La Investigación Fundamental en Fusión: El papel de la Matematica Aplicada

por

J.I. Díaz
Departamento de Matemática Aplicada
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

Contrato 73/93 de la Asociación CIEMAT/EURATOM

Dado el caracter primordialmente pedagógico de esta VIII Escuela sobre Fusión por confinamiento Magnético, la charla fue enfocada con un caracter generalista prescindiendo de detalles técnicos que pudiesen ser de dificil seguimiento por el auditorio. En una primera parte se hizo una rápida presentación de la Matemática Aplicada actual, sus fines y métodos. La segunda parte versó sobre el tratamiento matemático de un modelo bidimensional de confinamiento magnético de un plasma en un Stellarator.

En la metodología de la Matemática Aplicada se pueden distinguir al menos seis etapas distintas que la caracterizan. En primer lugar se aborda un problema *real* que sera objeto de análisis. Obviamente, es imposible hacer un listado exhaustivo de los numerosos problemas *reales* susceptibles de un tratamiento matemático. A este fin, parece relevante acudir a algunas de las declaraciones de objetivos de organismos científicos internacionales tales como, por ejemplo, el *Programa Marco de la Unión Europea.* Allí se puede encontrar una clasificación de los retos de mayor interés para la sociedad europea. Que decir tiene que la Fusión Nuclear aparece ocupando un lugar muy importante en el capítulo de *Energía.* Otro muchos temas son englobados en otros capítulos tales como *Tecnología de la Información y Comunicación, Tecnologías Industriales y de los Materiales, Medio Ambiente* y, por ultimo, *Ciencias y Tecnología del Ser Vivo.*

La segunda etapa la constituye la *Modelización Matemática.* El modelo matemático se introduce como un prototipo, bajo simplificaciones de distinto grado que hacen que estos constituyan una especie de jerarquía en función de su complejidad. El proceso de la Modelización comienza por detectar las variables a determinar y las que se pueden suponer como datos. Los principios básicos de las distintas ciencias conducen a ecuaciones y condiciones auxiliares sobre las incógnitas. No siempre se consiguen formular un numero suficiente de ecuaciones por lo que se ha de acudir a una revisión del proceso o bien a introducir *relaciones constitutivas* que completen un modelo del que quepa esperar su resolución.

Los modelos dependen pues de los objetivos a lograr y se pueden clasificar en atención a numerosas alternativas tales como: Modelos directos/ modelos inversos, deterministas/estocásticos, continuos/discretos, transitorios /estacionarios, microscópicos/macroscópicos, etc.

El *Análisis Matemático* del modelo constituye la tercera etapa. Este tratamiento suele comenzar por la tarea de mostrar que existe al menos una solución (de poco sirven aquellos modelos para los que se puede demostrar que no admiten ninguna solución). Las técnicas usuales de Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias o en Derivadas Parciales) son las de más frecuente uso en estos propósitos. El estudio de la unicidad o multiplicidad de soluciones resulta de una gran importancia en la practica y a veces el resultado obtenido depende de uno o varios parámetros significativos en el proceso real. La dependencia continua respecto de los datos, la estabilidad, el comportamiento asintótico y el estudio de diversas propiedades cualitativas tales como la existencia de frentes, etc, forman un conjunto de temas de obligado estudio. Finalmente se llega a la necesidad de cuantificar y visualizar las respuestas mediante técnicas de Análisis Numérico y su implementacion en ordenador. Este es un extenso e importante capitulo de la Matemática Aplicada imposible de describir aquí por la extensión que ello requeriría.

Una etapa que no siempre recibe la atención que se merece en el mundo académico de refiere a la *Validación.* Se hace poco menos que imprescindible confrontar los resultados matemáticos obtenidos con el conocimiento accesible por otro métodos: soluciones exactas en casos particulares, tratamiento analítico, mediciones experimentales etc. Obviamente, la declaración de objetivos es la que debe servir para dar como buenos los resultados o bien para acudir a modelos de la jerarquía correspondientes a una mayor complejidad.

La *Predicción y el Control* pueden ser entendidos como la culminación del proceso. La visualización de los resultados numéricos nos sumerge en una especie de realidad virtual que nos puede permitir una experimentación dificil o costosa (piensese en problemas de petróleo, energía nuclear, diseño de coches y aviones, etc) y a veces imposible de llevar a cabo sobre el proceso real (caso de problemas en Medio Ambiente, Economía, Astrofísica etc). Una de las mayores dificultades a la hora de aplicar esta metodología se refiere a la obtención de datos, otras al exceso de información que se precisa asimilar y otras a que los datos son claramente incompletos. La cuestión de como actuar sobre los sistemas para alcanzar estrategias deseadas (minimización o maximización de ciertos criterios) es el objeto de la Optimización y de la Teoría de Control, parcelas ampliamente desarrolladas de la Matemática Aplicada.

La segunda parte de la charla consistió en una muestra de la aplicación de las algunas de las etapas antes mencionadas al problema del confinamiento magnético de un plasma en un Stellarator. A la hora de estudiar el equilibrio, las ecuaciones básicas son las de la magnetohidrodinámica (MHD)

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

en las que p designa la presión, $\mathbf{B}$ el el campo magnético y $\mathbf{J}$ la densidad de corriente. Tras introducir las coordenadas de Boozer en el vacío, siguiendo un importante trabajo debido a T.C. Hender y B. Carreras, se aplica un proceso de promedio obteniendose la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho < \frac{B^\rho}{D} >) + \frac{\partial}{\partial \theta}(< \frac{B^\theta}{D} >) = 0,$$

sobre las dos primeras componentes contravariantes de $\mathbf{B}$ lo que permite definir una incógnita escalar: *la función de flujo poloidal promediadado* $\psi = \psi(\rho, \theta)$ definida mediante

$$< \frac{B^\rho}{D} >= \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad < \frac{B^\theta}{D} >= -\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \qquad .$$

Los autores antes mencionados también mostraron que $< B_\phi >$ y $< p >$ son únicamente funciones de ψ

$$F(\psi) :=< B_\phi > \quad \text{y} \quad p(\psi) :=< p > .$$

Hender y Carreras [HC] obtuvieron, así mismo, una ecuación de tipo Grad-Shafranov para ψ

$$-\mathcal{L}\psi = a(\rho, \theta)F(\psi) + F(\psi)F'(\psi) + b(\rho, \theta)p'(\psi)$$

donde $\mathcal{L}$ es un cierto operador de segundo orden. Esta ecuación se debe completar de manera adecuada sobre la zona de vacío obteniendose un problema con una frontera libre dada por el conjunto de nivel $\{\psi = 0\}$, con lo que la región de plasma corresponde a $\{\psi > 0\}$ y la de vacío a $\{\psi < 0\}$. Tomando una región Ω suficientemente grande y de borde perfectamente conductora, es fácil ver que surge la condición de contorno $\psi = \gamma \quad$ en $\partial\Omega$. Finalmente, como la función F no es conocida a priori (por el contrario la presión se supone conocida como una ley constitutiva), es claro que hay que acudir a otra información adicional para que el problema tenga alguna posibilidad de estar bien propuesto. Esta condición es la llamada de Stellarator y asegura que la corriente en el interior de cada superficie magnética ha de ser nula. Esto se formula en los siguientes terminos

$$\int_{\{\psi\geq t\}}[F(\psi)F'(\psi)+\lambda b\psi_+]\rho d\rho d\theta=0 \text{ para todo } t\in[\,\inf\psi,\ \sup\psi] \tag{0.1}$$

El modelo matemático se puede enunciar, pues, en los siguientes términos:Dado un abierto acotado Ω de $I\!R^2$ con frontera regular, y dados $\lambda>0, F_v>0, a, b$ funciones de Ω en $I\!R$, con $b>0$ en Ω y $\gamma<0$, hallar $u:\Omega\to I\!R$ y $F\in\mathcal{C}^0(I\!R;[0,\infty))$ tales que $F(s)=F_v$ si $s\leq 0$, con (u,F) satisfaciendo

$$(\mathcal{P}_I)\begin{cases} -\mathcal{L}u=aF(u)+\left(\frac{F^2}{2}\right)'(u)+\lambda bu_+ \quad \text{en } \Omega, \qquad u=\gamma \qquad \text{en } \partial\Omega, \\ \int_{\{u>t\}}[\left(\frac{F^2}{2}\right)'(u)+p'(u)b]dx=0, \forall t\in(-\infty,\ \sup u]. \end{cases}$$

El tratamiento matemático de este problema ha sido realizado en diversos trabajos del autor en colaboración con J.M. Rakotoson (de la Universidad de Poitiers) así como otros en colaboración de los doctorandos de la UCM J.F. Padial y G. Galiano. La aplicación de técnicas del Análisis Numérico a este problema ha sido llevada a cabo recientemente por A. Bermudez de Castro y M.L. Seoane de la Universidad de Santiago de Compostela.