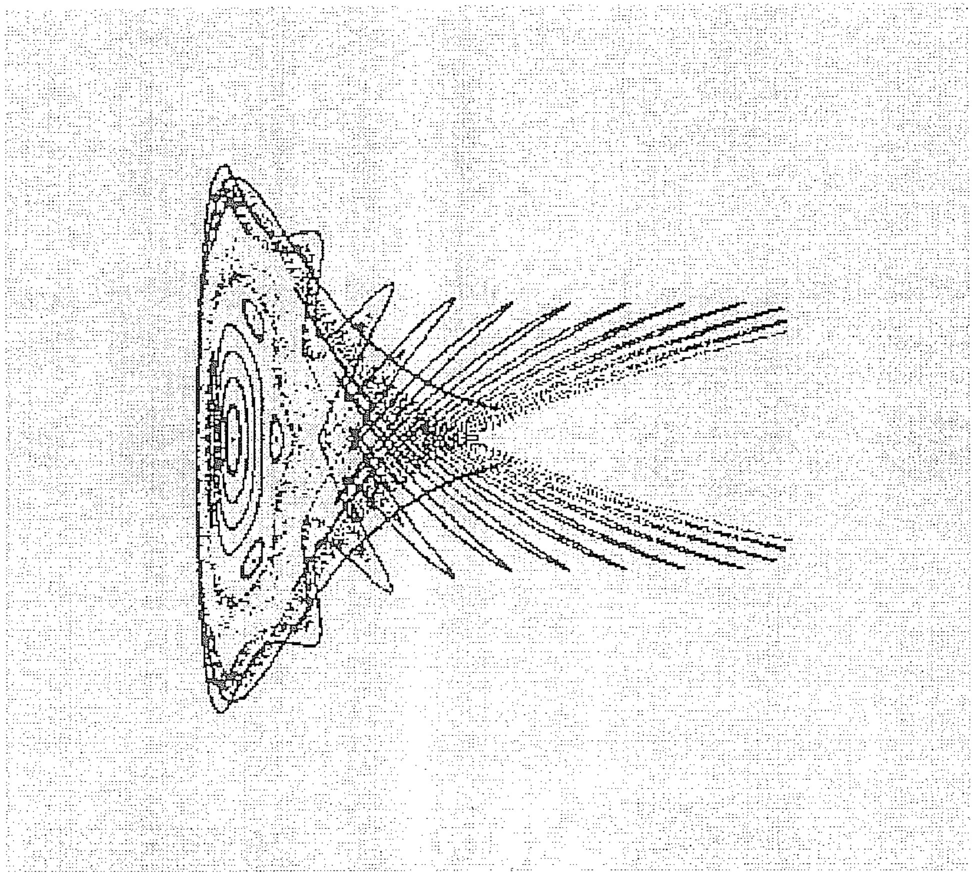
BOLETÍN

DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE MATEMÁTICA APLICADA

NÚMERO 13 JUNIO 1998



SēMA

EL MUNDO DE LA CIENCIA

Y

LAS MATEMÁTICAS DEL MUNDO

JESÚS ILDEFONSO DÍAZ
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Extracto del discurso leído por el Profesor Díaz en el acto de su recepción en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. El discurso completo ha sido publicado por la Academia.

1 La calidad frente a la polémica estéril: puro *versus* aplicado

La clave de la aplicabilidad de un resultado matemático radica en su calidad, independientemente de si ha sido concebido en aras de una aplicación concreta. La vieja polémica entre *matemática aplicada* y *matemática pura*, ya iniciada con el cruce de insinuaciones entre Jacobi y Fourier a principios del XIX[1] me parece estéril e infructuosa. Tampoco es nada atrayente la cuestión de si se debería matizar entre *matemática aplicada* y *matemática aplicable*. Cuando las matemáticas involucradas son de calidad se pierde toda distinción y lo que las caracteriza es su unidad, su potencia y su universalidad. En una primera aproximación se podría decir que la matemática es buena si sobrevive y es mala si lo más correcto es ignorarla antes que desaparezca de la escena. Obviamente esto es excesivamente vago. Es claro que la noción de buena y mala matemática es casi una cuestión de gusto personal, como lo prueba la provocadora y difícilmente respetable toma de posición de algunos matemáticos relevantes (véase Halmos [28]). En cualquier caso, parece haber un acuerdo común sobre lo que son matemáticas buenas y las que no lo son. Algunos autores se atreven a hacer un listado de los criterios que definen una buena matemática (véase Saari [50]). Yo prefiero mantenerme en una cierta ambigüedad consensuada.

[1]Véase, por ejemplo, Dieudonné [19].

En realidad, la compleja dialéctica entre ciencia pura y ciencia aplicada no se limita al campo de las matemáticas y es uno de los problemas más profundos de la historia científica. De hecho, tal polémica a veces viene enunciada en términos de ciencia *versus* tecnología, reservando a la primera un carácter puro y asignando a la segunda, de manera conceptual, el papel de ciencia aplicada [2].

Volviendo a la calidad como alternativa a esta polémica, es de señalar que ese espíritu congeniador no es nuevo y ya Leonhard Euler, uno de los más grandes "matemáticos aplicados" de la historia, nos decía en 1747 (Euler [22], I.2, pp. 63-63):

> ... ni el autor es perturbado por la autoridad de los más grandes matemáticos cuando declaran algunas veces que la teoría de números es sin embargo inútil y no merece investigación. En primer lugar, el conocimiento es siempre bueno en sí mismo, incluso si parece alejado del uso común. En segundo lugar, todos los aspectos de la verdad que son accesibles a nuestra mente están tan cerca unos de otros que no deberíamos rechazar ni siquiera los que no tengan utilidad. Además, incluso si la demostración de alguna proposición no parece tener un uso inmediato, sucede con frecuencia que el método por el que ese problema ha sido resuelto abre el camino al descubrimiento de resultados más útiles.

Euler conocía mejor que nadie de su tiempo la íntima relación entre la "inútil" teoría de números y el cálculo de perturbaciones para el estudio de las trayectorias de los planetas[3]. El ejemplo de Euler no es el único, ha habido, hay y habrá casos como el suyo: los más recientes de von Neumann y Wiener son reivindicados por los defensores más radicales de la matemática pura y de la aplicada.

Hubo una época en la que esa pretendida separación entre las llamadas matemáticas puras y aplicadas era ficticia pues los matemáticos cultivaban ambos enfoques, además de otras ciencias. La separación se puede decir que alcanzó su máximo con la irrupción de la matemática más abstracta desarrollada por el grupo Bourbaki aunque algunos, como Auslander y Tolimieri [5], sitúan ese

[2]Aunque la polémica tiene un interés actual (véase, por ejemplo, Sánchez Ron [51]), tiene antecedentes lejanos que se remontan al siglo X. Así nos lo describe el ingeniero árabe Al-Farabi (870-950) en el artículo III de su tratado [1] en el que se refiere a la difícil transición entre teoría y práctica.

[3]Mi profunda admiración por la figura de Euler me fue inculcada, hace ya tiempo, por Alberto Dou, estudioso y traductor de su obra (véase Dou [23]) y por Amable Liñán, para quien Euler es una constante referencia por sus pioneras y profundas aportaciones a la mecánica de fluidos.

máximo en la época posterior a la Segunda Guerra Mundial y con la selectiva política científica, en especial en el campo de la matemática aplicada, del gobierno de Estados Unidos.

Von Neumann expresaba en [41] su preocupación ante situaciones límite:

> Las ideas matemáticas se originan empíricamente...; una vez que son concebidas, el tema comienza a tener vida propia... Cuando una disciplina matemática se aleja de su origen empírico... se vuelve cada vez más guiado por la estética; si el alejamiento es descomunal, o si se alcanza una gran abstracción, el tema matemático está en peligro de degeneración.

Afortunadamente, hoy día ambos enfoques vuelven a tener numerosos puntos en común con un rico intercambio de ideas[4]. Bastiones de la matemática pura están hoy próximos a las aplicaciones y así, a modo de ejemplo, la geometría no conmutatíva tiene importantes conexiones con la mecánica cuántica y con la física del estado sólido, la teoría de nudos en topología está siendo aplicada en electromagnetismo, mecánica de fluidos, la teoría cuántica de campos y la genética molecular, etc. Lejos de haber arrinconado al *mundo de las matemáticas*, los modernos y potentes ordenadores las han enriquecido del espíritu de las *matemáticas del mundo* al hacer aplicables a problemas prácticos técnicas matemáticas de gran sofisticación.

2 Sobre el arte de modelizar

La primera de las etapas a la hora de abordar un problema "real" la constituye la *modelización matemática*. Un modelo no es más que un conjunto de relaciones utilizado para representar y estudiar de forma simple y comprensible un objeto o fenómeno de la realidad.

La experiencia muestra que obtener un modelo "correcto", en los términos de los que nos ocuparemos más tarde, no es siempre una tarea fácil y de hecho puede equivaler a haber resuelto ya más de la mitad del problema. Existen algunos recursos para afrontar esa difícil tarea pero su carácter constructivo involucra inevitablemente otras componentes ligadas a la experiencia, intuición y sentido estético. Estas son quizás las razones por la que numerosos autores se refieren a ese proceso cómo "el arte de modelizar".

[4]Esa interacción aparece perspicazmente observada en el libro de Pollard [46] en el que escribe: "Purifiquemos ahora lo aplicado y apliquemos lo puro.."

No es difícil encontrar antecedentes del proceso de modelización acudiendo a análisis antropológicos. Aristóteles [3] afirmaba ya:

> El hombre es el más mimético de todos los animales y gracias a ese mimetismo adquiere todos sus conocimientos.

Esta capacidad le lleva a intentar repetir con su cuerpo y en su mente el mundo exterior. Su oído y su garganta le permiten reproducir los sonidos. La dualidad repetición-retroacción es uno de los fundamentos del aprendizaje individual que se extiende más tarde por la dimensión social del hombre. Perrier [45] sugiere ver la capacidad innata de simulación del mundo exterior en las admirables danzas de caza de los pueblos llamados primitivos. En ellas ya hay una racionalización del proceso de extrapolación-generalización. Apunta este autor que uno de los problemas abiertos de la antropología (de la sociología y de la psicología) radica en justificar la "visión anticipada" de los hechos que con frecuencia se presenta en la conducta humana una vez que ha tomado conciencia de una situación.

La pintura y la escultura son artes en los que no es difícil ver actitudes con muchos puntos comunes con las que se desarrollan en la modelización. ¿Cómo no ver en los impresionantemente bellos y precisos dibujos de los remolinos de agua de Leonardo da Vinci la esencia del espíritu científico observando una compleja realidad e intentando reproducirla para así comprenderla mejor? ¿Cómo no ver en la sonrisa de su Gioconda, o en tantas obras del Greco y de Goya, la representación materializada de un mundo interior inmaterial? ¿Cómo no asombrarse ante la genialidad de Velázquez para captar el sentido de la luz?

Semánticamente la palabra "modelo" tiene una rica acepción. El Diccionario de la Real Academia de la Lengua, en su vigésima primera edición, le asigna hasta diez significados[5]. Además del que otorga al ámbito propiamente matemático, me parece especialmente indicativo otro de ellos, el cuarto, en el que se le da el significado de "representación en pequeño de una cosa". Esta acepción está más cercana de los llamados *modelos icónicos* de los que los mapas, las fotografías y las maquetas son excelentes ejemplos. El modelo matemático también se puede entender unido a esa idea de cambio de escala, aunque la escala aludida no sea la espacial sino la de la abstracción[6]. Pero además la

[5]Alberto Dou me hizo fijar la atención en cómo la palabra "modelo" puede tener acepciones bien diferentes a la que utilizamos en el ámbito matemático. Así, por ejemplo, en pintura, el modelo es la persona que posa y nó el cuadro en sí mismo que reproduce la realidad. Algo parecido ocurre también en el ámbito de la confección. Ambos casos corresponden a la décima acepción del Diccionario.

[6]Un detallado y muy documentado análisis de la relación entre el modelo matemático y otros usos de esa palabra puede encontrarse en la monografía de Aris [4].

modelización debe completarse con el proceso de la experimentación, para lo que es de gran utilidad la maqueta a pequeña escala. Volveremos sobre esa relación más tarde.

La modelización de una compleja realidad no ha pasado siempre por el uso de la matemática. La historia pasada nos ha brindado otros numerosos ejemplos: son los llamados *modelos analógicos,* principalmente los *modelos mecánicos* y *los modelos eléctricos.* Entre los primeros son de resaltar las máquinas de calcular: tanto *la Pascalina* de Blas Pascal (1623-1662) como la máquina de Leibniz y las primeras máquinas de Charles Babbage(1792-1871) y Ada Lovelace, hija de Lord Byron. Desde finales del siglo XIX el modelo eléctrico reemplazó al mecánico[7][8].

Durante siglos, las simplificaciones necesarias para que la respuesta matemática obtenida del modelo fuera relevante eran descorazonadoras. Las llamadas "soluciones explícitas" sólo eran posibles en casos muy particulares. Los cálculos requerían mucho trabajo y tiempo. La aparición de los ordenadores cambió drásticamente el panorama. Aún así, es justo recordar los grandes éxitos de la modelización en tiempos anteriores a los de los ordenadores. Uno de mis preferidos es el de John Couch Adams y Urbain Le Verrier cuando desde sus despachos descubrieron, en 1846, un nuevo planeta: Neptuno. Calculando su trayectoria a partir de las perturbaciones de la trayectoria de Urano, realizaron una hazaña científica que se inscribió para siempre en los anales de la historia de la ciencia.

El proceso de modelización es de naturaleza pluridisciplinar pues requiere un conocimiento del objeto a modelizar y una cierta experiencia en las técnicas matemáticas que hacen coherente un modelo. Con frecuencia este proceso es el fruto de la colaboración de matemáticos con otros científicos. El proceso comienza por detectar las variables a determinar y aquellas otras magnitudes que se puede suponer como datos. Los principios básicos de las distintas ciencias conducen a una serie de ecuaciones (en la mayoría de los casos diferenciales) así como a unas condiciones auxiliares (información de lo que sucede en un tiempo inicial, en el contorno del dominio espacial donde se estudia el fenómeno, etc).

La modelización puede necesitar grandes dosis creativas y ha marcado grandes avances de la ciencia. Es el arte de hallar el lenguaje matemático subyacente en el universo que nos preconizaba Galileo. Uno de los grandes maestros matemáticos de este siglo, James Serrin, refiriendose en [55] a su disconformidad con que todo proceso de modelización sea entendido como algo "pedestre" o de pobre contenido intelectual, escribía:

> ¿Se limita a ese mero tipo de modelización el establecimiento por Newton de sus leyes, o los descubrimientos de la *teoría de campos para medios deformables* de Euler y Cauchy, o la invención de *geometrías no Euclideas,* o de la *teoría de la relatividad* ? Estos descubrimientos son más bien aplicaciones capitales del pensamiento matemático orientado a problemas físicos,..., y forman parte central de nuestra herencia matemática.

Más tarde me referiré a otros ejemplos en los que la modelización alcanza una gran finura matemática.

El modelo matemático se introduce como "prototipo", bajo unas simplificaciones necesarias. Según la naturaleza de las simplificaciones supuestas se puede obtener una familia de modelos susceptibles de ser ordenados jerarquicamente según su distinta complejidad. Esa jerarquía aparece, por ejemplo, si al estudiar una variable física, como la temperatura de un medio continuo, la suponemos *homogénea espacialmente,* es decir constante para todos los puntos, o por el contrario la suponemos *distribuida espacialmente,* es decir variando de un punto a otro del medio continuo. En el primer caso obtendremos un modelo dado por una *ecuación diferencial ordinaria* ; en el segundo el modelo sera notablemente más complicado por contener *una ecuación en derivadas parciales*[9]. A su vez, esos modelos admiten varias subjerarquías según que nos interese la evolución en el tiempo o no. Los primeros son denominados *modelos en régimen transitorio,* o *modelos de evolución,* y los segundos *modelos de equilibrio,* o *modelos estacionarios.* Todos los modelos aludidos anteriormente son llamados *modelos continuos* dado que las incógnitas en estudio están definidas con continuidad. Su aproximación numérica conduce inevitablemente a *modelos discretos* dados por *ecuaciones en diferencias.* Otras veces los modelos discretos aparecen ya

[7]Véanse los comentarios de Lions [35] a propósito de un trabajo de Vito Volterra (1860-1940) en el que utiliza un modelo eléctrico, basado en las ecuaciones de Maxwell, para estudiar la temperatura en el interior de una montaña. Véanse también los comentarios sobre máquinas analógicas en el discurso de Puig Adam [47].

[8]En ese campo se enmarcan las valiosas aportaciones, internacionalmente reconocidas, de Leonardo Torres Quevedo, quien dedicó su discurso de ingreso en esta Real Academia, [58], a una exposición sobre las *maquinas algébricas.*

[9]Sobre ecuaciones diferenciales trataron los discursos de Terradas [57] y Dou [20]. Modelos involucrando *ecuaciones integro-diferenciales, ecuaciones con retardo y* otras *ecuaciones funcionales* también aparecen con gran frecuencia en la práctica (véase, por ejemplo, Navarro [40], Courant y Hilbert [14], Dautray y Lions [17] y sus referencias). También es de reseñar que la presencia simultánea de variables homogéneas y distribuidas, y por tanto de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas con ecuaciones en derivadas parciales, se da en numerosas aplicaciones como, por ejemplo, en *adsorción* (véase: Costa [13]).

en la formulación natural del problema, sin conexión alguna con ningún modelo continuo[10].

Los modelos antes mencionados responden a un cierto tipo genérico. Son los llamados *modelos directos* pues su planteamiento presupone conocidos todos los datos del problema y su solución es la incógnita a determinar. Por el contrario, en los llamados *problemas inversos,* los verdaderos objetos de investigación son algunos de los datos auxiliares (parámetros, condiciones iniciales, etc), presuponiéndose conocidas algunas informaciones adicionales sobre la solución. Este tipo de problemas posee numerosas aplicaciones que van desde la explotación petrolífera y minera a la obtención de técnicas de diagnóstico médico, que reemplazan intervenciones quirúrgicas peligrosas, tales como, por ejemplo, la tomografía por resonancia magnética nuclear, que permite obtener imágenes de secciones del cerebro, o de otros órganos del cuerpo, a partir de medidas externas, etc.

Otra importante subjerarquía, sin duda diferenciando drásticamente la naturaleza de las técnicas que se han de emplear en el tratamiento posterior, se refiere a si la formulación parte de un punto de vista *determinista* o por el contrario se toleran elementos fortuitos, provenientes del azar. Esta última situación lleva a los *modelos estocásticos,* del tipo del movimiento Browniano, en los que la huella de Markov, y más recientemente de Ito, Dynkin y tantos otros, ha marcado su desarrollo hasta nuestros días. Mis reflexiones son fruto de mi actividad en el campo de los fenómenos deterministas y por tanto no estarán inspiradas en ese otro tipo de modelos, ni tampoco en *modelos estadísticos* en los que la información obtenida a través de los datos accesibles es utilizada como valores de una variable aleatoria para analizar la función de densidad u otras nociones asociadas[11][12].

Pero volvamos a la descripción genérica de la tarea de la modelización. El modelo nunca es "idéntico" al objeto en consideración, no podremos obtener de él todas las propiedades y particularidades del objeto de partida. Al modelizarlo se obtiene su reflejo aproximado, por lo que las consecuencias derivadas sólo pueden tener un valor aproximativo. La exactitud de esas consecuencias depende, íntimamente, de las simplificaciones realizadas inicialmente y ha de ser necesariamente contrastada: es la etapa de *validación* a la que me referiré

[10]Véase, por ejemplo Ortega y Rheinboldt [43].

[11]Una referencia reciente y de gran claridad es la monografía de Sixto Rios [48].

[12]Existen numerosas conexiones entre los modelos estocásticos y deterministas. Por ejemplo, las soluciónes de ciertas ecuaciones en derivadas parciales pueden ser entendidas como soluciones de problemas estocásticos construidos adecuadamente. Véase, por ejemplo, Fleming y Rishel [24] y Bensoussan y Lions [9].

más tarde.

Las simplificaciones introducidas son claramente función de los objetivos que se desea alcanzar. La modelización tiene, pues, una fuerte interacción con las etapas de validación, predicción, diseño y control que desarrollaremos en otras secciones. La jerarquía de los modelos que aproximan a un objeto, o a un fenómeno, suele partir de la "sana" filosofía que aconseja proceder de lo sencillo a lo complicado. La necesidad de revisar un modelo inicialmente aceptado puede venir motivada por diferentes razones: las respuestas obtenidas de modelos sencillos pueden ser extremadamente vagas y se desean respuestas más precisas, o bien porque se posea una nueva información sobre el objeto y ésta no se derive del modelo inicial, o bien porque se tenga interés en ciertos valores de los parámetros que queden fuera de la aplicabilidad del modelo de partida, etc. La construcción de un nuevo modelo suele apoyarse en la experiencia obtenida del modelo jerárquicamente anterior y, a menudo, el proceso de desarrollo y mejora del modelo se repite varias veces. Jerarquías de modelos se presentan en numerosos campos de la ciencia[13].

La revisión de un modelo no tiene por qué ir, necesariamente, en la dirección de aumentar su complejidad o aumentar el número de parámetros y variables. A veces el modelo de partida es muy complejo y lo que interesa es obtener alguna información orientadora, aunque sea al precio de considerar únicamente algún caso particular relevante que corresponda a una cierta simplificación.

Una primera herramienta para "despreciar" alguno de los términos que aparecen en una complicada ecuación es el análisis de los *ordenes de magnitud* de cada uno de los términos en función de las *unidades características* que aparecen en el problema. Para ello se introducen cambios de variables que pasan el problema a su *formulación adimensional* haciendo aparecer una serie de parámetros [14]. De esta manera ya no hablaremos de un medio concreto asociado a una geometría particular sino de un caso universal que, recuperadas las magnitudes con sus dimensiones, lleva a una aplicación concreta. Este es el principio de la experimentación con maquetas. El *análisis dimensional,* cuyos origenes se remontan ya a J. B. Fourier, conduce a la búsqueda de *soluciones autosemejantes,* válidas frente a adecuados cambios de escala en todas las mag-

[13]Exposiciones detalladas ilustrando esa filosofía se pueden encontrar, por ejemplo, en Aris [4], Denn [18] y Liñán [34], quienes lo ilustran mediante problemas de ingeniería química y de combustión, y Henderson-Sellers y McGuffie [29], quienes abordan diversos modelos climáticos.

[14]En mecánica de fluidos estos parámetros llevan los nombres de sus descubridores; son los números de Reynolds, Strouhal, Froude, Mach, Nusselt, Prandtl, etc. Véase, por ejemplo, las exposiciones de Millán [38], Liñán [34] y García Velarde [26].

nitudes. Dicha teoría tiene importantes conexiones con la *teoría de grupos*[15].

La idea de simplificar un modelo complejo es también el principio que inspira, por ejemplo, la *teoría de la capa límite* en el estudio de un fluido viscoso al encontrar un obstáculo[16]. Las ecuaciones de partida son las de Navier-Stokes, pero sólo cuando se hacen adecuadas hipótesis simplificadoras, en términos de las escalas del obstáculo y la dirección del flujo, se puede obtener un modelo que dé luz a este complicado fenómeno. Otro tanto sucede con el modelo de *aguas poco profundas* de Saint-Venant (1797-1886) y muchos otros *submodelos* del sistema de ecuaciones de Navier-Stokes[17].

Otro género de problemas, en el que el reduccionismo es fundamental, de gran relevancia actual, tanto por sus aplicaciones como por la riqueza de las técnicas matemáticas desarrolladas, nace de la conexión entre *fenómenos microscópicos y macroscópicos.* Problemas de esta naturaleza aparecen en el estudio de "nuevos materiales" (los llamados *materiales compuestos*) de gran interés por sus propiedades elásticas, térmicas, magnéticas y acústicas [18]; en filtración de fluidos en medios porosos, etc. De nuevo, el proceso de modelización dista de ser una operación rutinaria. Lo que ahora se pretende obtener son unas *leyes homogeneizadas* para un objeto "virtual", que por un lado tengan en cuenta las características del enorme número de sus componentes elementales pero que sea "manejable" y no precise distinguir entre los distintos puntos del objeto global. Las técnicas empleadas en estos procesos, tales como las de *homogeneización* (o desarrollos "en dos escalas"), *de promedios* y otras, forman parte del llamado *análisis asintótico:* el número de componentes es tan elevado que la modelización se realiza suponiendo que tal número crece hasta infinito[19].

La formulación de las ecuaciones de un modelo suele ser fruto de expresar las leyes "físicas" de conservación (o de balance) en términos de las incógnitas del problema. Pero con frecuencia esas leyes no bastan para formular el número suficiente de ecuaciones que requieren las incógnitas del problema. Esto, lejos de ser un grave inconveniente, es coherente con el hecho de que esas leyes son aplicables a objetos o fenómenos de una gran heterogeneidad. Se ha de acudir, entonces, a formular unas *relaciones constitutivas* que especificando las características del objeto modelado completen el número de ecuaciones. Esas relaciones constitu-

[15] Entre las muchas referencias posibles son dignas de mención las de Palacios [44] y Barenblatt [6].

[16] Véase, por ejemplo, Schlichting [53].

[17] Véase, por ejemplo, Millán [38].

[18] Véase, por ejemplo, Alario [2].

[19] Entre las muchas referencias son relevantes las monografías de Bensoussan, Lions y Papanicolau [10], Sanchez-Palencia [52] y Oleinik y otros [42].

tivas suelen introducir una jerarquía de modelos según su relativa sofisticación y son uno de los orígenes más frecuentes de la presencia de términos no lineales en los modelos[20].

El proceso de modelización culmina cuando el modelo contiene "implícitamente" la información buscada: algo que se dilucida mediante otro tipo de técnicas matemáticas a las que me referiré en la siguiente sección.

Una clase de modelos a los que he dedicado una buena parte de mi tiempo desde mis inicios en la investigación, aunque haya abordado también otro tipo de cuestiones, son los llamados *problemas de frontera libre.* Se trata de unos modelos, principalmente dados por ecuaciones en derivadas parciales, en los que aparecen unas curvas o superficies cuya localización es desconocida a priori y que separan geométricamente regiones con diferentes propiedades. El ejemplo más típico es el que corresponde a la solidificación del agua o al derretimiento del hielo: es el llamado *problema de Stefan.* La separaración entre hielo y agua no se puede prefijar a priori y genera una superficie, *una frontera libre*, cambiante durante el proceso. Problemas de frontera libre aparecen de manera natural en la formulación matemática de numerosos problemas de la ciencia y de la tecnología[21]. Por citar sólo algunos de ellos nos podríamos referir a problemas relacionados con el tratamiento de materiales (solidificación del acero, crecimiento de cristales, semiconductores, termistores, superconductividad, etc.), problemas planteados en biología (crecimiento de huesos, dispersión difusiva de bacterias, etc), en teoría de la combustión y otros problemas de reacción-difusión, problemas de la mecánica de fluidos (capa límite, filtración en medios porosos, lubricación, capilaridad, zonas sólidas en fluidos no-Newtonianos, etc), en economía (modelización de opciones, problemas de mercado y de abastecimiento, etc) entre otros.

La formulación matemática de algunos problemas de frontera libre suele requerir expresiones no clásicas tales como las llamadas *inecuaciones variacionales* o las ecuaciones asociadas a *operadores multívocos*[22].

3 Análisis matemático del modelo

El tratamiento matemático de un modelo pretende deducir de éste una serie de propiedades cuantitativas y cualitativas. En primer lugar, esas propiedades

[20] Véase, por ejemplo, Galindo [25], así como referencias sobre *fluidos no-Newtonianos, gases politrópicos,* etc.

[21] Para una exposición de los aspectos de modelización de algunos de los problemas de frontera libre más representativos véase el libro de Crank [16].

[22] Véase, por ejemplo, Duvaut y Lions [21], Brezis [11] y sus referencias.

deben justificar, de manera simple, las observaciones y medidas realizadas sobre el "sistema" modelado, ya sea un objeto o un fenómeno. Pero además, y más importante aún, deben conducir a informaciones complementarias prediciendo posibles comportamientos del sistema.

Las importantes limitaciones a la hora de encontrar soluciones explícitas a las ecuaciones de los modelos han estado presentes en las mentes de los matemáticos desde antes de Newton. Una de las principales razones de esas limitaciones, aunque no la única, radica en el carácter *no lineal* de la inmensa mayoría de los modelos relevantes en las aplicaciones.

Relaciones no lineales, en las que *la regla de tres* no es aplicable, aparecen ya en las *leyes de Kepler* sobre el movimiento de los planetas. No lineal es la *ley de gravitación universal* de Newton que conduce a la modelización del movimiento de esos planetas. No lineales son las ecuaciones de Euler o de Navier-Stokes que rigen los movimientos de un fluido. No lineal era la primitiva ecuación de Laplace para encontrar una *superficie de área mínima* o la sometida a una cierta *tensión superficial* o la de la *capilaridad* para la superficie de un fluido en contacto con el aire y las paredes de la vasija que lo contiene. Éste es el caso también de las ecuaciones de Boltzman (1844-1906) y de un incontable número de ecuaciones que brillan con luz propia en *las matemáticas del mundo.*

Tampoco era muy extraño para ellos el hecho de que si las variaciones de las magnitudes modeladas eran pequeñas se podía reemplazar los términos no lineales por otros lineales, obteniendose respuestas satisfactorias. El *proceso de linealización* es bien antiguo en la historia de las matemáticas.

Hoy día es bien conocido que la estructura lineal de las ecuaciones puede conducir a su resolución mediante fórmulas explícitas de las soluciones. Sin embargo conviene dar el peso que se merece a esta afirmación. En primer lugar, tal afirmación se suele limitar al caso de coeficientes constantes y así existen numerosos casos de ecuaciones lineales aparentemente "sencillas", con coeficientes dados por funciones muy regulares y que no admiten, no ya soluciones explícitas, sino solución alguna.

Otra limitación para encontrar esas fórmulas deseadas aparece en el caso de las ecuaciones en derivadas parciales lineales. Los casos de soluciones explícitas se suelen limitar a cuando están planteadas sobre dominios espaciales muy particulares con propiedades geométricas muy favorables tales como, por ejemplo, simetría esférica o cilíndrica. La estructura particular de las soluciones explícitas suele conducir a ecuaciones diferenciales ordinarias que llevan los nombres de los importantes matemáticos que las estudiaron. Y así las ecuaciones de Euler,

Bernoulli, Lagrange, Legendre, Bessel, Hermite, Darboux, entre otros, configuran un importante muestrario de los resultados de una época.

El comienzo de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias estuvo unido a la búsqueda de la "solución general por cuadraturas", de lo que se ocuparon Euler, Ricatti, Lagrange, d'Alembert y muchos otros. El desarrollo de la teoría de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes tuvo una gran influencia en el del álgebra lineal. Un resultado que contenía un importante mensaje premonitorio sobre las limitaciones de ese modo de enfrentarse a las ecuaciones vino de Liouville, quien, en 1841, mostró que mediante un sencillo cambio de variable las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden (las más relevantes en las aplicaciones) se transformaban en otras no lineales, denominadas de Ricatti, que, en general, no podían ser resueltas por "cuadraturas".

El caso de ecuaciones en derivadas parciales se presentaba aún más enrevesado. Limitándonos al caso de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes, las pocas soluciones exactas encontradas sólo respondían a situaciones muy específicas: condiciones de contorno con datos constantes, datos iniciales con simetría esférica o cilíndrica, etc.

El sentimiento de incapacidad con el que se enfrentaban los científicos a la resolución de los modelos queda muy bien descrito en un pasaje de una obra que Maxwell catalogó de gran "poema matemático". Me refiero a la *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier [23]. En 1822 Fourier escribía:

> Las ecuaciones generales de la propagación del calor están escritas en diferenciales parciales y aunque su forma sea muy simple los métodos conocidos no suministran ningún medio general para integrarlas; no se podrá deducir, pues, los valores de las temperaturas después de un tiempo determinado. Esta interpretación numérica de los resultados de cálculo es sin embargo necesaria; es un grado de perfección que sería muy importante alcanzar en todas las aplicaciones del análisis a las ciencias naturales. Se puede decir que, en tanto no se haya obtenido las soluciones, éstas permanecen incompletas o inútiles y que la verdad que se intenta descubrir no está menos oculta en las fórmulas del análisis de lo que lo está la propia cuestión física.

Una de las grandes aportaciones de Fourier fue renunciar a la búsqueda de soluciones explícitas y dirigir sus pasos hacia caminos entonces poco menos que

[23] Tomado de Lions [35].

inexplorados. La expresión de la solución como una serie infinita de términos, dados por soluciones exactas correspondientes a otros datos que aproximaban a los considerados, abrió una multitud de cuestiones que configuran, hoy día, una buena parte de la matemática de más alta calidad y que son el fundamento de la aproximación numérica imprescindible para que los potentes ordenadores arrojen respuestas cuantitativas. Entre otros aspectos, Fourier otorgó gran protagonismo al estudio de las autofunciones (*los armónicos*) del problema: era el punto de partida del *análisis espectral* y de sus innumerables aplicaciones en la ciencia y en la tecnología [24].

El mundo de las ecuaciones no lineales era apenas abordado por aterrador. En el campo de la ecuaciones en derivadas parciales sólo un genio de la talla de Euler se había atrevido a enfrentarse a ese tipo de dificultades. Sus estudios, sobre la ecuación de los fluidos no viscosos que lleva su nombre, son de un valor inigualable y más propio de un científico de nuestros días transportado, mediante alguna "máquina del tiempo" más de doscientos años atrás.

La entrada en escena, a mediados de este siglo, de los potentes ordenadores abre unas posibilidades impensables para aquellos matemáticos gloriosos. Las informaciones cuantitativas, tan soñadas por Fourier, ya están al alcance de nuestra mano. Hasta incluso para modelos no lineales sofisticados, para dominios espaciales prácticamente arbitrarios y para datos bien lejos de necesitar las hipótesis requeridas hasta hace poco tiempo. Pero todo esto no se obtiene gratis. Hacen falta algoritmos que guíen al ordenador, y esos algoritmos son sólo ilusiones, "castillos en el aire", si no se tiene la certeza de que nuestro modelo admite solución.

El capítulo de la existencia de soluciones para ecuaciones diferenciales no posee una sana reputación entre los ingenieros o los científicos que cultivan otras disciplinas. En honor a la verdad, es algo bien ganado a pulso, pues numerosos especialistas de épocas pasadas, e incluso recientes, han visto en este tipo de resultados un mundo sin fin en el que ninguna otra respuesta matemática podía hacerle sombra. Esto obviamente no es así si lo que uno tiene en mente es *una matemática del mundo* en conexión con el exterior al *mundo de las matemáticas*. En todo caso, es justo "dar al César lo que es del César". Si bien los teoremas de existencia de soluciones no son más que la primera de las muchas etapas que debe acarrear el tratamiento matemático de un modelo, es también obvio que un teorema demostrando la no existencia de soluciones para una ecuación representa su "lápida mortuoria", al menos para el rango de valores de los

[24] Véase, por ejemplo, Guzmán [27].

parámetros y exponentes de los términos no lineales para el que no hay existencia de soluciones. Lo que quizás ignoren muchos de los ingenieros y científicos a los que me he referido anteriormente, aunque me consta que no todos, es que existen muchas ecuaciones, con apariencia inocente, para las que se conoce que no admiten solución. Una gran parte de esas ecuaciones corresponden a ciertas elecciones particulares de los parámetros, de los exponentes de los términos no lineales, de las condiciones de contorno o de las condiciones iniciales, en las ecuaciones genéricas que aparecen en problemas relevantes en las aplicaciones tales como combustión o fusión nuclear, por sólo citar dos de ellas.

Pero, ¿hay un único sentido para asignar la palabra solución a una ecuación? Es muy indicativo que habiendo comenzado esta vieja polémica a mediados del siglo XVIII tenga aún una vibrante actualidad. En 1747, d'Alembert había deducido la *ecuación de la cuerda vibrante:* la que hoy día es considerada como la ecuación lineal hiperbólica por excelencia. Aunque también obtuvo una fórmula que representaba su solución general, sería Euler quien hallase la que da la solución en términos de la configuración y la velocidad inicial[25]. La fórmula tenía validez incluso para datos iniciales que no fueran lo necesariamente regulares como para que la solución tuviera la mínima "decencia" de la época: tantas derivadas continuas como exige la ecuación. La noción de la hoy día llamada *solución clásica* era la única utilizada en aquellas fechas. Euler mantuvo una postura tolerante estimando que la noción de solución debía abarcar también a toda curva dada por esa fórmula con sólo "que pudiese ser trazada". D'Alembert requería que la solución viniese descrita mediante una fórmula analítica. Daniel Bernoulli intervino con un tercer punto de vista con el que discrepaban Euler y d'Alembert: la solución debía ser representable en forma de series trigonométricas. Esta discusión originó el esclarecimiento de la noción de función, de importancia capital en las matemáticas de hoy día, y el estudio de las condiciones que aseguran la representación de una función en términos de una serie trigonométrica. Esto atrajo la atención de Fourier, Dirichlet y otros grandes matemáticos y condujo al nacimiento no sólo del *análisis armónico* sino también de la *teoría de la medida*, la *teoría de funciones* y la *teoría de conjuntos*. Es quizás esto lo que Dieudonné [19] tenía en mente cuando afirmaba:

> Se puede decir sin duda que son esas nuevas necesidades de la física las que llevaron a los matemáticos a crear una rama nueva de

[25] Una vez más los descubrimientos de Euler pasarían a la historia con el nombre de otro matemático y así su fórmula no es otra cosa que la popular fórmula de d'Alembert.

su ciencia, lo que se llama el *análisis funcional*[26].

Los trabajos resaltando las limitaciones de la noción de solución clásica han ocupado un lugar central en el desarrollo de las ecuaciones diferenciales en el presente siglo[27][28]. Sin pretender entrar en cuestiones de primacía temporal, se puede decir que el primer trabajo en el que una noción debilitada de solución desbloqueaba un problema de gran relevancia fue el de Jean Leray [33] sobre las ecuaciones de Navier-Stokes[29]. En la escuela soviética, S.L. Sobolev[30] sistematizaba la *noción de derivada débil integrable* de una función integrable y los espacios funcionales generados a través de los espacios L^p de Lebesgue y que hoy llevan su nombre[31]. Además Sobolev estableció importantes desigualdades que mostraban resultados de inmersión continua entre distintos espacios. Sus contribuciones son, hoy día, de uso más frecuente, a la hora de resolver ecuaciones en derivadas parciales, que la impresionante sistematización de la *teoría de distribuciones* por medio de *espacios vectoriales topológicos* realizada por Laurent Schwartz [54] en los años cuarenta y cincuenta.

Otro episodio glorioso de la teoría de soluciones débiles corresponde al modelo de *leyes de conservación* que aparece en conexión con la modelización de la dinámica de gases. Se trata de una ecuación hiperbólica no lineal de primer orden en la que las "perturbaciones" se propagan a través de las características. Es fácil construir datos iniciales, todo lo regulares que se quiera, de manera que las características se corten después de un cierto instante. En ese instante se produce un "choque" y toda función candidata a ser denominada solución ha

[26]Sobre analisis funcional trataron los discursos de Rodriguez-Salinas [49], Valdivia [59] y Jiménez Guerra [30]. Uno de mis textos preferidos sobre esta bella disciplina es el de Brezis [12].

[27]Una frase atribuida a D. Hilbert ilumina esa filosofía: "Todo problema del Cálculo de Variaciones tiene una solución, supuesto que la palabra *solución* sea entendida adecuadamente" (citada en el libro de Young [60]).

[28]Philipe Benilan es uno de los matemáticos que más ha contribuido a analizar cómo una adecuada noción debilitada de solución permite la resolución de problemas no lineales que de otra manera no serían resolubles. Entre sus obras se pueden encontrar las nociones de soluciónes débiles, integrales, "buenas" y "mild" para el problema abstracto de Cauchy asociado a operadores no lineales sobre espacios de Banach (véase, por ejemplo, Benilan [8]). Él me educó en ese dominio, por lo que le estaré siempre agradecido.

[29]Leray utilizó la terminología de *soluciones turbulentas*. En la actualidad se les suele denominar *soluciones débiles*.

[30]Véase, por ejemplo, Sobolev [56], una de sus obras maestras, y el elegante y esclarecedor tratamiento de los espacios de Sobolev realizado en Brezis [12].

[31]Existe una polémica sobre el importante papel, frecuentemente ignorado, desempeñado por Morrey en esos años cruciales del nacimiento de la teoría de soluciones débiles de ecuaciones en derivadas parciales (véase, por ejemplo, [39]). Un estudio cuidadoso de los antecedentes históricos debería remontarse hasta los trabajos de Euler y Lagrange cuando cimentaban el Cálculo de Variaciones (véase, por ejemplo, Lutzen [37]).

de ser necesariamente discontinua [32]. Es el "más difícil todavía": una ecuación formulada en términos de las derivadas de una función desconocida no puede admitir más que soluciones discontinuas y por tanto no derivables (en el sentido habitual que nos enseñaron en nuestra juventud). Además, esa ecuación presenta otras "pesadillas" a las que me referiré más tarde.

No me es posible ni siquiera pergeñar un esbozo de los muchos métodos desarrollados para abordar la existencia de soluciones. Una idea de la enorme variedad de técnicas y resultados lo da el que un objetivo como ese haya ocupado varios volúmenes de obras enciclopédicas como las de Courant y Hilbert [14], Dautray y Lions [17] y Zeidler [61]. Pese a esa multitud de páginas, el campo dista de estar cerrado. En primer lugar, porque aún se carece de respuesta para viejos y muy relevantes modelos como es el caso de sistemas de más de dos ecuaciones de leyes de conservación, sistema compresible de Navier-Stokes[33], etc. Además, la modelización siempre será una fuente inagotable de ecuaciones para las que haya que desarrollar nuevas herramientas.

Una vez mostrado que existe al menos una función que verifica nuestro modelo, al menos en algún sentido adecuado, cabe preguntarse cuántos de esos objetos existen. En realidad, el estudio de la unicidad o multiplicidad de soluciones es un capítulo independiente del de la existencia, pues las técnicas involucradas son de diferente naturaleza. De hecho, en el ámbito de las ecuaciones no lineales, este último estudio no suele admitir métodos generales, siendo necesario analizar las peculiaridades que se presentan en cada ecuación. Esto le da un cierto aire "artesanal" a este capítulo, lo que unido a la frecuente dificultad de la empresa, le convierte en una parcela en la que se han producido valiosas contribuciones matemáticas.

En los problemas de evolución, la unicidad de soluciones suele obedecer a la propia presencia del término de la derivada temporal. Sin embargo hay muchas y notables excepciones. Una de ellas aparece en el caso de la citada ecuación hiperbólica de leyes de conservación. Es fácil observar que si el dato inicial conduce a características que "se abren", los huecos que dejan pueden ser cubiertos de diferentes maneras conduciendo a una infinidad de soluciones débiles. Como el fenómeno físico está bien determinado, es claro que debemos seleccionar entre esa infinidad de soluciones una sóla que responda a la realidad. Surge así la noción de *solución de entropía* , aquella en la que los choques se producen hacia el futuro y que puede ser caracterizada matemáticamente

[32]Véase, por ejemplo, Lax [32].

[33]Resultados importantes en esta dirección han sido anunciado recientemente por Pierre-Louis Lions. Véanse las referencias detalladas en la monografía [36].

de diversas maneras equivalentes. El trabajo de demostrar que esa noción de solución es la adecuada, cuando los datos iniciales y los términos no lineales de la ecuación son genéricos, ha sido una ardua tarea emprendida por prestigiosos matemáticos y que fue culminada, en 1970, por el recientemente fallecido S.N. Kruzhkov [31] con quien años más tarde tuve el privilegio de colaborar. El proceso de selecionar una adecuada solución débil para el caso de la importante clase de ecuaciones de Hamilton-Jacobi, en cierta forma duales de las leyes de conservación, se debe a Michael G. Crandall y Pierre-Louis Lions [15]. Las soluciones unívocamente determinadas fueron denominadas por ellos *soluciones de viscosidad* por provenir del conocido método de viscosidad evanescente. Su programa es aún más difícil, pues las ecuaciones no están en forma de divergencia y no se puede acudir a la *fórmula de integración por partes* para definir la noción debilitada de solución.

En el caso de ecuaciones de tipo parabólico son pocos los ejemplos de multiplicidad de soluciones. La presencia de términos no lineales sin un mínimo de regularidad en ciertos modelos de combustión y de climatología puede ser responsable de esa carencia de unicidad. La respuesta a la cuestión de la unicidad de soluciones para el caso fundamental del sistema tridimensional de Navier-Stokes para un fluido incompresible no es conocida más que bajo hipótesis muy particulares. Una respuesta general es desconocida aún en nuestros días después de haber sido un problema central durante el presente siglo.

La multiplicidad de soluciones para ecuaciones de tipo elíptico es un fenómeno mucho menos extraño. Ya los problemas lineales de autovalores conducen a una infinidad de soluciones. En problemas no lineales la multiplicidad suele aparecer para ciertos valores de los parámetros aunque la misma ecuación para otros parámetros admita una única solución. Es la *teoría de la bifurcación* que engloba muy bellos resultados matemáticos con numerosas aplicaciones. Por citar tan sólo una de ellas me referiré a la formación de celdas convectivas hexagonales observada por Bénard [7] en 1901 debido a la variación de la tensión superficial con la temperatura [34].

El estudio de la existencia y unicidad (o multiplicidad) de las soluciones de un modelo dista mucho de agotar su tratamiento matemático. Así, por ejemplo, si el modelo es evolutivo es de gran importancia analizar el paso a régimen permanente o estacionario. Esta es una investigación capital en la moderna teoría de los *sistemas dinámicos,* desarrollada a partir de los trabajos

[34] Otros muchos ejemplos y multitud de referencias se pueden encontrar, por ejemplo, en Zeidler [61].

de Poincaré y que ha cobrado una gran actualidad con el estudio de la formación de *caos.*

Muchas otras propiedades cualitativas son también objeto del análisis matemático del modelo. Entre ellas se pueden citar el estudio de la regularidad de soluciones débiles, de las singularidades, de la propagación de perturbaciones y fronteras libres, propiedades de simetría y otras propiedades geométricas, etc.

Referencias

[1] Al-Farabi, 1953, *Catálogo de las ciencias,* Edición y traducción castellana de la obra original de (cotejada con la traducción al latín de Gerardo de Cremona en Toledo) por Angel Gonzalez Palencia. C. S. I. C., Madrid.

[2] Alario, M. A., 1993, *De superconductores y otros materiales,* Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[3] Aristóteles, 1974, *Poética,* Edición trilingüe de Valentín García Yebra, Gredos, Madrid.

[4] Aris, R., 1978, *Mathematical modelling techniques,* Pitman, Londres.

[5] Auslander, L. y Tolimieri,R., 1979, Is computing with the finite Fourier transform pure or applied mathematics?, *Bull. AMS,* **1**, p. 847.

[6] Barenblatt, G., 1996, *Scaling, Self Similarity and Intermediate Asymptotics,* Cambridge University Press, Cambridge.

[7] Bénard, M.,1901, Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur convection en régime permanent. *Ann. Chem. Ser.*, **7**, pp. 62-144.

[8] Benilan, Ph., 1972, *Equations d'evolution dans un espace de Banach quelconque et applications,* Tesis Doctoral. Université d'Orsay, París.

[9] Bensoussan, A. y Lions, J.L., 1978, *Temps d'arret et contrôle impulsionnel,* Dunod, París.

[10] Bensoussan, A., Lions, J.L. y Papanicolau, G., 1978, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures,* North Holland, Amsterdam.

[11] Brezis, H., 1973, *Operateurs Maximaux Monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert,* North-Holland, Amsterdam.

[12] Brezis, H., 1983, *Analyse fonctionelle. Théorie et applications.* Masson. París. (Versión castellana: *Análisis Funcional,* Alianza Universidad, Madrid, 1984).

[13] Costa Novella, E., 1974, *Adsorción.* Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[14] Courant, R. y Hilbert, D., 1953, *Methods of Mathematical Physics,* Vol. 1 y 2. Interscience, Nueva York.

[15] Crandall, M.G. y Lions, P.L., 1983, Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **277**, pp. 1-42.

[16] Crank, J., 1984, *Free and moving boundary problems,* Clarendon Press, Oxford.

[17] Dautray, D. y Lions, J.L., 1990, *Mathematical Analysis and Numerical Methods in Technology*, Vol. 4, Springer-Verlag, Nueva York.

[18] Denn, M. M., 1986, *Process Modeling*, Longman, Harlow, Inglaterra.

[19] Dieudonné, J., 1987, *Pour l'honneur de l'esprit humain*, Hachette, París. (Versión castellana: *En honor del espíritu humano*, Alianza, Madrid, 1989).

[20] Dou MasdeXexàs, A., 1963, *Relaciones entre las ecuaciones en derivadas parciales y la física*. Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[21] Duvaut, G. y Lions, J.L., 1972, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, París.

[22] Euler, L., *Opera Omnia*, 72 Vols., Berna, 1911-1975.

[23] Euler, L., 1993, *Método de máximos y mínimos*, Publ. de la Univ. Autónoma de Barcelona. Selección del *Methodus (*1744), con introducción, notas y apéndices a cargo de A. Dou.

[24] Fleming, W.H. y Rishel, R.W., 1975, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag, Berlín.

[25] Galindo, A., 1980, *No-linealidad en las ciencias de la naturaleza*. Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[26] García Velarde, M., 1995, Por los fluidos y sus corrientes, número a número, *Revista Española de Física*, vol. **9**, pp. 12-19.

[27] Guzmán, M. de, 1983, *Impactos del Análisis Armónico*. Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[28] Halmos, P. R., 1981, Applied Mathematics is Bad Mathematics, en *Mathematics Tomorrow*, ed. L. A. Steen, Springer, Nueva York, pp. 8-14.

[29] Henderson-Sellers, A. y McGuffie, K., 1987, *A Climate Modelling Primer*, John Wiley&Sons, Chichester, Gran Bretaña. (Versión castellana: *Introducción a los modelos climáticos*, Omega, Barcelona, 1996).

[30] Jiménez Guerra, P., 1991, *Origen y evolución de la integración vectorial*. Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[31] Kruzhkov, S.N., 1970, Quasilinear equations of first order with several independent variables, *Mat. Sbornik*, **81**, pp. 228-255.

[32] Lax, P., 1973, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*. SIAM. Philadelphia.

[33] Leray, J.,1932, Etude de diverses équations integrales non linéaires et de quelques problémes que pose l'hydrodinamique, *Journal de Mathematiques Pures et Apliquées*, **12**, pp. 1-82.

[34] Liñán, A., 1991, *El papel de la mecánica de fluidos en los procesos de combustión*. Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[35] Lions, J. -L., 1994, Ricerca pura e ricerca aplicata. La modellistica matemática. En prensa.

[36] Lions, P. L., 1996, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Volume1. Incompressible Models*. Clarendon Press, Oxford.

[37] Lutzen, J., 1982, *The Prehistory of the Theory of Distributions*, Springer-Verlag, Berlín.

[38] Millán Barbany, G., 1975, *Problemas matemáticos de la mecánica de fluidos. Estructura de las ondas de choque y combustión*, Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[39] Morrey, S.B. Jr., 1966, *Integrals in the Calculus of Variations*, Springer-Verlag, Berlin.

[40] Navarro Borrás, J.M., 1942, *Estudio de algunos tipos de ecuaciones integrales singulares*. Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[41] Neumann, J. von, 1956, The Mathematician, en *The World of Mathematics*, ed. J. R. Newman, Simon and Schuster, Nueva York, **IV**, 2053-2063. (Versión castellana: El Matemático, en *Sigma: El mundo de las matemáticas*, ed. J. R. Newman, **IV**, , Grijalbo, Barcelona).

[42] Oleinik,O.A., Shamaev, A.S. y Yosifian, G.A., 1994, *Mathematical Problems in Elasticity and Homogeneization*, Springer-Verlag, Berlín.

[43] Ortega, J. y Rheinboldt, W., 1970, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, Nueva York.

[44] Palacios, J., 1956, *Análisis Dimensional*, Espasa-Calpe, Madrid. (Trad. francesa *Analyse Dimensionelle*, Gauthier-Vilars, Paris, 1960; Trad. inglesa *Dimensional Analysis*, McMillan, Nueva York, 1964)

[45] Perrier, P., 1994, Quelques problèmes posés à l'homme mathématicien et modélisateur des grands systèmes. En *Les grandes systèmes des sciences et de la technologie*, Ed. J. Hororwitz y J.L. Lions, Masson, París, pp. 649-664.

[46] Pollard, H., 1972, *Applied Mathematics: An Introduction*, Addison-Wesley, Reading, Mas.

[47] Puig Adam, P., 1952, *Matemática y Cibernética*. Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[48] Ríos, S., 1995, *Modelización*, Alianza, Madrid.

[49] Rodriguez-Salinas, B., 1976, *Medidas en espacios topológicos*, Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[50] Saari, D. G., Review to the book "*Introduction to Applicable Mathematics, Part I*, by F.A. Hinchey", *Mathemaical Intelligencer*, pp. 88-90.

[51] Sánchez Ron, J.M., 1997, *Falsos mitos: Ciencia vs. tecnología. Reflexiones sobre política científica*. Fundación Repsol, Madrid. En prensa.

[52] Sánchez-Palencia, E., 1980, *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer-Verlag, Berlín.

[53] Schlichting, H., 1951, *Boundary-layer Theory*, McGraw-Hill, Nueva York (Versión castellana: *Teoría de la capa límite*, Ediciones Urmo, Bilbao, 1972).

[54] Schwartz, L., 1950, *Théorie des distributions*, Hermann, París.

[55] Serrin, J., 1984, Applied Mathematics and Scientific Thought, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlín, pp. 19-27.

[56] Sobolev, S.L., 1991. *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*. Tercera Edición. Revisada y aumentada por O. A. Oleinik. A. M. S., Providence, Rhode Island.

[57] Terradas, E., 1933. *Programa de un curso sobre ecuaciones diferenciales*. Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[58] Torres Quevedo, L., 1901. *Máquinas Algébricas*. Discurso de ingreso. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[59] Valdivia, M., 1977. *Recientes aspectos del Análisis Funcional*. Discurso de ingreso, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[60] Young, L., 1969, *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Saunders, Philadelphia.

[61] Zeidler, E., 1988, *Nonlinear Functional Analysis and Applications*. Volúmenes I-V. Springer-Verlag, Berlín.