

John von Neumann: de la matemática pura a la matemática aplicada

J. I. DÍAZ

Universidad Complutense de Madrid

1 Introducción.

La figura excepcional de John von Neumann (1903-1957) ha sido continuamente evocada como ejemplo de numerosas actitudes científicas. Dependiendo de la persona que acude a su biografía cabe ver en él a uno de los matemáticos puros más precoces y profundos de la historia o bien al matemático cuyos intereses científicos no se limitaron a un pequeño campo, cuya curiosidad parecía no tener límites y cuya creatividad le llevó a construir los fundamentos de orientaciones científicas insospechadas antes de su participación. Se puede acudir a su obra también para ilustrar cómo la compleja dialéctica entre ciencia pura y ciencia aplicada, algo que obviamente no se limita al campo de las matemáticas, no tiene por qué enfocarse en términos de confrontación si no de colaboración, consenso y compatibilidad. Curiosamente, figuras como la suya, la de su contemporáneo N. Wiener y tantos otros precedentes de la talla de, por ejemplo, L. Euler, son reivindicados, antagónicamente, por los defensores más radicales de la matemática pura y de la aplicada.

Hace tan sólo un par de años que las comunidades científicas de numerosos países rindieron homenaje a su memoria con motivo del centenario de su nacimiento¹. Estas líneas tan sólo pretenden mantener vivo su ejemplo como científico interdisciplinar.

Ilustrar la figura y la obra de un matemático tan excepcionalmente brillante como John von Neumann, no debería ser una tarea ardua, especialmente después de que su obra haya sido casi íntegramente recogida en una serie de volúmenes (Taub [91]²) y que su persona y sus líneas de investigación hayan sido glosadas por distinguidos especialistas (véase por ejemplo el número especial del *Bulletin of the American Mathematical Society*, Ulam [93] o el volumensobre su legado Glimm *et al.* [25]).

La dificultad de esa tarea, sin embargo, es más que obvia si se matiza que los volúmenes antes mencionados son seis, con una media de más de 700 páginas

¹Véase la web http://www.neumann-centenarium.hu/index_en.html. En nuestro país, la Real Academia de Ciencias organizó un ciclo de conferencias a ese respecto cuyos textos aparecieron publicados en la revista Arbor (López Pellicer [42]).

²Véase también la recopilación de sus trabajos sobre Computación hecha por Aspray y Burks [4].

cada uno y que sus títulos, aludiendo a los principales campos cultivados por él, involucran áreas tan dispares como las siguientes:

Volumen 1: Lógica, Teoría de Conjuntos y Mecánica Cuántica.

Volumen 2: Operadores, Teoría Ergódica y Funciones casi-periódicas.

Volumen 3: Anillos de Operadores.

Volumen 4: Geometría Continua y Estadística.

Volumen 5: Diseño de Computadoras, Teoría de Autómatas y Análisis Numérico.

Volumen 6: Teoría de Juegos, Astrofísica, Hidrodinámica y Meteorología.

La importante huella de von Neumann en la ciencia actual ha sido analizada en las múltiples biografías escritas por sus discípulos y contemporáneos (Ulam [94], Halmos [31] y Dieudonné [21])³, algunas de ellas plasmadas en libros analizando su obra (Goldstine [26], Ulam [94], Heims [32], Aspray [3], Poundstone [89], Brody y Vamos [9] e Israel y Millán-Gasca [34]), siendo también digno de señalar el libro escrito por su hermano Vonneuman [96].

Ilustrar con detalle su gigantesca figura escapa claramente de las posibilidades de esta exposición. Nos limitaremos a una mera incursión en esa tarea, tomando sólo un aspecto parcial para describir el trascendental papel de von Neumann como uno de los creadores de una amplia disciplina que hoy se conoce bajo distintos nombres: *Le Calcul Scientifique*, *Scientific Computing* y que en castellano podríamos denominar el *Cálculo Científico*.

En lo que sigue, abordaré primeramente su vida familiar y profesional (Sección 2), haremos una rápida alusión a sus investigaciones en Matemática Pura, Teoría de Juegos y Mecánica Cuántica (Sección 3) para centrarnos más tarde en su visión del Cálculo Científico y su aplicación a Meteorología (Sección 4).



Figura 1: John von Neumann (1903-1957)

2 Su vida familiar y profesional.

John von Neumann nació en Budapest (Hungría) el 28 de diciembre de 1903 en el seno de una familia acomodada de origen judío. Su padre, Max, era banquero. Su madre, Margaret, representó para él un apoyo fundamental muriendo sólo unos meses antes que él. Era el menor de tres hermanos y quizás por esto le gustaba ser denominado por el diminutivo de su nombre de pila (Jansci, derivado de János y más tarde Johnny, desde que occidentalizó su nombre sustituyéndolo por John). En 1913 su padre adquirió el título nobiliario de margittai, siendo denominado desde entonces como Margittai Max Neumann. Hacia 1921 su hijo János firma durante su estancia en Alemania como Johann Neumann von Margitta y años más tarde adopta el nombre definitivo de John von Neumann. Es de notar que

³Véase también la web http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Von_Neumann.html

no todos sus hermanos siguieron su ejemplo y así su hermano Nicholas cuando se afincó en Estados Unidos varió su apellido original al de Vonneuman.

El alto nivel económico de su familia permitía que su educación familiar estuviese auxiliada por institutrices francesas y alemanas, lo que quizás pudo influir en su pasión y facilidad para los idiomas. Son numerosas las leyendas que se pueden encontrar en sus biografías sobre su precocidad, su memoria excepcional y su rapidez de cálculo mental y escrito. Se dice de él, a título de ejemplo, que a los doce años ya había leído la *Théorie des Fonctions* de E. Borel.

Entre 1911 y 1921 asistió al Gymnasium Luterano de Budapest en el que coincidió con otra mente privilegiada: E. Wigner⁴, Premio Nobel de Física de 1963 y con el que mantendría una estrecha amistad y colaboración científica hasta el final de sus días. Durante este periodo, debido a su excepcionales dotes para las ciencias, le fue asignado un tutor, el joven matemático M. Fekete. Juntos ([23]) mejoraron resultados de uno de los matemáticos húngaros de mayor renombre: L. Fejer.

Al finalizar sus estudios secundarios se planteó en la familia un gran interrogante sobre el futuro profesional de Jansci: banquero (como su padre), o matemático (como él anhelaba). Su padre pidió consejo a Th. von Karmán⁵, amigo distinguido de la familia, quien propuso una solución alternativa: químico. De esta manera comenzaron sus estudios universitarios que llevaría a cabo en tres países distintos: Ciencias Químicas en Berlín, de 1921 a 1923 (donde siguió cursos de A. Einstein y E. Schmidt), Ingeniería Química en Zurich, entre 1923 y 1925 (asistiendo a las clases de Weyl, Pólya y Schrödinger) y doctorándose en Matemáticas en 1926 por la Universidad de Budapest (donde, de hecho, estuvo matriculado oficialmente en esos años universitarios, superando los exámenes durante los veranos).

Su primer artículo de matemáticas, escrito a los 18 años, lo constituyó el trabajo antes citado con Fekete [23]. En su producción científica pueden distinguirse dos periodos de separación difícilmente nítida. El periodo europeo se puede situar entre 1921 y 1930. Tras su doctorado, obtiene una *Beca Rockefeller* para el curso 1926/27 desplazándose a la Universidad de Göttingen (Alemania) para trabajar con D. Hilbert (a quien luego visitaría en Heidelberg) y donde coincidiría también con el físico J. R. Oppenheimer. Posteriormente, entre 1927 y 1929 obtuvo la plaza de *Privatdozent* en Berlín⁶, realizando numerosos viajes en tren a Göttingen, y, finalmente, en el curso 1929/1930 ocupó el cargo de *Privatdozent* esta vez en la Universidad de Hamburgo.

Una etapa distinta se refiere al resto de sus años en Estados Unidos. Su primera invitación a visitar este país se produjo en 1930 donde fue invitado por

⁴Quien a diferencia de von Neumann tuvo una larga vida, falleciendo en enero de 1996.

⁵Ambos científicos coincidirían más tarde en Estados Unidos y en particular como asesores, junto a otros colegas suyos, del Proyecto Manhattan que con sede central en Los Alamos tuvo como objetivo producir la primera bomba atómica norteamericana. La explosión experimental tuvo lugar el 16 de Julio de 1945. El director del proyecto fue J. R. Oppenheimer con quien von Neumann también coincidió en sus años de juventud en Europa.

⁶El más joven de la historia de la Universidad de Berlin.

el geómetra O. Veblen a visitar la Universidad de Princeton. Antes de realizar este viaje, en diciembre de 1929, se casó con Marietta Kövesi⁷.

Entre 1930 y 1933 fue contratado como Profesor Visitante en la Universidad de Princeton simultaneando este nombramiento con la condición de Profesor de la Universidad de Berlín hasta la llegada del partido nazi al poder en 1933.

En 1933 se crea en Princeton el Institut for Advanced Study (IAS), institución sin docencia regular independiente de la Universidad. Los seis profesores iniciales del IAS fueron los siguientes: J.W. Alexander, A. Einstein, M. Morse, O. Veblen, H. Weyl y J. von Neumann, que con apenas 29 años era el más joven de todos⁸.

Su adscripción al IAS perduraría hasta su muerte en 1957, sin embargo hay constancia de fallidos intentos para acomodarse en otros centros. Así, por ejemplo, en 1945, N. Wiener promovió sin éxito su nombramiento en el MIT de Massachusetts⁹. En Marzo de 1956, ya enfermo, aceptó una oferta de la UCLA (California) que él tomaba como una temprana jubilación y en cuyo contrato, que no llegó a disfrutar, se hacía alusión a un cuantioso seguro de vida y numerosas facilidades para su instalación.

Durante su vida profesional disfrutó de numerosos contratos de investigación para un elevado número de organismos oficiales, la mayor parte relacionados con Defensa, y que más tarde se tradujeron en nombramientos para desempeñar cargos de alta responsabilidad en dichos organismos. Entre estos centros se pueden citar al *Scientific Laboratory* de Los Alamos (New Mexico) entre 1943 y 1955, el *Ballistic Research Laboratory de Alberden* (1940--1957) y el centro de Silver Spring (1947-1955), ambos en Maryland y sus múltiples nombramientos en Washington: *Navy Bureau of Ordnance* (1941-1955), *Research and Development Board* (1948-1953), *Armed Forces* (1950-1955) y el que él más estimaba (pese a que acarrea incompatibilidades que se traducían en importantes mermas salariales): la *Atomic Energy Commission* (1954-1957).

En el capítulo de su vida familiar es también de señalar el nacimiento en 1935 de su única hija Marina (que más tarde sería Consejera para Asuntos Económicos del Presidente R. Nixon en 1972), el divorcio, en 1937, de Marietta¹⁰, su nacionalización como ciudadano norteamericano ese mismo año

⁷Para llevar a cabo este matrimonio von Neumann se convertiría al catolicismo previamente.

⁸Una natural curiosidad surge en torno a la posible naturaleza de las relaciones científicas y amistosas de von Neumann con Einstein y sus otros colegas del IAS. Al parecer hubo un mutuo distanciamiento (sólo se conserva una foto en la que aparecen juntos y distantes) fruto de la divergencia evidente entre sus concepciones políticas. Parece que en junio de 1943 ambos llegaron a redactar una propuesta (con D. Taylor) para la US Navy sobre el llamado *Rainbow project* que, conectando la Mecánica Cuántica y la anhelada Teoría Unificada de Campos, pretendía hacer invisibles e ilocalizables a barcos y submarinos (http://www.aetherometry.com/unified_field/uft_einstein_rainbow.html)

⁹Las cambiantes relaciones entre estas dos monumentales figuras matemáticas del siglo XX fueron pormenorizadamente analizadas en Heims [32] (referencia que me fue aconsejada por Jesús Hernández, a quien le estoy muy agradecido).

¹⁰Parece ser que Marietta le abandonó para casarse con el físico J.B. Kupper. Que en los documentos de su divorcio se indique que su hija Marina pasaría a estar bajo la custodia de

y su segundo matrimonio, en 1938, con Klára Dán¹¹.

La muerte le sobrevino el 8 de Febrero de 1957 tras más de dos años de una penosa enfermedad (cáncer de huesos) detectada en 1955 por motivo de una caída con rotura de clavícula. En Junio de 1956 los médicos le advirtieron de su grave enfermedad y le aconsejaron que intentara acabar los trabajos más importantes en curso. Fue entonces cuando culminó su libro *The computer and the brain* ([78])¹². Su última aparición en público data de febrero de 1956 cuando le fue entregada la *Medal of Freedom* por el Presidente Eisenhower. Aun después, celebró reuniones con Secretarios de Estado en el Hospital Walter Reed de Washington en el que estaba internado. Las personas que le visitaron mencionan sus sufrimientos, su declive físico, sus depresiones acrecentadas por la muerte, en 1956, de su madre (quien vivía con él desde su instalación definitiva en Estados Unidos en 1933) y un sinfín de otras anécdotas que protagonizaba hasta los últimos días de su vida (por ejemplo, cuando ya no podía leer se dedicaba a recitar de memoria largos versos de Goethe y otros autores clásicos). Los últimos años de su vida fueron de una fervorosa práctica religiosa.

John von Neumann recibió numerosos honores. Era miembro de las Academias de Lima, Roma, American Academy of Arts and Sciences, Milán, National Academy of Sciences y Amsterdam. Fue nombrado Doctor *Honoris Causa* por las Universidades de Princeton (1947), Pennsylvania y Harvard (1950) y Estambul y Maryland (1951). Entre los muchos premios recibidos son de resaltar algunos que llevaban los nombres de contemporáneos suyos (A. Einstein en 1956 y E. Fermi¹³ también en 1956). Fue Editor de *Annals of Mathematics* (de 1933 a 1957) y *Compositio Mathematica* (de 1935 a 1957), entre otras revistas. Fue también Presidente electo de la *American Mathematical Society* de 1951 a 1953. Entre los muchos reconocimientos póstumos destaca la célebre John von Neumann Lecture (premio anual de la sociedad americana SIAM que desde su instauración en 1957 ha recaído en matemáticos del prestigio de P. Lax, P. Henrici, J.L. Lions, J. Keller, S. Smale, R.T. Rockafellar y A. Majda, entre otros)¹⁴.

3 Investigaciones en Matemática Pura, Teoría de Juegos y Mecánica Cuántica.

Las contribuciones de von Neumann en los campos aludidos ocupan cuatro volúmenes de sus *Collected Works* (Taub [91]) con más de 4.000 páginas por lo que aquí nos limitaremos a unos comentarios muy breves. Una excelente y

von Neumann cuando ésta cumpliera los 12 años es altamente significativo.

¹¹Antigua novia de juventud, también divorciada y notable programadora de los primeros computadores. Con ella firmaría algunos informes restringidos (Calkin, Evans, Evans, von Neumann, K. y von Neumann, J. [11] y [12])

¹²También apreció póstumamente su libro sobre *Continuous Geometry* [79].

¹³Con el que llegó a escribir un trabajo conjunto ([24]).

¹⁴Agradezco a Allison Bogardo (de los servicios administrativos de SIAM) por haberme facilitado la lista completa de todos los receptores de este premio desde su instauración y de la que sólo he extraído unos cuantos nombres significativos por razones obvias de extensión.

obligada referencia es el volumen, ya mencionado, del *Bulletin of the AMS* ([93]) en el que primeras figuras de esos campos analizan las profundas contribuciones de von Neumann.

Pero, ¿que valoración tenía el propio von Neumann de sus contribuciones? A buen seguro que su mentalidad fue cambiando a lo largo de su vida¹⁵. Un testimonio escrito sobre este tema se produjo en 1954 cuando la *National Academy* le pasó un cuestionario, con motivo de su elección como Académico, en el que tenía que indicar cuales habían sido sus tres principales contribuciones a la Matemática. Su respuesta fue: Fundamentos matemáticos de la Mecánica Cuántica, Teoría de Operadores y el Teorema Ergódico¹⁶. Como veremos, la necesidad imperiosa de reducir a tres los temas invocados le llevó a silenciar contribuciones que por sí solas merecen estar en la historia de las Matemáticas.

Una frase de la semblanza de von Neumann llevada a cabo por Dieudonné [21] me parece especialmente certera:

Poseía una habilidad excepcional para organizar y axiomatizar situaciones complejas que *a priori* no parecían encauzables a un tratamiento matemático.

Pero centrémonos en el tema de esta sección. Durante los primeros años de su producción científica, entre 1922 y 1930, bajo la poderosa influencia de David Hilbert, John von Neumann se ocupó de Lógica Matemática y de la Teoría de Conjuntos. Entre los muchos temas abordados figuran los siguientes: Los números ordinales (von Neumann [47], [48], von Neumann y Wigner [84]), Teoría de Conjuntos (sobre la que versó su tesis doctoral en la Universidad de Budapest ([49]) y que luego desarrolló en [51], [55]), Teoría de Prüfer de números algebraicos ideales ([50]), descomposición de la esfera según Hausdorff, Banach and Tarski ([52]).

Su incursión en los fundamentos de la Mecánica Cuántica arranca con un artículo en colaboración con Hilbert y Nordheim ([33]). Su propósito era dar respuesta al sexto problema de la lista propuesta por Hilbert en 1900: restablecer el papel de las Matemáticas¹⁷, a nivel conceptual, en la Física Teórica. Esto le llevó a sistematizar rigurosamente las ideas de Dirac y al estudio de la Teoría de Operadores para el tratamiento de la reversibilidad y el indeterminismo de Heisenberg, Schrödinger y Born. Sus posteriores trabajos von Neumann y Wigner [84], [86], y von Neumann [53] y siguientes se plasmaron en su

¹⁵En un artículo de divulgación ([70]) alude a que su sentido del rigor, para dar por probado un resultado, cambió tres veces a lo largo de su vida. Existe una traducción española de este interesante artículo en la enciclopedia editada por Newman [87] (véase el volumen 5, páginas 443-445).

¹⁶Jacques-Louis Lions me informó (fax de 19 de marzo de 1996) que en un artículo escrito por su hija Marina ésta atestigua que en una ocasión von Neumann se pronunció claramente por la Teoría de Juegos como la aportación más relevante de toda su obra.

¹⁷Lax opina en [38] que el resultado negativo de Gödel del año 1931 pudo ser una de las principales razones por las que el interés de von Neumann por el programa de formalismo de Hilbert se amortiguó en años sucesivos.

importante libro *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* ([59])¹⁸. En Van Hove [95] el lector podrá encontrar una revisión especializada sobre las aportaciones de von Neumann en esta dirección.

Probablemente, fue la inicial influencia de E. Schmidt (popularizado más tarde por el proceso de Gram-Schmidt), la que le llevó al estudio de la Teoría de Operadores y en la que realizó importantes contribuciones (véanse los comentarios expertos de Murray [44]). Motivado por sus estudios sobre Mecánica Cuántica, desarrolló la Teoría Espectral (de operadores hermíticos no acotados) mejorando trabajos previos de H. Weyl y T. Carlemann. Estableció la reducción a operadores unitarios en la línea de los trabajos de Cayley (resultados que fueron simultáneamente establecidos por M.H. Stone). Analizó los “defectos” de los operadores de dominio denso de gran aplicabilidad a la teoría de problemas de contorno en ecuaciones en derivadas parciales y en los que las condiciones de contorno han de ser incluidas en la definición del dominio del operador. Sus trabajos en esta dirección fueron primordialmente elaborados en el periodo de 1928 a 1932 aunque nunca dejó de publicar en ese campo hasta 1950.

Otra parcela de la Teoría de Operadores de la que se ocupó con gran dedicación es la Teoría de Álgebras (término anteriormente sustituido por el de Anillos) de Operadores. Analizó las W^* -Álgebras o Álgebras de von Neumann según fueron denotadas más tarde, por Dixmier en 1957. Desarrolló la teoría de Álgebras no conmutativas a la luz de los trabajos de E. Noether y E. Artin, haciendo especial incapié en su aplicación a la Teoría de Matrices. Estudió los operadores acotados en espacios de Hilbert separables, etcétera. Estas líneas de investigación las comenzó en 1929 y las continuó, ya en Princeton y en gran parte con la colaboración de F. Murray, en una serie de trabajos ([56], [62], y [73], Murray y von Neumann [45], [46], entre otros). Véase también la exposición realizada en Kadison [35].

Ya en Princeton, en la primera década de su estancia, además de la Teoría de Anillos de Operadores, von Neumann investiga sobre muchos otros temas. Cultiva la Geometría Continua que descubre con la lectura del libro de Dirac sobre Mecánica Cuántica (Dirac [22]). Es lo que él llamó, con ironía, “la Geometría sin puntos”. Su agudizado sentido del humor lo plasmó también en su vida científica y así más tarde cuando su interés se centraba en la construcción de un gran ordenador, ideó un sofisticado nombre cuyas iniciales conducían a MANIAC. Sus colegas le desanimaron de este empeño pero devolviéndole la broma solían denominar más tarde a ese ordenador como JOHNIAC. Volviendo a la Geometría Continua, otra de sus motivaciones era que la dimensión del espacio de operadores venía determinada por su grupo de rotaciones con lo que se obtenían dimensiones tales como $4/3$ y otros números racionales. Era el periodo entre 1935 y 1937.

También se ocupó de los Grupos de Lie y así, en [60], resuelve el quinto

¹⁸La versión española se adelantó a las versiones inglesa y francesa. El libro fue traducido al castellano en 1949 con el título *Fundamentos matemáticos de la Mecánica Cuántica* y publicado por el Instituto de Matemáticas “Jorge Juan” del CSIC. La traducción se debió al Dr. R. Ortiz e incluía un prólogo de E. Terradas describiendo su impacto en la Universidad Central de Madrid. Se cuenta también con una reimpresión del CSIC que data de 1991.

problema de Hilbert para grupos compactos mostrando que admiten una estructura de Lie si son homeomorfos a un espacio euclídeo. En [61] muestra la unicidad de la medida de Haar sobre estas estructuras, trabajos que luego serían desarrollados por E. Cartan.

Respecto a la Teoría Ergódica, extendió, en sólo unos meses, un artículo previo de 1932 de B.O. Koopman sobre la formulación en las funciones de cuadrado sumable al caso de la formulación en casi todo punto ([59] y [57]). G. Birkhoff amplió más tarde estos resultados en una serie de trabajos (véanse los artículos Birkhoff [8] y Halmos [30]).

La sistematización que llevó a cabo de la Teoría de Juegos se puede considerar como una de las mayores contribuciones científicas del siglo XX. Según Dieudonné,

von Neumann logra algo casi imposible: ofrece un modelo cuantitativo para los juegos de azar con libertad de acción de los jugadores.

Esta fundamentación la llevó a cabo en 1928 ([54]), *annus mirabilis* según Ulam. Extendió los resultados de Borel de 1921, probando su famoso Teorema del min-max y considerando juegos con dos o más jugadores. Sus trabajos culminaron con el libro *Theory of Games and Economic Behaviour* que publicó con Oscar Morgenstern en 1944 ([43]). Antes ya se había interesado por distintos modelos sobre Equilibrio Económico ([63]), innovando este área ya que hasta entonces la mayoría de los modelos matemáticos se basaban en analogías mecánicas. Posteriores trabajos en esta dirección fueron [69], varios manuscritos no publicados datando de 1947 y 1948, Brown y von Neumann [10] (en el que utilizan ecuaciones diferenciales), [74] y [75] (véanse las exposiciones de Kuhn y Tucker [37], Poundstone [89] e Israel y Millán-Gasca [34]).

4 John von Neumann y el Cálculo Científico.

Para comenzar, quizás convenga ser más preciso por lo que hoy día se puede entender por Cálculo Científico. Acudiendo a fuentes francesas (Dautray [19], Benardi [6], Bernadou [7]) podemos decir que el Cálculo Científico no es más que la utilización del ordenador como herramienta de trabajo en cualquier disciplina científica. Pese a esta definición tan sencilla, dos matizaciones se hacen poco menos que necesarias. En primer lugar, el término Cálculo se debe entender como una sucesión de operaciones automáticas basadas en operaciones elementales, trigonometría, logaritmos y exponenciales. Desde la máquina de Pascal (1623-1632) hemos asistido a una progresión asombrosa en la escala de los problemas abordados y así, por ejemplo, en la resolución de sistemas algebraicos lineales hemos superado de manera inimaginable, de la resolución de los de orden 10 en 1930 a los superordenadores como el BlueGene/L que ha alcanzado una potencia sostenida de 36,01 Teraflops (realización de 36,01 billones de

operaciones por segundo)¹⁹. La segunda matización es que el término Científico sirve para distinguirlo de otros cálculos no científicos como son los que puedan realizar las empresas o las Oficinas de Recaudación de Impuestos con fines contables. En nuestro caso nos referiremos exclusivamente a aquellos cálculos cuya finalidad sea la elaboración de una teoría y/o su confrontación con la realidad. En este sentido, son de mencionar, entre otros, los siguientes objetivos del Calculo Científico: elaboración y validación de modelos, interpretación en tiempo real de experiencias, realización y optimización de productos, enunciado y verificación de conjeturas (recuérdese el problema de los cuatro colores en el que ha sido sólo gracias a los ordenadores que se ha podido obtener su resolución), etcétera.

Ocupándonos de nuevo de la figura de von Neumann, parece que fue en 1940 cuando su trayectoria científica tuvo una importante inflexión. En ese año tuvo un primer contacto con el *Ballistic Research Laboratory* de Aberdeen, escribiendo su primer artículo ([36]) sobre análisis numérico con el oficial Robert Kent²⁰. Años mas tarde, en 1955, en un homenaje a Kent reconocería lo siguiente:

Antes era, aparte de algunas infidelidades, un matemático puro. Gracias a Kent me introduje en las ciencias aplicadas. He tenido éxito al perder mi pureza.

Y según Halmos [31]

... hasta 1940 von Neumann era un matemático puro excepcional que comprendía Física; después fue un matemático aplicado que recordaba su trabajo como matemático puro.

En 1942 comienza una serie de trabajos sobre el análisis numérico de la inversión de matrices y su aplicación a la resolución de ecuaciones lineales de orden elevado²¹, algunos de ellos en colaboración con Bargmann y Montgomery ([5]²²) y más tarde en varios trabajos con Goldstein que finalmente redondearía con este último y con Murray en un artículo póstumo ([29]). Investigaciones más aplicadas de esta década son las que realizó sobre Astrofísica junto al Premio Nobel S. Chandrasekar ([14] y [15]), así como sus estudios sobre ondas de choque para flujos compresibles que desarrolló en forma de informes: Informe al Secretario de Estado de Defensa ([64]), informe sobre detonación ([66]), sobre choques oblicuos ([67]), y el estudio numérico de las ondas de choque ([68]).

¹⁹Véase la exposición panorámica realizada en Lions [40] y la información más actualizada presentada en la web <http://www.cs.iastate.edu/>

²⁰Este artículo no aparece recogido en sus *Collected Works* por lo que ha pasado desapercibido para algunos estudiosos de su obra.

²¹Uno de ellos ([65]) lo publicó en *Portugaliae Mathematica*.

²²Un listado de las publicaciones de von Neumann puede verse en Aspray [3] (véase también la web <http://www.info.omikk.bme.hu/tudomany/neumann/javnbibl.htm>). Al igual que en dicho texto, se indica al final de cada referencia de von Neumann la recopilación en la que aparece recogida: [T] se refiere a Taub [91] y [AB] a Aspray y Burks [4].

Pero su aportación mas innovadora, en la década de los años cuarenta, se refiere a la planificación de la “creación” de un ordenador para la investigación científica. El comienzo de esa aventura parece datar de una visita a Inglaterra en 1943. Así, en una carta a Veblen, fechada el 29 de mayo de 1943, declara

He desarrollado un interés obsceno por las técnicas de computación.

Ya en Los Alamos²³, desarrolló técnicas de programación criticando las limitaciones de los ordenadores existentes, comenzando así su importante obra en Ingeniería de Ordenadores, Sistemas de Calculo, Teoría de Autómatas, etcétera. Dar cuenta de sus aportaciones en esta dirección se escapa del alcance de esta presentación. El lector podrá encontrar en exposiciones más especializadas, como por ejemplo las de Aspray [1] y [3], detalles sobre su participación en el diseño del gran ordenador EDVAC en 1947 posterior a la del ENIAC en 1946 lo que originó la famosa controversia con los ingenieros de Pensilvania J.P. Eckert y J.W. Mauchly, creadores de este último. Más tarde también diseñaría otros grandes computadores para el IAS de Princeton.

Un texto inédito de mayo de 1946, en colaboración con H. Goldstein (Goldstein y von Neumann [27]), puede considerarse de importancia histórica pese a que por su carácter de informe técnico apenas pudo ser libremente consultado hasta que apareció en sus *Collected Works* ([91]). En este trabajo, de título *Large Scale Computing Machines*, se analiza el interés de los grandes ordenadores desde el punto de vista del matemático, del ingeniero y del programador^{24 25}. Casi nada más comenzar ya se preguntan sobre los fines de estas maquinas:

Where lie the main mathematical needs for high speed automatic computing and what characteristics of a computing device are effective in the various pertinent phases of mathematics?

A modo de respuesta comentan

²³Sobre su paso por Los Alamos y el papel pionero de von Neumann en la llamada *Scientific Computing* véase el artículo de P. Lax [38] quien recibió el Premio Abel del 2005 por sus contribuciones en numerosas áreas muy cercanas a las cultivadas por von Neumann.

²⁴La puesta en marcha del super-ordenador Mare Nostrum, en Catalunya, el 2005, originó una serie de reflexiones de una naturaleza similar al de Goldstine y von Neumann [27]. Véase, por ejemplo, el *Libro blanco de e-ciencia en España*. <http://www.fecyt.es/documentos/e-Ciencia.pdf>.

²⁵Un hecho que parece escasamente conocido por la comunidad española de Matemática Aplicada es que en nuestro país se realizaron varios intentos tempranos de potenciar la computación en estrecho contacto con los matemáticos más activos de la época. Esto se produjo, en 1956, bajo sugerencia de J. Rey Pastor, en el Instituto de Cálculo del CSIC, creado en 1953 y que se integraría en otros centros del CSIC en el 1959 (Castro [13]). De hecho, los miembros de la Comisión Gestora de SEMA también ignorábamos en su día la existencia previa de un intento de creación de una Sociedad Española de Matemática Aplicada (de acrónimo SEMA) que coincidió con el periodo antes citado y que llegó a editar un boletín, de nombre Arquímedes, cuyo número 1 apareció en 1955. He tenido el privilegio de mantener varias conversaciones con Sixto Ríos García. La descripción de aquellos momentos pioneros merece, a mi juicio, un análisis detallado que espero llevar más adelante.

our present analytical methods seem unsuitable for the solution of the important problems arising in connection with nonlinear partial differential equations and, in fact, with virtually all types of nonlinear problems in pure mathematics,

ocupándose también de su posible aplicabilidad en Mecánica de Fluidos

only the most elementary problems of Fluid Mechanics have been solved analytically... the main mathematical difficulties have been known since the time of Riemann and Reynolds...

y con respecto a la relación de estos problemas con la Física se pronuncian de esta manera:

One may be tempted to qualify these problems as problems in Physics, rather than in Applied Mathematics, or even Pure Mathematics... such an interpretation is wholly erroneous... That the first, and occasionally the most important, heuristic pointer for new mathematics advances should originate in Physics is not a new or a surprising occurrence...

Más tarde mencionan problemas de ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico aún sin respuesta (en Teoría del Potencial, aplicaciones conformes, superficies mínimas, etcétera) así como los ligados a la turbulencia²⁶. Finalmente, es de resaltar su premonición sobre el papel de los grandes computadores en relación con la experimentación²⁷:

... wind tunnels are used at present as computing devices of the so called analogy type... Digital devices have more flexibility and more accuracy and could be made much faster under present conditions... They may provide us with those heuristic hints which are needed in all parts of mathematics for genuine progress.

John von Neumann escogió la Meteorología Numérica como futuro banco de pruebas del ordenador del IAS. Al parecer su interés en el tema le fue suscitado por V. Zworykin (ingeniero eléctrico de RCA) en 1945 así como por C.G. Rossby quien en una carta fechada el 23 de abril de 1946 le

²⁶La voluntad de aplicar esas máquinas de computación a gran escala a problemas de la Matemática Aplicada no aparece tan nitidamente en la obra de otra figura del siglo XX como fue Alan Turing. Ambos pioneros de la computación evolucionaron partiendo de un profundo conocimiento de la lógica matemática y coincidieron en el ISA de Princeton entre 1936 y 1938 (de hecho, von Neumann ofreció a Turing la posibilidad de un contrato permanente allí). Hay serias dudas de que von Neumann se inspirase en los trabajos de Turing sobre su "máquina universal" cuando propuso su arquitectura del computador. El banco de pruebas idóneo para Turing consistía en un objeto de la Matemática Pura: la función zeta de Riemann. (Agradezco a F. Ortegón sus interesantes comentarios sobre la relación entre von Neumann y Turing y cuidadosa lectura de una versión previa de este artículo)

²⁷Lax señala en [38] que se ha de considerar a von Neumann como uno de los padres de la *Computational Fluid Dynamics*.

hablaba de la necesidad de investigar sobre las fluctuaciones y modificaciones climáticas. En un informe a L. Straus, director del IAS, en 1947, von Neumann presenta una larga lista de temas que el ordenador, en aquella fecha aún en diseño, debería abordar. Entre los temas están los siguientes: ecuaciones en derivadas parciales no lineales en Hidrodinámica, Elasticidad y otros campos, experimentos estadísticos, Astrofísica, Física Atómica, Cristalografía, etcétera. Más tarde, en 1956 Goldstine afirma que un tercio del tiempo del ordenador es para la Meteorología

ejemplo primordial de fenómenos no lineales complejos,
anteriormente inaccesibles a la investigación matemática.

Efectivamente, hasta ese tiempo la predicción meteorológica tenía mucho de arte, las líneas de isobaras e isotermas se dibujaban a mano sobre los mapas que eran almacenados en mapotecas de obligada consulta y la experiencia personal en memorizar situaciones pasadas era de vital importancia. El nuevo enfoque que von Neumann proponía constaba de cuatro etapas (véase [71]). La primera de ellas era la Modelización Física en la que la distintas simplificaciones habían marcados los progresos en el área gracias a los trabajos iniciales de Euler, Navier y Sokes, Kelvin, Rayleigh, Helmholtz y otros, hasta llegar a V. Bjerknes en 1904 y especialmente L. Richardson con su libro de 1922 ([90]). Uno de sus distinguidos continuadores, C.G. Rossby, entabló contacto con von Neumann ya en 1942. Una segunda etapa se refería a las técnicas numéricas y gráficas que basadas en procesos de aproximación deberían suplir la imposibilidad de obtener soluciones explícitas. La toma y almacenamiento de datos sería de una capital importancia para representar adecuadamente las condiciones de contorno e iniciales de los modelos. Finalmente, la cuarta etapa consistiría en la Computación en grandes ordenadores que permitiesen un pronóstico diario, en tiempo real²⁸.

Este programa se vio impulsado enormemente por las necesidades derivadas de la Segunda Guerra Mundial. En 1946 von Neumann elevó a la Navy una propuesta (rápidamente aceptada) con un plan temporal muy detallado en el que las experiencias numéricas no comenzarían hasta 1949. Se pedía la contratación de un equipo formado por cinco o seis meteorólogos jóvenes que se adscribirían al IAS de Princeton. Uno de ellos fue J. Charney que en muy poco tiempo se convirtió en un reputado especialista y que permaneció en el IAS hasta 1956. Entre la larga lista de asesores estaban E. N. Lorenz y J. Smagorinsky entre otros.

El equipo comenzó con unas experiencias previas en el ENIAC sobre un modelo barotrópico (bidimensional) propuesto en Charney [16]. John von Neumann cuidaba personalmente de los aspectos ligados al tratamiento numérico de los modelos, en particular proponía los algoritmos de aproximación de las ecuaciones en derivadas parciales y de las condiciones de contorno y

²⁸Hoy día esa estructuración en etapas es típica de la Matemática Aplicada (véase, por ejemplo, Lions [39], donde el lector encontrará alusión al "sueño de las 64.000 máquinas de Richardson").

la propagación de perturbaciones desde la frontera. Ello le llevó a elaborar un criterio de estabilidad computacional que mejoraba el famoso criterio de Courant, Friedrichs y Lewy [18] ([72]). Al ENIAC le costaba 36 horas llevar a cabo un pronóstico de 24 horas. En particular, el pronóstico realizado para el 31 de enero de 1949 fue muy bueno constituyendo un hecho histórico en la Meteorología con el que se abría una nueva era.

Una vez construido el ordenador del IAS, el equipo trabajó con un modelo baroclínico, propuesto por N. Phillips ([88]), que por su carácter tridimensional permitía la predicción de posibles tormentas. Se trataba de retener tan solo los términos principales para movimientos atmosféricos a gran escala (en extensiones de más de 3 Km). Utilizaron las ecuaciones simplificadas del viento geostrofico

$$v = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad u = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y}$$

en la que los vientos aparecen como paralelos a las isobaras, giros contra-reloj. Tras introducir la componente vertical de la vorticidad (rotacional de la velocidad)

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

las nuevas ecuaciones pasaban a ser

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + v \frac{df}{dy} = \\ -w \frac{\partial \zeta}{\partial z} - (\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + J(p, \frac{1}{\rho}) + \\ \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f_{ry}}{\partial x} - \frac{\partial f_{rx}}{\partial y}, \end{aligned}$$

siendo

$$J(p, \frac{1}{\rho}) = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\rho} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho}.$$

A continuación se retienen tan solo los términos dominantes siguiendo la llamada *aproximación del plano-beta*, obteniéndose por fin la ecuación

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + v \beta_0 = 0$$

que es la llamada ecuación barotrópica de la vorticidad y que fue el objeto del importante artículo Charney, Fjortoft y von Neumann [17].

El gran computador del IAS elaboraba ya un pronóstico de 24 horas en 10 minutos de cálculo (que equivalían a 8 años de cálculo para una pequeña computadora de la época). Los resultados fueron aplicados con éxito prediciendo una gran tormenta para el día de Acción de Gracias de 1950. Por cierto que para la fundamentación teórica, von Neumann utilizó el método que hoy día se conoce como de *viscosidad evanescente* que ya había aplicado, junto a Richtmyer en el estudio de ondas de choque ([82]).

En 1953, el pronóstico a corto plazo estaba tan redondeado que dejó de tener un interés prioritario entre las experiencias del ordenador del IAS. El reto se desplazaba al diagnóstico a más largo plazo, Phillips propuso, en 1955,



Figura 2: Von Neumann (segundo por la izquierda) en 1950 ante el ENIAC en compañía de algunos meteorólogos (Charney es el primero por la derecha). Fuente <http://ecpc.ucsd.edu/general/pics/eniac-50.html>

los modelos de Circulación General de la Atmósfera y el protagonismo de von Neumann cesó (entre otras cosas por la instalación de von Neumann en Washington como miembro de la Comisión de Energía Atómica). El IAS suspendió su programa sobre Meteorología Numérica y Charney y Phillips se establecieron en el MIT de Massachusetts.

Sin embargo, el programa de von Neumann había abierto una nueva época en la Ciencia. El Cálculo Científico permite tratar, hoy día, fenómenos de una gran complejidad, como es el caso de la mayoría de las aplicaciones, revolucionando el proceso de simulación y validación de los modelos. Sólo una mente privilegiada como la de von Neumann podía haber tenido la capacidad y confianza en hacer realidad algo inimaginable hace unas décadas.

Merece la pena resaltar que al final de sus días John von Neumann se ocupó de la Meteorología desde el punto de vista del control. Así en su artículo de 1955 ([77]) afirmaba:

Probably intervention in atmospheric and climate matters will come in a few decades, and will unfold on a scale difficult to imagine at present.

En particular, propuso el problema de actuar sobre el clima atmosférico mediante adecuadas intervenciones artificiales sobre el albedo superficial en zonas cercanas a los casquetes polares. Se trata de lo que más tarde ha sido denominado como *the von Neumann problem*²⁹. En un reciente artículo ([81])

²⁹ Algunas de sus geniales ideas no han tenido una formulación matemática rigurosa más que hasta hace sólo unos años (véase, por ejemplo, Lions [39] y su bibliografía, así como Díaz [20]).

su hija Martina señalaba que la modificación del clima fue quizás el último de los sueños científicos de von Neumann para el que confiaba poder aplicar sus estudios previos sobre modelización y la potencia de los ordenadores que él había creado.

Referencias

- [1] Aspray, W. [1985]: The Scientific Conceptualization of Information: A Survey, *Annals of the History of Computing*, **7**, 117-140.
- [2] Aspray, W. [1987]: The Mathematical Reception of the modern Computer: John von Neumann and the Institute for Advanced Study Computer, en *Studies in the History of Mathematics* (ed. E. R. Phillips), MAA, 166-194.
- [3] Aspray, W. [1990]: *John von Neumann and the origins of modern computing*, The MIT Press, Cambridge, MA. Traducción española de E. Alterman en Gedisa, Barcelona, 1993.
- [4] Aspray, W. y Burks, A. (eds.) [1987]: *Papers of John von Neumann on Computing and Computer Science*, The MIT Press, Cambridge, MA y Tomash Publishers, Los Angeles.
- [5] Bargmann, V. Deane Montgomery, D. y von Neumann, J. [1946]: Solution of Linear Systems of High Order, Report prepared for Navy Bureau of Ordnance, under Contract Nord-9596, October 25. 85 pp. [T,V, 421-477].
- [6] Benardi, C. et al. [1994]: Rapport sur le calcul scientifique, *Matapli*, SMAI, **38**, 23-44.
- [7] Bernadou, M. [2001]: *Le Calcul Scientifique*, Que sais-je?, Presses Univaesitaires de France, Paris.
- [8] Birkhoff, G. [1958]: Von Neumann and Lattice Theory, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **64**, 50-56.
- [9] Brody F. y Vamos, T. [1995]: *The Neumann Compendium*, World Scientific.
- [10] Brown, G. W. y von Neumann [1950]: Solutions of Games by Differential Equations, *Annals of Mathematics Studies* (Princeton University Press), **24** 73-79 [T,V1, 38-43].
- [11] Calkin, J. W., Evans, C., Evans, F., Neumann, K. von, y Neumann, J. von [1951]: *The Burning of D-T Mixtures in a Spherical Geometry*. Laboratorio Científico de Los Alamos, LA-1233, 23 de abril. Información secreta, restringida.
- [12] Calkin, J. W., Evans, C., Evans, F., Neumann, K. von, y Neumann, J. von [1951b.]: Suplemento de *The Burning of D-T Mixtures in a Spherical Geometry*, Laboratorio Científico de Los Alamos, LA-1237, 23 de abril. Información secreta, restringida.

- [13] Castro, A. de [1985]: Historia del Instituto de Cálculo. En *Actas I Simposio sobre Julio Rey Pastor* (ed. L. Español), Instituto de Estudios Riojanos, Logroño, 195- 207.
- [14] Chandrasekhar, S. y von Neumann, J. [1942]: The Statistics of the Gravitational Field Arising from a Random Distribution of Stars I, *Astrophysical Journal* **95**, 489-531 [T, VI, 102-144].
- [15] Chandrasekhar, S. y von Neumann, J. [1943]: The Statistics of the Gravitational Field Arising from a Random Distribution of Stars II. The Speed of Fluctuations; Dynamical Friction; Spatial Correlations, *Astrophysical Journal* **97**, 1-27 [T, VI, 145-171].
- [16] Charney, J.G. [1949]: On a Physical Basis for Numerical Prediction of large-Scale Motions in the Atmosphere, *Journal of Meteorology*, **6**, 371-385.
- [17] Charney, J.G., Fjortoft, R. and von Neumann, J. [1950]: Numerical integration of the barotropic vorticity equation, *Tellus*, **2**, 237-254.
- [18] Courant, R., Friedrichs, K. y Lewy, H. [1928]: Über die partiellen Differenzgleichungen der Mathematischen Physik, *Mathematische Annalen*, **100**, 32-74.
- [19] Dautray, R. *et al.* [1992]: Le calcul scientifique, *La vie des Sciences, Comptes Rendus Ac. Sc. Paris*, **9**, 63-83.
- [20] Díaz, J.I. [2002]: On the von Neumann problem and Stackelberg strategies, *Rev. R. Acad. Cien. Serie A Matem.*, **96**, n° 3, 343-356.
- [21] Dieudonné, J. [1976]: Von Neumann, Johan (or John), *Dictionary of Scientific Biography*, **14**, 88-92.
- [22] Dirac, P.A.M. [1930]: *The Principles of Quantum Mechanics*, Clarendon, Oxford.
- [23] Fekete, M. y von Neumann, J. [1922]: Über die Lage der Nulstellen gewisser Minimumpolynome, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* **31**, 125-138 [T, I, 10-23].
- [24] Fermi, E. y von Neumann, J. [1953]: Taylor Instability al the Boundary of Two Incompressible Liquids, Documento AECU-2979 del Gobierno de los Estados Unidos, Parte II , 7-13 [T, VI, 431-434].
- [25] Glimm, J., Impagliazzo, J. y Singer, I. (eds.) [1990]: *The Legacy of John von Neumann*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **50**, AMS, Providence, Rhode Island.
- [26] Goldstine, H. [1972]: *The Computer from Pascal to von Neumann*, Princeton Univ. Press.

- [27] Goldstine, H.H. y von Neumann, J. [1946]: On the Principles of Large Scale Computing Machines, (inédito) [T,V, 1-32; AB, 315-348].
- [28] Goldstine, H.H. y von Neumann, J. [1947b]: Planning and Cocting of Problems for an Electronic Computing Instrument, Part II, I. Report prepared for U. S. Army Ord. Dept. under Contract W-36-034-ORD-7481. [T,V, 80-151; AB, 151-222].
- [29] Goldstine, H.H., Murray, F.J. y von Neumann, J. [1959]: *The Jacobi Method for Real Symmetric Matrices, Association for Computing Machinery. Journal* **6**, 59-96 [T, V, 573-610].
- [30] Halmos, P.R. [1958]: Von Neumann on Measure and Ergodic Theory, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **64**, 86-94.
- [31] Halmos, P.R. [1973]: The legend of John von Neumann, *American Mathematical Monthly*, **80**, 382-394.
- [32] Heims, S.J. [1982]: *John von Neumann and Norbert Wiener*, The MIT Press, Cambridge, MA.
- [33] Hilbert, D., von Neumann, J., y Nordheim, L.[1927]: Uber die Grundlagen der Quantenmechanik, *Mathematische Annalen* **98**, 1-30 [T,I, 104-133].
- [34] Israel, G. y Millán Gasca, A. [1995]: *Il mondo come gioco matematico*. La Nuova Italia Scientifica, Roma
- [35] Kadison, R.V. [1958]: Theory of Operators, Part II. Operator Algebras, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **64**, 61-85.
- [36] Kent, R. H. y von Neumann, J. [1940]: The Estimation of the Probable Error from Successive Differences, Report 175, Ballistic Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, Md., February 14.
- [37] Kuhn, H. W. y Tucker, A.W. [1958]: John von Neumann's work in the theory of games and mathematical economics, *Bull. Amer. Math. Soc.* **64** 100-122.
- [38] Lax, P. [2005]: John von Neumann: The Early Years, the Years at Los Alamos, and the Road to Computing, *SIAM News*, March 2005, 9-10.
- [39] Lions, J.L. [1990]: *El Planeta Tierra: El papel de la Matemáticas y los superordenadores*, Serie del Instituto de España n^o 2, Espasa Calpe, Madrid.
- [40] Lions, J.L. [1991]: De la machine à calculer de Pascal aux ordinateurs, *La Vie des Sciences, Comptes Rendus Ac. Sc. Paris*, **8**, 221-240.
- [41] Lions, J.L. [1993]: Le temps du contrôle, *La Vie des Sciences, Comptes Rendus Ac. Sc. Paris*, **10**, 305-328.

- [42] López Pellicer, M. (ed.) [2003]: Centenario de John von Neumann (1903-1957), *Arbor*, **692**, Agosto.
- [43] Morgenstern, O. y von Neumann, J. [1944]: *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, Princeton University Press.
- [44] Murray, F.J. [1958]: Theory of Operators, Part I. Single Operators, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **64**, 57-60.
- [45] Murray, F.J. y von Neumann. J. [1937]: On Rings of Operators II, *Transactions of the American Mathematical Society* **41**, 208-148 [T,III, 120-160].
- [46] Murray, F.J. y von Neumann. J. [1943]: On Rings of Operators IV, *Annals of Mathematics* **44**, 716-808 [T, III, 229-321].
- [47] Neumann, J. von, [1923]: Zur Eiführung der transfiniten Zahlen, *Acta literarum ac scientiarum Requiae Universitatis Hungaricae Franciscosephinae, Sectio scintiarum mathematicarum* **1**, 199-208 [T, I, 24-33].
- [48] Neumann, J. von, [1925b]: Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, *Journal fur die reine und angewandte Mathematik* **154**, 219-249 [T, I, 34-56].
- [49] Neumann, J. von, [1926]: *Az altalanos: nalmazelmelet axiomatikus folepitses*, Tesis, Universidad de Budapest.
- [50] Neumann, J. von, [1926a]: Zur Proferschen Theorie der idealen Zahlen, *Acta Universitatis Swzegediensis* **2**, 193-227 [T, I, 68-103].
- [51] Neumann, J. von, [1927d]: Zur Hilbertschen Beweistheorie, *Mathematische Zeitschrift* **26**, 1-46 [T, I, 256-300].
- [52] Neumann, J. von, [1928a]: Die Axiomatisierung der Mengenlehre, *Matematische Zeitschrift* **27**, 669-752 [T, I, 339-422].
- [53] Neumann, J. von, [1928d]: Einige Bemerkungen zur Diracschen Theorie des Drehelektrons, *Zeitschrift fur Physik*, **48**, 868-881 [T, I, 423-436].
- [54] Neumann, J. von, [1928f]: Sur la théorie des jeux, *Comptes Rendus des Séances. Académie des Sciences. Paris* **186**, 1698-1791.
- [55] Neumann, J. von, [1928g]: Über die Definition durch transfiniten Induktion, und vverwandte Fragen der Allgemeinen Mengenlehre, *Matematische Annalen* **99**, 373-391 [T, I, 320-338].
- [56] Neumann, J. von, [1931e]: Über Funktionen von Funktionaloperatoren, *Annals of Mathematics* **32**, 191-226 [T, II, 177-212].
- [57] Neumann, J. von, [1932c]: Physical Applications of the Ergodic Hypothesis, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **18**, 263-266 [T, II, 274-277].

- [58] Neumann, J. von, [1932d]: Proof of the Quasi-Ergodic Hypothesis, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **18**, 70-82 [T, II, 260-273].
- [59] Neumann, J. von, [1932b]: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlín, Springer, New York, Dover Publications, 1943; Presses Universitaires de France, 1947; Madrid, Instituto de Matemáticas Jorge Juan, 1949, traducido por Robert T. Beyer, Princeton University Press, 1955.
- [60] Neumann, J. von, [1933b]: Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen, *Annals of Mathematics* **34**, 170-190 [T, II, 366-386].
- [61] Neumann, J. von, [1934b]: Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen. *Compositio Mathematica*, 106-114 [T, II, 445-453].
- [62] Neumann, J. von, [1936c]: On a Certain Topology for Rings of Operators, *Annals of Mathematics* **37**, 111-115 [T, III, 1-5].
- [63] Neumann, J. von, [1937d]: Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes, *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* **3**, 73-83.
- [64] Neumann, J. von, [1941 c]: Shock Waves Started by an Infinitesimally Short Detonation of Given (Positive and Finite) Energy, Consejo de Investigaciones de Defensa Nacional, Div. 8, 30 de junio, Documento AM-9 del Gobierno de los Estados Unidos.
- [65] Neumann, J. von, [1942b]: Approximate Properties of Matrices of High Finite Order, *Portugaliae Mathematica* **3**, 1-62 [T,IV, 270-331].
- [66] Neumann, J. von, [1942d]: Theory of Detonation Waves, Informe de progreso al 1° de abril de 1942, Documento PB 31090 del Gobierno de los Estados Unidos, 4 de mayo, [T,VI, 203-218].
- [67] Neumann, J. von, [1943a]: *Oblique Reflection of Shocks*, Documento PB 37079 del Gobierno de los Estados Unidos, 12 de octubre [T, VI, 238-299].
- [68] Neumann, J. von, [1944b]: Proposal and Analysis of a New Numerical Method for the Treatment of Hydrodynamical Shock Problems. AMP Report 108.1R AMG-IAS 1. Submitted by the Applied Mathematics Group, Institute for Advanced Study to the Applied Mathematics Panel National Defense Research Committee, March 20th, OSRD-3617. 31 pp. [T,VI, 361-379]
- [69] Neumann, J. von, [1945a]: A Model of General Economic Equilibrium. *Review of Economic Studies* **13**, 1-9. [T, VI, 29-37]
- [70] Neumann, J. von, [1947a]: The Mathematician, En *The Works of the Mind*, 180-196. Editado por Robert B. Heywood, Chicago, University of Chicago Press [T, I, 1-9] (véase también [87]).

- [71] Neumann, J. von, [1947c]: The Future Role of Rapid Computing in Meteorology, *Aeronautical Engineering Review* **6**, 30.
- [72] Neumann, J. von, [1948c]: Segundo Informe sobre el Cálculo Numérico de Problemas de Flujo, 25 de julio (inédito) [T, V, 713-750].
- [73] Neumann, J. von, [1949a]: On Rings of Operators: Reduction Theory, *Annals of Mathematics* **50**, 401-485 [T, III, 400-491]
- [74] Neumann, J. von, [1953a]: A Certain Zero-Sum Two-Person Game Equivalent to the Optimal Assignment Problem, *Annals of Mathematics Studies*, **28**, 5-12 [T,VI, 44-49].
- [75] Neumann, J. von, [1954a]: A Numerical Method to Determine Optimum Strategy, *Naval Research Logistics Quarterly* **1**, 109-115. [T, V1, 82-88].
- [76] Neumann, J. von, [1954d]: The NORC and Problems in High Speed Computing , Address in the occasion of the first public showing of the IBM Naval Ordnance Research Calculator, December 2 [T,V, 238-247; AB, 350-359].
- [77] Neumann, J. von, [1955a]: Can We Survive Technology?, *Fortune*, 106-108, 151-152 [T,V1, 504-519].
- [78] Neumann, J. von, [1958a]: *The Computer and the Brain*, New Haven, Yale University Press.
- [79] Neumann, J. von, [1960]: *Continuous Geometry*, Princeton, Princeton University Press.
- [80] Neumann Whitman, M. von [1990]: John von Neumann: a personal view. En [25], 1-4.
- [81] Neumann Whitman, M. von [2005]: Life with Father, *SIAM News*, March 2005, 8-9.
- [82] Neumann, J. von, y Richtmyer, R.D. [1950]: A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks, *Journal of Applied Physics* **21**, 232-237 [T,V1, 380-385].
- [83] Neumann, J. von., v.N. y Teller, E. [1954]: *Applications of the Hot Sphere Generated by an A-Bomb*, Laboratorio de Radiaciones de la Universidad de California, Livermore UCRL-4412 noviembre. Información secreta, restringida.
- [84] Neumann, J. von, y Wigner, E. [1928a]: Zur Erklarungeiniger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons I, *Zeitschrift fur Physik* **47**, 203-220 [T, I, 438-456].

- [85] Neumann, J. von, y Wigner, E. [1928b]: Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons II, *Zeitschrift für Physik* **49**, 73-94 [T, I, 457-493].
- [86] Neumann, J. von, y Wigner, E. [1928c]: Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons III, *Zeitschrift für Physik*, **51**, 844-858.
- [87] Newman, J. R. (ed.) [1956]: *The world of Mathematics*, Simon and Schuster, Inc., New York. Traducción española de M. Sacristan *et al.* bajo el título *Sigma*, Ediciones Grijalbo, S.A., Barcelona, 1968.
- [88] Phillips, N.A. [1951]: A Simple ThreeDimensional Model for the Study of LargeScale Extratropical Flow Patterns, *Journal of Meteorology*, **8**, 381-394.
- [89] Poundstone, W. [1992]: *Prisoner's dilemma: John von Neumann, Game theory and the Puzzle of the Bomb*, Dover. Traducción española de D. Manzanares, Alianza Editorial, Madrid, 1995.
- [90] Richardson, L. F. [1922]: *Weather prediction by Numerical Processes*, Cambridge University Press.
- [91] Taub, A.H. (ed.) [1963]: *John von Neumann: Collected Works* (seis volúmenes) Pergamon Press, New York.
- [92] Tobin, M., Chocate, L. y Beller, D. [1993]: Use of Inertial Confinement Fusion for Nuclear Weapons Effects Simulations, Sandia National Laboratory Reports, Albuquerque, NM.
- [93] Ulam, S. [1958]: John von Neumann 1903-1957, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **64**, 149.
- [94] Ulam, S. [1976]: *Adventures of a Mathematician*, Scribner, New York.
- [95] Van Hove, L. [1958]: Von Neumann's Contributions to Quantum Theory, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **64**, 95-99.
- [96] Vonneuman, N.A. [1987]: *John von Neumann as seen by his brother*, Meadowbrook, PA.
- [97] Vonneuman, N.A. [1990]: The philosophical legacy of John von Neumann, in the light of its inception and evolution in his formative years, En [25].