Matemáticas para el estudio del clima

Jesús Ildefonso Díaz*

¿Qué tipo de matemáticas está presente en el estudio del clima? Nada mejor que comenzar señalando que la interacción entre climatología y matemáticas no es exclusiva de nuestra época. Así, por ejemplo, el tema propuesto por la Academia Francesa de Ciencias para el Premio de Matemáticas de 1738 versaba sobre *la causa del flujo y reflujo del mar* resultando premiados D. Bernoulli, L. Euler y C. MacLaurin. Igualmente, el Premio de Matemáticas de la Academia de Ciencias de Prusia del año 1746 fijaba como tema *la causa general de los vientos* siendo, esta vez, premiado J. d'Alembert. Más tarde Fourier fijó su atención no ya en la predicción a corto plazo de tiempo, sino en las variaciones de clima a más larga escala de tiempo: decenas de años, siglos e incluso miles de años. Es claro que esa diferencia de objetivos (que distingue a la Meteorología de la Climatología) se ha de traducir en una clara diferencia en los modelos matemáticos utilizados en uno y otro caso.

La predicción a corto plazo de tiempo requiere disponer de una información expresable en cantidades numéricas lo más precisas posible de cada una de las variables climáticas: temperaturas terrestres y marinas a diferentes alturas y profundidades, dirección e intensidades de las velocidades, isobaras de los fluidos que nos rodean, propiedades químicas de sus componentes (salinidad, concentraciones de gases), etc. Son los modelos denominados genéricamente *de Circulación General* constituidos por numerosas *ecuaciones en derivadas parciales no lineales* acopladas entre sí. La posibilidad de predicción del tiempo, con todas sus posibles limitaciones, es uno de los grandes triunfos de parcelas fundamentales de la matemática como son el *Análisis Numérico* y la *Computación*. No es extraño que el nombre de un meteorólogo, como L.F. Richardson, aparezca irremisiblemente en los textos de Análisis Numérico por sus investigaciones, en la segunda década del siglo, sobre los llamados *esquemas explícitos e implícitos*. Tampoco es de extrañar que una figura tan singular como la de J. von Neumann, autor de contribuciones que cimientan la matemática pura de este siglo, esté también unido a estas inquietudes: el 31 de enero de 1949 su potente ordenador ENIAC fue capaz de pronosticar, con 24 horas de antelación, una gran tormenta sobre el noroeste de Estados Unidos, lo que constituyó un hito en la historia de la Meteorología.

Pero las técnicas más sofisticadas del Análisis Numérico y de la Computación se quedarían en meros fuegos de artificio si no fuese por la existencia de un *modelo continuo* que formule las leyes físicas que rigen el comportamiento de las variables climáticas. Esos modelos suelen acoplar las famosas *ecuaciones de Navier-Stokes* con la de la energía térmica y otras *ecuaciones de difusión* de los componentes químicos, etc. Hace tan sólo unos años que se ha podido demostrar con todo rigor que esos modelos están "moderadamente" *bien planteados*[1]. Por increíble que parezca, en la fecha en la que se escribe este artículo, no se conoce si hay *unicidad de soluciones*, es decir si hay un único comportamiento de esas variables a partir de los datos iniciales y de contorno o por el contrario hay múltiples comportamientos posibles. Un problema abierto que no desmerece un ápice, por su trascendencia y dificultad, del recientemente resuelto problema de Fermat.

El estudio de todas esas cuestiones está ligado al *Análisis Matemático* de los modelos y constituye un cuerpo de doctrina conocido como *Teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales* o de *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Existe incluso una teoría matemática que analiza la

---

* Jesús Ildefonso Díaz es Catedrático de Matemática Aplicada de la Universidad Complutense de Madrid y miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

[1] J.L.Lions, R. Temam y S. Wang, *Journ. Math. Pures et Appl.*, 74, 105-164,1995.

situación realista de *problemas con datos incompletos*[2]. Por otra parte, analizando la dependencia continua de las variables climáticas respecto de los datos iniciales fue como el meteorólogo E.N. Lorenz popularizó, a partir de sus trabajos de 1960, la *Teoría del Caos Determinista* de los *sistemas dinámicos no lineales* y que se presenta también en ciencias tan dispares como la economía, biología, etc.[3].

Otra fructífera interacción entre matemáticas y clima radica en el estudio del comportamiento, cuando el tiempo tiende a infinito, de las soluciones de un sistema dinámico no lineal. En el caso de la meteorología el sistema dinámico asociado tiene *infinitos grados de libertad*. Uno podría imaginar que el conjunto de todos los estados de equilibrio, soluciones periódicas, etc., alcanzados (*el atractor maximal*) depende también de un número infinito de parámetros pero se sabe que en este caso no es así: el conjunto tiene una *dimensión fractal* (introducida por B. Mandelbrot como una modificación de la *dimensión de Hausdorff*) finita.

Los modelos matemáticos en Climatología no pretenden el pronóstico exacto sino diagnósticos cualitativos. La escala temporal es mucho mayor. Una de las aportaciones más singulares y pioneras se debe al astrónomo yugoslavo Milutin Milankovitch (1879-1958): el primero en completar una teoría climática de las glaciaciones del Pleistoceno calculando los elementos orbitales y los subsiguientes cambios en la insolación y en el clima.

Los modelos matemáticos más utilizados en la actualidad son los denominados *Modelos de Balance de Energía*. Su principal característica es la de analizar la sensibilidad de la temperatura frente a pequeñas variaciones de parámetros solares o terrestres. Existe toda una jerarquía entre esa familia de modelos comenzando en su nivel más elemental por los llamados *modelos cero-dimensionales* en los que la incógnita es la temperatura promediada globalmente y por tanto únicamente dependiente del tiempo. Una segunda clase lo forman los llamados *modelos difusivos unidimensionales* introducidos en 1969 por M.I. Budyko y W.D. Sellers de forma independiente. En ellos la incognita es un cierto promedio local de la temperatura superficial que conduce a una incognita ahora dependiente del tiempo y de la latitud. Si se añade la dependencia respecto de la longitud se obtienen los *modelos bidimensionales*. En ese caso la incognita está definida sobre la superficie terrestre que suele ser modelizada mediante una superficie esférica o más en general, sin condiciones de simetría, por una *variedad Riemanniana compacta y sin borde*. Las herramientas de *Geometría Diferencial* se hacen aquí indispensables para poder definir propiamente los operadores diferenciales: gradiente, divergencia, laplaciano, rotacional, etc. El estudio de esta clase de ecuaciones ha sido llevado a cabo por diferentes autores[4] analizando también la estabilización de soluciones hacia los *estados de equilibrio* o soluciones de la ecuación estacionaria asociada. Una peculiaridad de estos modelos es que dependiendo del valor de una constante característica (la llamada constante solar Q) puede haber uno o más de un estado de equilibrio. La *curva de bifurcación* de soluciones tiene forma de "ese" y se produce un fenómeno de *histéresis* cuando Q varía pues las soluciones estables sufren cambios discontinuos con Q al modo de la *Teoría de las Catástrofes* de René Thom.

A veces se acude a introducir *términos no deterministas* para tener en cuenta procesos de difícil modelización como, por ejemplo, las erupciones volcánicas. El modelo pasa a ser ahora una ecuación estocástica en derivadas parciales en la que aparece un *término fuente* que viene dado por un campo aleatorio dependiente del tiempo (aparece así el *espacio de las series temporales*) [5] .

---

[2] J.L. Lions, *El Planeta Tierra: el papel de las matemáticas y de los super ordenadores*. Espasa-Calpe. Serie del Instituto de España. 1990.
[3] MUNDO CIENTÍFICO publicó un número especial (nº 115) sobre *La ciencia del caos*, Julio-Agosto, 1991.
[4] J.I. Díaz, [ed.]: *The Mathematics of Models for Climatology and Environment*, NATO ASI Series, Springer, Berlin. 1997.
[5] M. Ghil y S. Childress, *Topics in Geohysical Fluid Dynamics: Atmospheric Dynamics, Dynamo Theory and Climate Dynamics*, Springer-Verlag, Nueva York, 1987.

Para concluir es obligado referirnos a si las consecuencias negativas de las emisiones de gases producidas a lo largo de los últimos siglos son ya irreversibles o por el contrario existe alguna vía de reposición del equilibrio natural. La conjetura sobre la posibilidad de modificar el clima mediante posibles acciones humanas sobre el albedo terrestre se debe a J. von Neumann, quien la formuló en 1956, pero no ha sido aún probada. Las normativas mundiales sobre las emisiones permitidas para gases de efecto invernadero que se acuerdan en cumbres como la de Kyoto pueden ser también entendidas como medidas de control introducidas por el hombre. La justificación matemática de esas posibles acciones y sus repercusiones sobre una realidad tan compleja son temas punteros de la investigación actual en *Teoría de Control* y *Teoría de Juegos*: parcelas importantes de la matemática, tanto por su riqueza científica como por su gran aplicabilidad a muchas otras ciencias experimentales y sociales[6].

---

[6] J.I. Díaz y J.L. Lions, eds. *Environment, Economics and Their Mathematical Models*, Masson, Paris, 1994.