(x, t) \leqq U(x, t)$ *pour toute autre solution* U *de* $(\mathscr{P})$. *On a aussi que* $u(x, t) > 0$ *et* $u_t(x, t) \leqq 0$, $\forall (x, t) \in D \times \mathbb{R}_+$.

(*b*) *Si de plus on suppose que*

$$(C_4) \qquad g(s_1) + g(s_2) \leqq g(s_1 + s_2), \qquad \forall s_1, s_2 > 0$$

alors le comportement asymptotique de u est donné par les expressions suivantes :

$$(1) \qquad \| u(., t) - V(.) \|_{L^\infty(D)} = O(z(t)) \quad \textit{quand} \quad t \to \infty,$$

$$(2) \qquad \frac{u(x, t)}{z(t)} \to 1 \quad \textit{lorsque} \quad (x, t) \to (x_0, 0) \quad \textit{avec} \quad x_0 \in D,$$

$$(3) \qquad \frac{u(x, t)}{V(x)} \to 1 \quad \textit{lorsque} \quad (x, t) \to (x_0, t_0) \in \Sigma \quad \textit{avec} \quad t_0 > 0.$$

Démonstration. — L'existence d'une solution classique u_n de $(\mathscr{P})_n$ peut être obtenue par la méthode de sur et sous-solutions, en prenant la fonction $\underline{u}_n = z_n(t) = (\psi^{-1}(t + \psi(n)))$ comme sous-solution et $\bar{u}_n = n$ comme sur-solution. Par le principe du maximum on a $u_n(x, t) \leqq u_{n+1}(x, t)$. En outre, si on définit $\hat{u} = \phi^{-1}(\phi(\hat{z}(t)) + \phi(\hat{v}(x))$ où $\hat{z}$ et $\hat{v}$ sont des solutions de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{S})$ avec f remplacée par $f/2$ on a

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \Delta \phi(\hat{u}) = -\frac{\phi'(\hat{z})}{\phi'[\phi(\hat{u})]} \frac{f(\hat{z})}{2} - \Delta \phi(\hat{v}).$$

En vue de (C_1), $\phi'[\phi(\hat{u})] \geqq \phi'[\phi(\hat{z})]$ ce qui montre que $\hat{u}$ est une sur-solution de $(\mathscr{P})_n$ et alors $u_n \leqq \hat{u}$. La suite $\{u_n(x, t)\}_n^\infty$ est par conséquent bornée uniformément sur chaque compact de $D \times \mathbb{R}_+$. Moyennant un raisonnement standard, on déduit que $\lim_{n \to \infty} u_n(x, t) = u(x, t)$ dans $\mathscr{C}(\bar{K})$ pour tout $K \subset\subset D \times \mathbb{R}_+$, $u \leqq \hat{u}$ et que u est une solution classique de $(\mathscr{P})$. Comme pour toute solution $U(x, t)$ on a $u_n(x, t) \leqq U(x, t)$ on conclut que $u(x, t) \leqq U(x, t)$. De plus $u(x, t) \geqq z(t) > 0$ [par (C_2)] et comme $\bar{u}_n(x, 0) = n$ est une sur-solution de $(\mathscr{S})_n$ on sait par [9] que $(u_n)_t \leqq 0$ et donc $u_t \leqq 0$. Pour prouver la deuxième partie nous observons que grâce à (C_4), $\bar{\mathbf{u}}_n = \phi^{-1}[\phi(z_n(t)) + \phi(v_n(x))]$ est une sur-solution de $(\mathscr{P})_n$. De plus, il est facile de voir (par exemple en utilisant l'inégalité de Kato) que $\underline{\mathbf{u}}_n(x, t) = \phi^{-1}[\max\{\phi(v_n(x)), \phi(z_n(t))\}]$ est une sous-solution de $(\mathscr{P})_n$. On a donc

$$\underline{\mathbf{u}}_n(x, t) \leqq u_n(x, t) \leqq \bar{\mathbf{u}}_n(x, t), \qquad \forall (x, t) \in D \times \mathbb{R}_+.$$

La concavité de ϕ^{-1} entraîne que $\bar{\mathbf{u}}_n \leqq z_n(t) + v_n(x)$. Puisque $z_n(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$ on obtient $u_n(x, t) \to v_n(x)$ quand $t \to \infty$. Les autres résultats sont une conséquence immédiate de l'inégalité

$$\phi^{-1}[\max\{\phi(V(x)), \phi(z(t)\}] \leqq u(x, t) \leqq z(t) + V(x), \qquad \forall (x, t) \in D \times \mathbb{R}_+. \quad \square$$

Si f est g vérifient en outre (C_1)-(C_4) la condition

$$(C_5) \qquad \liminf_{s \to \infty} \frac{\chi(\beta s)}{\chi(s)} > 1, \qquad \forall \beta \in (0, 1)$$

avec χ donné dans (C_2), alors on a ([1], [4]) $V(x)/w(\delta(x)) \to 1$ lorsque $x \to \partial D$. Ici, $w(\delta) = \phi^{-1}(\chi^{-1}(\delta))$ est la solution de

$$\phi''(w) = f(w) \quad \text{dans } \mathbb{R}_+, \qquad w(\delta) \to \infty \quad \text{quand } \delta \to 0,$$

et $\delta(x) := \operatorname{dist}(x, \partial D)$. Par conséquent on obtient le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. — *Sous les conditions* (C_1)-(C_5) *on a*

$$\frac{u(x,t)}{w(\delta(x))} \to 1 \qquad si \quad (x,t)\to(x_0,t_0)\in\Sigma \quad avec\ t_0>0. \quad \square$$

Le comportement asymptotique de u sur Σ subsiste pour n'importe quelle solution $U(x,t)$ de $(\mathscr{P})$.

THÉORÈME 2. — *Sous les conditions* (C_1)-(C_5) *les solutions* $U(x,t)$ *de* $(\mathscr{P})$ *ont toutes le même comportement asymptotique près de* Σ. *Plus précisément,*

$$\frac{U(x,t)}{z(t)} \to 1 \quad quand\ (x,t)\to(x_0,0), \qquad x_0\in D$$

$$\frac{U(x,t)}{w(\delta(x))} \to 1 \quad quand\ (x,t)\to(x_0,t_0)\in\Gamma, \qquad t_0>0.$$

Démonstration. — En vertu du théorème 1, il suffit d'établir la borne supérieure. En effet, soit $B\subset D$ une boule telle que $x_0\in\partial B\cap\partial D$ si $t_0>0$ et $x_0\in B$ si $t_0=0$. Considérons la solution minimale $\hat{u}(x,t)$ de $(\mathscr{P})$ dans $B\times\mathbb{R}_+$. Par le principe du maximum on a $U(x,t)\leqq\hat{u}(x,t)$. En appliquant le théorème 1 et le corollaire 1 on obtient le résultat. $\square$

THÉORÈME 3. — *Sous les conditions* (C_1)-(C_5) *le problème* $(\mathscr{P})$ *possède une seule solution.*

Démonstration. — Elle repose sur une idée classique de Laetsch. Il suffit de montrer que $u\geqq U$ pour toute autre solution U de $(\mathscr{P})$. On déduit des théorèmes 1 et 2 que $\forall\lambda>0$ arbitraire, $\limsup_{(x,t)\to\Sigma}\phi(U)/(1+\lambda)\phi(u)<1$. Donc il existe $C(\lambda)>0$ telle que $U(x,t)\leqq w(x,t)\,(:=\phi^{-1}((1+\lambda)\phi(u)))$ si $\operatorname{dist}((x,t),\Sigma)<C(\lambda)$. En utilisant que $u_t\leqq 0$ et que ϕ est convexe on déduit que $w_t-\Delta\phi(w)+f(w)=\eta_\lambda(x,t)$ dans $\{(x,t): \operatorname{dist}((x,t),\Sigma)>C(\lambda)\}$, où $[\eta_\lambda(x,t)]_+\to 0$ quand $\lambda\to 0$. En vertu de la dépendance continue par rapport aux données [6] on obtient le résultat. $\square$

Remarque 2. — Le problème $(\mathscr{P})$ joue un rôle important en théorie du contrôle ([5], [8]). Il fournit aussi des estimations universelles pour le problème parabolique aux limites correspondant (*voir* [3] et ses références). $\square$

Remarque 3. — Plusieurs propriétés du type isopérimétrique connues pour les solutions de l'équation de réaction-diffusion avec des conditions aux limites finies peuvent être étendues aux solutions du problème $(\mathscr{P})$. Par exemple, si on suppose (C_1), (C_2) et g convexe, alors

$$\min_D u(.,t)\geqq\min_B U(.,t), \qquad \forall t>0 \tag{4}$$

où B est la boule centrée à l'origine telle que $\operatorname{vol}(D)=\operatorname{vol}(B)$ et U est la solution de $(\mathscr{P})$ en $B\times\mathbb{R}_+$. Pour démontrer (4) il suffit d'appliquer la proposition 6 de [6] aux solutions approchées u_n et U_n. $\square$

Remarque 4. — Si D est strictement convexe et $\phi(s)=s$, on peut montrer que les ensembles de niveau de $u(.,t)$, $D_\delta(t)=\{x\in D: u(x,t)\leqq\delta\}$, sont convexes $\forall\delta>0$ et $\forall t>0$. Pour montrer ce résultat on doit d'abord supposer que $\phi(s)=s^\lambda$ avec $\lambda\in(1/2,1)$. On vérifie les hypothèses de [7] sur un problème associé à $(P)_n$. Ensuite on passe à la limite $\lambda\to 1$ et $n\to\infty$, et on obtient le résultat $\square$

4. PROBLÈMES NONHOMOGÈNES. — Supposons $1\leqq m<p$. Considérons l'équation nonhomogène

$$u_t-\Delta u^m=-u^p+h(x)+k(t) \quad \text{dans}\ D\times\mathbb{R}_+ \tag{$\tilde{\mathscr{P}}$}$$

où h et k sont des fonctions positives et continues dans $D \times \mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+$. Nous supposerons en outre que

$$(C_6)\qquad \text{le problème} \left\{ \begin{array}{ll} \tilde{z}' = -\tilde{z} + k(t), & t > 0 \\ \lim_{t \to 0} \tilde{z}(t) = \infty \quad \text{et} & \lim_{t \to \infty} \tilde{z}(t) = 0 \end{array} \right. \text{ a une solution}$$

$$(C_7)\qquad \lim_{x \to \partial D} h(x)\,\delta^q(x) = l > 0 \qquad \text{pour} \quad q \in \left[2, \frac{2p}{p-m}\right].$$

Grâce à (C_7) l'équation

$$(\tilde{\mathscr{S}})\qquad -\Delta v^m + v^p = h \quad \text{dans D}$$

possède une solution unique $\tilde{V}$, qui vérifie ([1], [4])

$$\lim_{\delta(x) \to 0} \tilde{V}(x)(\delta(x))^{2/(p-m)} = \tau^{1/m} \quad \text{avec } \tau \text{ solution de } \left[\frac{2(mp+m^2)}{(p-m)^2(1-\tau)}\right]^{p/(p-m)} \tau = l.$$

D'autre part, si on a

$$(C_8)\qquad \lim_{x \to \partial D} h(x)\,\delta^q(x) = l > 0 \qquad \text{pour} \quad q > \frac{2p}{p-m}$$

le problème $(\tilde{\mathscr{S}})$ possède une solution unique $\tilde{V}$ qui vérifie [4]

$$\lim_{\delta(x) \to 0} \tilde{V}(x)(\delta(x))^{q/p} = l^{-1/m}.$$

THÉORÈME 4. — (*a*) *Le problème* $(\tilde{\mathscr{P}})$ *avec* $u \to \infty$ *quand* $(x, t) \to \Sigma$ *a une solution unique* U *qui satisfait* (1)-(3) *du théorème* 1 *à condition de replacer* V et z *par* $\tilde{V}$ *et* $\tilde{z}$.

(*b*) *Si en outre*

$$\lim_{\delta(x) \to 0} h(x)(\delta(x))^q = l > 0, \qquad q \geqq 2,$$

toutes les solutions du problème $(\tilde{\mathscr{P}})$, *indépendamment des conditions au bord convergent vers* $\tilde{V}$ *lorsque* $t \to \infty$.

Démonstration. — La démonstration de (*a*) est analogue à celle du cas homogène. (*b*) découle du fait que $\underline{u} = 0$ est une sous-solution et $\overline{u} = U$ une sur-solution. Donc, localement $u(x, t)$ est borné uniformément. En vue d'un résultat de [4] toute fonction vérifiant $-\Delta v^m + v^p = h(x)$ dans D coincide avec $\tilde{V}(x)$. □

Remarque 5. — Les résultats de cette Note s'étendent au cas où l'explosion a lieu dans un sous-ensemble de Σ et au cas où Δ est remplacé par un opérateur elliptique plus général. L'existence lorsque $u(x, 0)$ appartient à $L^1_{loc}(\Omega)$ a été étudiée dans [10].

G. D. et J.I.D. sont soutenus par le projet PB 90/0620 de la DGICYT (Espagne).

Note remise le 15 octobre 1993, acceptée le 19 octobre 1993.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] C. BANDLE et M. MARCUS, *J. Anal. Math.*, 58, 1992, p. 9-24.

[2] C. BANDLE et M. MARCUS, *Asymptotic behaviour of solutions and their derivatives with blow up on the boundary* (manuscrit).

[3] M. G. CRANDALL, P.-L. LIONS et P. SOUGANIDIS, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 105, 1989, p. 163-190.

[4] G. DÍAZ et R. LETELIER, *Nonlinear Analysis* MTA, 20, 1993, p. 97-125.

[5] J. I. DÍAZ, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 312, série I, 1991, p. 519-522.

[6] J. I. DÍAZ, *Memorias de la Real Academia de Ciencias de Madrid*, XXVIII, 1991.

[7] N. J. KOREVAAR, *Ind. Univ. Math. J.*, 32, n° 4, 1983, p. 603-614.

[8] J. M. Lasry et P.-L. Lions, *Math Ann.*, 283, 1989, p. 583-630.

[9] D. Sattinger, *Ind. Univ. Math. J.*, 21, 1972, p. 979-1000.

[10] J. L. Vazquez et M. Walias, Existence and uniqueness of solution of diffusion-absorption equations with general data, *Journal of Differential and Integral Equations* (à paraître).

C. B. : *Institut Mathématique, Université de Bâle, Rheinsprung* 21, CH-4051 *Bâle, Suisse;*
G. D. et J. I. D. : *Departamento de Matemática Applicada, Universidad Complutense de Madrid*, 28040 *Madrid, Espagne.*