C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série I, p. 173-177, 1998
Contrôle optimal/*Optimal Control*

Sur la contrôlabilité approchée de problèmes paraboliques avec phénomènes d'explosion

Jesús Ildefonso DIAZ [a], **Jacques-Louis LIONS** [b]

[a] Universidad Complutense de Madrid, Departemento de Matematica Aplicada, 28040 Madrid, Espagne
[b] Collège de France, 3, rue d'Ulm, 75005 Paris, France

(Reçu le 2 juin 1998, accepté le 15 juin 1998)

Résumé. On considère les systèmes distribués, gouvernés par des équations paraboliques qui peuvent exploser en temps fini, et qui sont contrôlés par les conditions initiales. La question étudiée ici est la suivante : peut-on choisir la condition initiale de manière que la solution n'explose pas avant un temps donné T et soit, à l'instant T, aussi proche que l'on veut d'un état donné a priori ? Quelques résultats généraux dans ce sens sont donnés ici. Les principes des démonstrations sont donnés pour le modèle simple :

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y - \lambda y^3 = 0, \quad \lambda > 0\,;$$

des cas plus généraux étant indiquées en remarques. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Abstract. *We consider in this Note distributed systems governed by parabolic evolution equations which can blow up in finite time and which are controlled by initial conditions. We study here the following question: can one choose the initial condition in such a way that the solution does not blow up before a given time T and which is, at time T, as close as we wish from a given state? Some general results along these lines are presented here. The main elements of the proof are given on an example, namely the equation*

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y - \lambda y^3 = 0, \quad \lambda > 0;$$

more general cases being indicated in final remarks. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

1. Énoncés des premiers résultats

Dans l'ouvert Ω borné de $\mathbf{R}^n$, on considère l'équation

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y - \lambda y^3 = 0, \tag{1}$$

Note présentée par Jacques-Louis Lions.

où λ est donné > 0. On suppose, pour fixer les idées, que

$$y = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{2}$$

et on se donne la condition initiale

$$y(x, 0) = u(x), \tag{3}$$

où $u \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$.

Il existe une solution unique *locale en t*, définie dans un intervalle *maximal* $[0, T_m[$, $T_m = T_m(u)$ et $||y(t)||_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \uparrow +\infty$ lorsque $t \to T_m(u)$, si $T_m(u) < \infty$.

Naturellement, pour certaines données initiales, on peut avoir $T_m(u) = +\infty$. C'est trivialement le cas si u vérifie :

$$-\Delta u - \lambda u^3 = 0, \ \ u = 0 \quad \text{sur} \ \partial\Omega, \quad u \neq 0 \tag{4}$$

(de telles fonctions u existent), puisqu'alors $y = u$ pour tout $t > 0$.

On peut donc considérer le problème suivant : on se donne $T > 0$ et on considère l'ensemble $\mathcal{E}(T)$ non vide des éléments u de $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ tels que $T_m(u) > T$. *Lorsque u décrit $\mathcal{E}(T)$, l'ensemble décrit par $y(T; u)$ est-il dense dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$?*

Un premier résultat dans ce sens est le suivant :

Théorème 1. – *On se donne g avec*

$$g \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega}),\ g = 0 \ \ \textit{au bord de} \ \ \Omega \quad (g \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega}) \cap \mathrm{C}_0(\Omega)), \tag{5}$$

et on se donne $\varepsilon > 0$.

Il existe alors $u \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega}) \cap \mathrm{C}_0(\Omega)$ et il existe $\tau_0 > 0$ tel que

$$||y(\tau_0; u) - g||_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon. \tag{6}$$

Remarque 1. – Évidemment $\tau_0 < T_m(u)$, de sorte que (6) a un sens.

Remarque 2. – La démonstration constructive qui suit montre que, en outre, on peut choisir u tel que

$$||y(t; u)||_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \leq ||g||_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \quad \text{pour } t \in [0, \tau_0]. \tag{7}$$

Remarque 3. – Le théorème 1 va dans le sens d'une réponse positive à la question générale posée mais partielle, puisque l'on peut « approcher » g à un instant τ_0 qui n'est pas entièrement à notre disposition (en fait doit être suffisamment petit).

Remarque 4. – Soit g donné dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$, $p \geq 1$ fini quelconque. Alors il existe u et τ_0 comme dans (6), mais dans la norme $\mathrm{L}^p(\Omega)$ au lieu de $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$.

Il suffit de commencer par approcher g dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$ par g_* vérifiant (5) puis d'utiliser le théorème 1.

Remarque 5. – La démonstration (esquissée ci-après) fournit des informations qualitatives sur *un* contrôle u (celui que l'on va construire) ; par exemple, u est nul (resp. > 0, < 0) là où g est nulle (resp. > 0, < 0).

Remarque 6. – Il n'y a pas d'unicité du contrôle u (en fait du couple $\{u, \tau_0\}$) vérifiant (6).

Dans le résultat suivant, on peut choisir $\tau_0 = T$ (qui était l'objectif initial) au moins pour *certaines* fonctions g.

THÉORÈME 2. – *On se donne g régulière comme dans* (5) *et avec en outre*

$$-\Delta g = \lambda g^3, \quad g \neq 0, \tag{8}$$

et on se donne $\varepsilon > 0$, et $T > 0$. *Il existe alors* $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cup C_0(\Omega)$ *différent de g, tel que*

$$||y(T; u) - g||_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon. \tag{9}$$

Remarque 7. – Comme dans la remarque 1, $T < T_m(u)$.

Remarque 8. – Le résultat (9) est encore vrai lorsque, au lieu de (8), on a

$$||\Delta g + \lambda g^3||_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2T}\exp(-\beta T),$$
$$\beta = 3\lambda(||g||_{L^\infty(\Omega)} + 1)^2.$$

Avant d'énoncer quelques résultats plus généraux, nous donnons une indication des démonstrations des théorèmes 1 et 2.

2. Démonstration du théorème 1

On désigne par $Y(t; \tau, \mu)$ la solution de :

$$\left| \begin{aligned} &\frac{dY}{dt} = \lambda Y^3, \text{ définie pour } t < \tau, \\ &Y(\tau) = \mu, \end{aligned} \right. \tag{10}$$

donnée explicitement par

$$Y = \mu(1 + 2\lambda(\tau - t)\mu^2)^{-1/2}. \tag{11}$$

Posons

$$U(x, t) = Y(t; \tau, g(x)), \quad x = \text{paramètre}. \tag{12}$$

La fonction U est régulière, vérifie :

$$\begin{gathered} \frac{\partial U}{\partial t} = \lambda U^3, \\ U(x, \tau) = g(x), \quad U(x, t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{gathered} \tag{13}$$

et

$$||U(\cdot, t)||_{L^\infty(\Omega)} \leq ||g||_{L^\infty(\Omega)}. \tag{14}$$

On définit

$$u_\tau(x) = U(x, 0), \tag{15}$$

et on considère les équations (1), (2), (3) avec $u = u_\tau$. On note que $\pm Y(t; \tau, ||g||_{L^\infty(\Omega)})$ est sur- (resp. sous-) solution pour ce système, ce qui montre que

$$T_m(u_\tau) > \tau$$

et

$$|y(x;t;u_\tau)| \leq Y(t;\tau,||g||_{L^\infty(\Omega)}) \leq ||g||_{L^\infty(\Omega)}. \tag{16}$$

Grâce à l'estimation (16) on voit que y est solution de (1) où l'on peut tronquer λ^3. Précisément, on peut remplacer λy^3 par $f(y)$ donné par :

$$f(y) = \left| \begin{array}{l} \lambda y^3 \text{ si } |y| < ||g||_{L^\infty(\Omega)},\ \lambda||g||^3_{L^\infty(\Omega)} \text{ si } y \geq ||g||_{L^\infty(\Omega)} \\ \text{et } -\lambda||g||^3_{L^\infty(\Omega)} \text{ si } y \leq -||g||_{L^\infty(\Omega)}. \end{array} \right. \tag{17}$$

Par ailleurs, grâce à (14), $f(U) = \lambda U^3$ de sorte que

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \Delta U = f(U) + h, \tag{18}$$

où

$$\begin{aligned} h = -\Delta U = &-6\lambda(\tau - t)g|\nabla g|^2(1 + 2\lambda(\tau - t)g^2)^{-5/2} \\ &+ (1 + 2\lambda(\tau - t)g^2)^{-3/2}\Delta g \in C(\overline{\Omega} \times [0,\tau]). \end{aligned} \tag{19}$$

Si ω désigne la constante de Lipschitz de f, on a :

$$||y(t;u_\tau) - U(t)||_{L^\infty(\Omega)} \leq e^{\omega t} \int_0^t ||h(s)||_{L^\infty(\Omega)} ds.$$

Prenant $y = \tau$, on a donc

$$||t(\tau;u_\tau) - g||_{L^\infty(\Omega)} \leq e^{\omega\tau} \int_0^\tau ||h(s)||_{L^\infty(\Omega)} ds. \tag{20}$$

Dans (20) h dépend de τ (*voir* (19)), mais il est possible de choisir τ_0 de manière que

$$e^{\omega\tau_0} \int_0^{\tau_0} ||h(s)||_{L^\infty(\Omega)} ds \leq \varepsilon$$

et, τ_0 étant ainsi choisi, le couple $\{u_{\tau_0}, \tau_0\}$ vérifie (6). $\square$

3. Démonstration du théorème 2

Soit $\varepsilon \in]0,1[$. On introduit

$$\overline{\omega} = 3\lambda(||g||_{L^\infty(\Omega)} + 1)^2,\ \ \widetilde{\varepsilon} = \varepsilon \exp(-\overline{\omega}T).$$

D'après le théorème 1, il existe $\{v_0, \tau_0\}$ tels que

$$||y(\tau_0, v_0) - g||_{L^\infty(\Omega)} \leq \widetilde{\varepsilon}. \tag{21}$$

On peut toujours supposer $\tau_0 < T$. (Si $\tau_0 \geq T$, la démonstration est terminée.)
On introduit

$$z = y(x,t;v_0) - g,\ \text{définie pour}\, t < T_m(v_0). \tag{22}$$

On définit ensuite

$$T^* = \sup\{t \,|\, t \geq \tau_0,\ ||z(\overline{t})||_{L^\infty(\Omega)} < 1 \text{ pour } \overline{t} \in (\tau_0, t)\}, \tag{23}$$

avec bien sûr $T^* < T_m(v_0)$. Donc, par construction $||z(t)||_{L^\infty(\Omega)} < 1$ pour $t \in (\tau_0, T^*)$ et par conséquent, $\lambda(z+g)^3 - \lambda g^3 = \phi(x,z)$, où $\phi(x,s)$ est la fonction lipschitzienne, de constante de Lipschitz $\leq \overline{\omega}$, donnée par :

$$\phi(x,s) = \left| \begin{array}{ll} \lambda(s+g(x))^3 - \lambda g(x)^3 & \text{si } |s| \leq 1, \\ \lambda(1+g(x))^3 - \lambda g(x)^3 & \text{si } s > 1, \\ \lambda(-1+g(x))^3 - \lambda g(x)^3 & \text{si } s < -1. \end{array} \right.$$

On déduit alors de

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z = \phi(x,z) \quad \text{sur } \Omega \times (\tau_0, T^*), \\ ||z(\tau_0)||_{L^\infty(\Omega)} \leq \hat{\varepsilon},\ z = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (\tau_0, T^*), \end{array}$$

que

$$||z(t)||_{L^\infty(\Omega)} \leq e^{\overline{\omega}t} ||z(\tau_0)||_{L^\infty(\Omega)} \text{ pour } t \in (\tau_0, T^*). \tag{24}$$

Donc $||z(T^*)||_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon e^{\overline{\omega}(T^*-T)}$ et alors $T \leq T^*$ (sinon $||z(T^*)||_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon < 1$, incompatible avec la définition (23)). On peut donc utiliser (24) pour $t = T$, ce qui donne $||z(T)||_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon$ et démontre le théorème 2.

Remarque 9. – On a implicitement vérifié que $T_m(v_0)$ est d'autant plus grand que $y(\tau_0; v_0)$ est plus près de g, la condition (8) étant vérifiée.

4. Remarques diverses

Remarque 10. – Les résultats sont valables, avec des démonstrations analogues, si λy^3 est remplacé par $f(y)$:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f(y),$$

où $\int_{-\infty}^{-s_0} \frac{ds}{f(s)}$ et $\int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{f(s)}$ sont finies pour un $s_0 \geq 0$ avec $|f(s_0)| > 0$.

On pourra ainsi prendre

$$f(y) = \lambda |y|^{p-1} y,\ p > 1,$$
$$f(y) = \lambda \exp|y|.$$

Remarque 11. – Les résultats sont également valables si $-\Delta$ est remplacé par un opérateur elliptique du 2e ordre, éventuellement non linéaire.

Remarque 12. – Soient ε et g donnés comme au théorème 2. On définit l'ensemble (non vide)

$$K = \{v | v \in L^\infty(\Omega), ||y(T;v) - g||_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon\}. \tag{25}$$

Désignons par K_1 le sous-ensemble de K formé des $v \in K$ tels que

$$||y(T;v)||_{L^\infty(\Omega)} \leq ||g||_{L^\infty(\Omega)} + 1 \text{ pour } t \in [0,T]. \tag{26}$$

On vérifie *qu'il existe* $v_0 \in K_1$ tel que

$$||v_0||_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{||v||_{L^\infty(\Omega)},\ v \in K_1\}. \tag{27}$$

En revanche, on ne sait pas s'il existe $\widetilde{v}_0 \in K$ qui réalise

$$\inf\{||v||_{L^\infty(\Omega)},\ v \in K\}.$$