Jesùs Idelfonso Diaz

Clima e matematica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1, p. 95–105.
Unione Matematica Italiana
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1_95_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

Bollettino U. M. I.
La matematica nella Società e nella Cultura
(8) 2-A (1999), pag. 95-105

Clima e matematica.

JESÙS ILDELFONSO DIAZ (*)

Mettere in relazione qualcosa di tanto complesso e eterogeneo come il clima con una scienza tanto apparentemente intollerante alle imprecisioni come la Matematica potrebbe parere a prima vista, un impegno artificiale ed ingiustificato. Nulla è più lontano dalla realtà. I modelli matematici (a volte chiamati modelli numerici per la predominante componente computazionale) hanno il compito (e la responsabilità) di formulare le leggi fisiche che reggono la variazione delle diverse variabili che configurano il clima. Grazie a questi modelli l'uomo è capace oggi di predire, con notevole successo, tanto il tempo che farà nei prossimi giorni, ammortizzando così gli effetti delle possibili catastrofi naturali, quanto analizzare le conseguenze negative dell'aumento dell'effetto dell'inverno per l'inquinamento atmosferico. Questi modelli permettono anche di guardare al passato e ricostruire situazioni climatiche di cui abbiamo solo dati limitati. Quest'ultimo obiettivo, oltre che avere un grande interesse in sè stesso, è di grande utilità per la validazione dei modelli e per migliorare la loro affidabilità.

Ma che tipo di matematica è presente nello studio del clima? Il bagaglio richiesto per entrare nel mondo matematico e la limitata estensione di questa nota ci suggeriscono di affrontare la risposta senza entrare nei dettagli tecnici, ma indicando almeno le *parole chiave* da cui il lettore interessato potrà ricostruire il cammino che

(*) Jesùs Ildelfonso Diaz è ordinario di Matematica Applicata dell'Università Complutense di Madrid e membro della Reale accademia di Scienze Esatte, Fisiche e Naturali.

L'articolo è stato tradotto in italiano dalla professoressa Elvira Mascolo che vivamente si ringrazia per la collaborazione.

forse non è esente da difficoltà ma senza dubbio è pieno di soddisfazione intellettuale. Nulla di meglio che cominciare segnalando che le interazioni tra la climatologia e la matematica non è esclusiva della nostra epoca in cui i calcolatori hanno rivoluzionato l'applicabilità della matematica. Così per esempio, il tema proposto dall'Accademia Francese delle Scienze per il Premio di Matematica del 1738 riguardava *la causa del flusso e riflusso del mare* e risultarono premiati D. Bernoulli, L. Euler e C. MacLaurin. Inoltre, il Premio di Matematica dell'Accademia delle Scienze di Prussia dell'anno 1746 fissava come tema *la causa generale dei venti*, risultando questa volta premiato J. d'Alembert.

D'altra parte, P. S. de Laplace, scriveva nel 1772 «*Si possono riconoscere e determinare attraverso un gran numero di osservazioni, anche se poco precise, le leggi e le cause di fenomeni dei quali è impossibile ottenere le espressioni analitiche come, ad esempio, gli effetti del calore solare sull'atmosfera, la produzione dei venti alisei e dei monsoni, e le variazioni regolari, sia quotidiane che annuali, del barometro o del termometro*». Infine, J. Fourier, anticipava un punto di vista che risponde allo sforzo ecologico dei nostri giorni affermando nel 1824: «*la fondazione e il progresso delle società umane, l'azione delle forze naturali, possono cambiare notevolmente e entro grandi regioni, lo stato della superficie del suolo, la distribuzione delle acque e i grandi movimenti dell'aria. Detti effetti sono capaci di far variare la temperatura media nell'arco di vari secoli*».

Il punto di vista di Fourier fissa la sua attenzione non solo sulla predizione a corto raggio del tempo (quello che oggi ci offrono i telegiornali e i giornali), ma anche le variazioni del clima su una scala di tempo più lunga: decine di anni, secoli e perfino migliaia di anni. È chiaro che questa differenza di obiettivi (che distingue la Meteorologia dalla Climatologia) si traduce in una reale differenza nei modelli matematici utilizzati in un caso e nell'altro.

La predizione del tempo su una scala temporale molto piccola richiede di disporre di un'informazione di tipo numerico quanto più precisa è possibile per ciascuna delle variabili climatiche: temperatura terrestre e marina a differenti altezze e profondità, direzione ed intensità delle velocità, isobare dei fluidi («cieli e mari») che ci circondano, proprietà chimiche delle sue componenti (salinità, concentrazione dei gas), etc. Di ciò si occupano i modelli genericamente chiamati di *Circolazione Generale*. Gli algoritmi o *modelli discreti*, attualmente implementati sui più potenti calcolatori disponibili al momento, si ottengono sostituendo con sistemi di equazioni discretizzate le numerose *equazioni a derivate parziali non lineari* e accoppiate tra loro (le quantità da studiare dipendono da varie variabili spaziali e dal tempo).

La possibilità di prevedere il tempo, con tutte le sue possibili limitazioni, è uno dei grandi trionfi di settori fondamentali della matematica come l'*Analisi Numerica* e l'*Informatica*. Non è sorprendente che il nome di un meteorologo, come L. F. Richardson, appaia frequentemente e con pieno diritto nei testi di Analisi Numerica per le sue ricerche, condotte nella seconda decade del secolo, relative ai cosiddetti *schemi espliciti ed impliciti*. Neanche c'è da meravigliarsi che una figura singolare come quella di J. von Neumann, autore di contributi fondamentali nella matematica pura di questo secolo, sia anch'essa collegata a questo problema. Il 31 gennaio 1949 il potente calcolatore ENIAC – da lui progettato – e gli algoritmi numerici suoi e del meteorologo J.G. Charney furono in grado di pronosticare con ventiquattro ore di anticipo una grande tormenta sul nord-est degli Stati Uniti, un evento questo che resterà una pietra miliare nella storia della Meteorologia.

Tuttavia le tecniche più sofisticate dell'Analisi Numerica e dell'Informatica sarebbero rimaste meri fuochi d'artificio se non fosse stato per l'esistenza di un *modello continuo* che formula le leggi fisiche che reggono il comportamento delle variabili climatiche. Questi modelli di solito uniscono insieme varie equazioni (sia vettoriali che scalari) quali le celebri *equazioni di Navier-Stokes*, quella del bilancio di energia, quelle della *diffusione* delle componenti chimiche, etc. Inoltre, è imprescindibile dare un'informazione complementare su quello che accade nell'istante iniziale e quello che succede in ogni istante sul contorno della regione spaziale analizzata. È solo da qualche anno che si è potuto dimostrare con tutto rigore che questi modelli sono moderatamente *ben posti* (1) malgrado la loro enorme complessità e l'impossibilità di risoluzione attraverso formule esplicite. Lo studio di queste questioni è legato all'Analisi Matematica dei modelli ed in particolare a quel settore noto come *Teoria delle Equazioni a Derivate Parziali* o delle *Equazioni Differenziali Ordinarie* (quando le incognite dipendono che da un'unica variabile reale). Esiste inoltre una teoria matematica che analizza la situazione realistica dei *problemi con dati incompleti* (2). D'altra parte, analizzando la dipendenza continua delle variabili climatiche dai dati iniziali, il meteorologo E. N. Lorenz ha reso popolare, a partire dai suoi articoli del 1960, la cosiddetta *Teoria del Caos Deterministico* dei *sistemi dinamici non lineari* e che si presenta in ambiti scientifici tanto diversi fra loro come l'economia, la biologia, etc. (3). È il cosiddetto «effetto farfalla» che è servito perfino come titolo per una recente pellicola cinematografica spagnola. Ma se prima si è avuta la precauzione di usare il termine «moderatamente» ben posto è perché, per quanto incredibile possa sembrare, alla data nella quale si scrive questo articolo, non si conosce se vi è *unicità delle soluzioni*, cioè non è possibile decidere se vi è un unico comportamento di queste variabili a partire dai dati iniziali e al contorno assegnati o – al contrario – se vi sono più comportamenti possibili. Si tratta quindi di un problema aperto che – per livello e difficoltà – non sfigurerebbe a paragone del problema di Fermat recentemente risolto. Un'altra fruttuosa interazione tra matematica e clima è stabilita nello studio del comportamento delle soluzioni di un sistema dinamico non lineare quando la variabile temporale tende all'infinito. Nell'ambito della meteorologia il sistema dinamico associato ha infiniti gradi di libertà. Si potrebbe immaginare che l'insieme di tutti gli stati di equilibrio, soluzioni periodiche, etc. ottenuto (*l'attrattore massimale*), di-

(1) J. L. Lions, R. Temam e S.Wang, *Journ. Math. Pures et Appl.*, **74** pp. 105-164, 1995.

(2) J. L. Lions, *Il Pianeta Terra: il ruolo della matematica e dei super calcolatori* Espana-Calpe; Serie dell'Istituto di Spagna, 1990.

(3) MUNDO CIENTIFICO pubblicò un numero speciale (n. **115**) su *La Scienza del Caos*, giugno-agosto 1991.

pende anche da un numero infinito di parametri, ma si sa che in questo caso non è così: l'insieme ha una *dimensione frattale* (introdotta da B.Mandelbrot come modificazione della *dimensione di Hausdorff*) finita. Inoltre, la *Teoria delle varietà lente* utilizzata in Meteorologia per l'*assimilazione dei dati*, è stata estesa ad un ambito matematico molto più generale (*le varietà inerziali*) per dimostrare che la transizione all'attrattore massimale, quando il tempo tende all'infinito, non avviene in modo omogeneo, finchè ci sono «modi» molto più rapidi di altri che definiscono la regola dell'evoluzione temporale ([4]).

I modelli matematici in Climatologia non pretendono di dare previsioni esatte bensì diagnostiche qualitative. La scala temporale – in tal caso – è molto più grande. Come si suole dire, «gli alberi non lasciano vedere il bosco» ed è consigliabile fare delle semplificazioni dei modelli di circolazione generale. Uno dei contributi più singolari ed innovativi si devono all'astronomo iugoslavo Milutin Milankovitch (1879-1958): questi fu il primo a elaborare una teoria climatica delle glaciazioni del Pleistocene calcolando gli elementi orbitali e i conseguenti cambi nel grado di irraggiamento solare e nel clima ([5]). Come si indica in uno dei riquadri del dossier citato in nota, il principale contributo di Milankovitch fu di analizzare la radiazione solare a diverse latitudini e distinte località con spirito matematico, facendo tabelle e mappe con grandi dettagli. La sua teoria si basava nel fatto che benché l'energia emessa dal Sole fosse intrinsecamente costante, la variazione dei parametri orbitali era causa di cambiamenti fondamentali nella distanza e orientazione relativa tra la terra e il sole, che poteva giustificare i cicli delle glaciazioni passate. A grandi tratti e per menzionare alcuni dei metodi matematici della *Meccanica Celeste* che utilizzò Milankovitch dobbiamo ricordare che i dati orbitali si ottengono attraverso la legge dell'*attrazione universale di Newton* e che unicamente nel caso chiamato *problema dei due corpi*

([4]) R. Temam, in *Mathematics, Climate and Enviromment*, (J.I. Diaz e J.L. Lions, Eds.), Masson, 1993, pp. 189-211.

([5]) MUNDO CIENTIFICO pubblicò un dossier nel quale si fanno ripetuti riferimenti alla teoria di Milankovitch (n. **209**) Settembre 1994.

(soltanto due astri in interazione) si possiede una soluzione esatta che permette di dimostrare rigorosamente le famose *tre leggi di Keplero* (da lui ottenute solo in modo empirico). I cosiddetti metodi *perturbativi* sono i più usati per affrontare il *problema dei tre corpi*. Il portentoso lavoro di Milankovitch è consistito nell'elaborare tavole molto dettagliate, senza l'aiuto dei mezzi di calcolo di cui disponiamo oggi. Non è inutile segnalare che, nonostante l'enorme potenzialità di calcolo attuale, la questione della *stabilità del sistema planetario* costituisce un altro dei grandi problemi matematici che ancora non sono completamente risolti. Per il suo studio, H. Poincaré introdusse le cosiddette *soluzioni quasi periodiche* (soluzioni formate dalla somma di funzioni trigonometriche di frequenza razionale disaccoppiate tra loro). Successivamente A. Kolmogorov congetturò che «la maggior parte» delle soluzioni del problema dei tre corpi erano «quasi-periodiche», fatto che fu dimostrato sotto ipotesi addizionali da V.J. Arnold e J. Moser, negli anni sessanta, dando luogo ad una teoria completa che oggi è conosciuta come *teoria KAM*.

Gli studi sulle ripercussioni delle variazioni della funzione di insolazione (irraggiamento solare) sono ora molto più precise di quelle elaborate da Milankovitch. Non solo per la maggior disponibilità di risorse di calcolo e per le rilevazioni operate dai satelliti posti in orbita a questo scopo (come il Earth Radiation Budget Satellite), ma anche per i progressi realizzati da una più corretta modellizzazione. I modelli matematici più utilizzati in questo periodo sono denominati *Modelli di Bilancio dell'Energia*. La loro principale caratteristica è di analizzare la sensibilità della temperatura a fronte di piccole variazioni dei parametri solari e terrestri. Approfittiamo della sua maggiore semplicità per dare un'idea delle varie fasi nel processo di *modellizzazione matematica*.

Esiste tutta una gerarchia di modelli di questo tipo cominciando da quelli più elementari, chiamati *modelli zero-dimensionali* (a volte denominati modelli «giocattolo»), nei quali l'incognita è la temperatura mediata globalmente che dipende unicamente dal tempo. Una seconda classe è formata dai modelli chiamati *diffusivi unidimensionali* introdotti nel 1969 da M. I. Budyko e W.D. Sellers in modo indipendente. In questi l'incognita è un'opportuna media locale (nel tempo e nello spazio) della temperatura superficiale che porta ora ad un'incognita dipendente dal tempo e dalla latitudine. Se si aggiunge la dipendenza dalla longitudine si ottengono *modelli bidimensionali*. In questo caso l'incognita è definita sulla superficie terrestre che suole essere modellizzata mediante una superficie sferica o più in generale, senza condizioni di simmetria, attraverso una *varietà Riemanniana compatta e senza bordo*. Gli strumenti della *Geometria Differenziale* sono indispensabili – in tal caso – per poter definire in modo appropriato i vari operatori differenziali (gradiente, divergenza, laplaciano, rotore, etc.). Una caratteristica comune a questa classe di modelli è la sua formulazione a partire da un bilancio di energia sulla superficie della Terra: incremento del calore $= R_a - R_e + D$ dove R_a e R_e modellano le componenti interne del sistema climatico e rappresentano rispettivamente l'energia di radiazione (di onda corta) assorbita e l'energia di radiazione (infrarossa di grande lunghezza d'onda) emessa dalla superficie terrestre. D rappresenta la ridistribuzione del calore data attraverso un operatore (di diffusione) differenziale del secondo ordine.

Per costruire il modello abbiamo bisogno di un'incognita che in questo caso è la distribuzione della temperatura sulla superficie terrestre $u(x, t)$, funzione del punto della superficie x e dell'istante t. Una volta definita l'incognita dobbiamo «chiudere» il modello mettendo in relazione ciascuno dei termini del precedente bilancio con l'incognita u. L'incremento del calore viene dato attraverso il prodotto della *capacità termica* $c(x, t)$ per la derivata temporale $u_t(x, t)$ della temperatura. L'energia assorbita dall'atmosfera R_a dipende dal «colore» della superficie: più concretamente dall'*albedo planetario* b che rappresenta la frazione di energia ricevuta che è assorbita dalla superficie e che assume valori compresi tra 0 e 1. Le zone coperte da ghiaccio riflettono maggiormente la luce solare rispetto agli oceani e quindi l'albedo è maggiore in questi ultimi. Si osserva che intorno alle *interfasi* che separano le calotte polari esistono zone molto vicine con valori di albedo molto diversi. Nei modelli di bilancio di energia si considerano espressioni per l'albedo che variano repentinamente in un intorno della temperatura nella quale il ghiaccio prende il colore bianco e che usualmente si prende come $u = -10^0 C$. Pertanto possiamo supporre che b sia una funzione praticamente costante rispetto alla temperatura ma con un cambio brusco quando $u = -10^0 C$. Le nevi perenni delle montagne sufficientemente alte inducono a supporre anche che b dipenda dal punto x e quindi si suppone infine che $b = b(x, u(x, t))$. L'energia assorbita è data da $R_a = QS(x, t)\, b(x, u)$ dove $S(x, t)$ è la *funzione di irraggiamento* e Q è una costante chiamata *costante solare* (6).

La funzione di insolazione è chiaramente una funzione della latitudine e il suo calcolo in epoche passate fu il grande contributo di Milankovitch.

La superficie della Terra e l'atmosfera, riscaldate dal sole, emettono calore sotto forma di radiazione infrarossa con una grande lunghezza d'onda R_c. Questa energia liberata dalla Terra può venire rappresentata dalla *legge di raffreddamento di Newton* ($R_c = B(x, t)\, u + C(x, t)$ o più in generale per la legge di Stefan-Boltzman $R_c c(x, t)\, u^4$ dove ora u si esprime in gradi Kelvin e dove $c(x, t)$ rappresenta un coefficiente di emissione che si suppone positivo e può dipendere dal luogo e dal tempo. I coefficienti $B(x, t)$, $C(x, t)$ e $c(x, t)$ dipendono in modo essenziale dalla concentrazione dei gas (responsabili dell'*effetto serra*) nell'atmosfera. La loro corretta parametrizzazione è una delle maggiori difficoltà della modellizzazione. La diffusione di calore D, secondo una convenzione accettata, viene data da $D = div(k\nabla u)$ con $k(x, t) > 0$. L'equazione risultante è del tipo $cu_t - div(k\nabla u) + Bu + C = QS(x, t)\, b(x, u)$.

Lo studio di questa classe di equazioni è stato sviluppato da diversi autori (7) analizzando anche la tendenza asintotica delle soluzioni verso agli *stati di equilibrio* o soluzioni dell'equazione stazionaria associata $div(k\nabla w) + Bw + C = QS(x)\, b(x, w)$. Una peculiarità di questi modelli è che in funzione del valore della costante solare Q si possono avere uno o più stati di equilibrio. La *curva di biforcazio-*

(6) M. Vázquez Abeledo: *La historia del Sol y el cambio climático*. Mc Graw Hill, Madrid, 1998.

(7) J.I. Diaz, [Ed.]: *The Mathematics of Models for Climatology and Environment*, NATO ASI Series, Springer, Berlin, 1997

ne delle soluzioni ha la forma di «esse» e si verifica un fenomeno di *isteresi* quando Q varia, dato che le soluzioni stabili subiscono un cambio discontinuo (di stabilità) al variare di Q nel senso della *Teoria delle Catastrofi* di René Thom.

Come già si è notato prima, una dettagliata informazione sulla variabilità della funzione di irraggiamento $S(x, t)$ conduce alla giustificazione matematica della congettura di Milankovitch sulle passate variazioni del clima ([8]).

A volte fa comodo introdurre *termini non deterministici* per tenere in conto processi di difficile modellizzazione come, per esempio, le eruzioni vulcaniche. Il modello si basa ora su un'equazione stocastica a derivate parziali nella quale appare un *termine sorgente* che viene dato attraverso un campo aleatorio dipendente dal tempo (appare così lo *spazio delle serie temporali*) ([9]). Un'altra classe di modelli matematici di utilità per la ricostruzione dei climi preistorici è costituito dai *modelli scalari delle calotte polari* nei quali la dinamica delle masse di ghiaccio è studiata a partire dalle leggi di conservazione per *fluidi non-Newtoniani* unite all'*approssimazione di manto poco profondo*, tipica di quando lo spessore è molto più piccolo rispetto all'estensione superficiale. Questo tipo di modelli ha prodotto un grande accordo di risultati fra il volume di ghiaccio stimato in differenti epoche passate e i registri isotopici geologici disponibili ([10]). Modelli più sofisticati, accoppiando le equazioni della temperatura superficiale con quelle per il volume del ghiaccio e quelle dell'elasticità del manto terrestre che sostiene la massa di ghiaccio hanno permesso di giustificare la periodicità di 100.000 anni nello spettro climatico corrispondente all'oscillazione periodica dell'eccentricità dell'orbita terrestre ([11]). Modelli così complessi come quelli di circolazione generale permettono di analizzare la variabilità della salinità

([8]) G.R. North, J.G. Mengel e D.A. Short: *J. Geophys. Res.* 88, pp. 6576-6586, 1983.

([9]) M. Ghil e S. Childress, *Topics in Geophysical Fluid Dynamics, Atmosphere Dynamics, Dynamo Theory and Climate Dynamics*, Springer-Verlag, NY, 1987.

([10]) D. Pollard, *Nature*, **296**, pp. 331-338, 1982.

([11]) H. Le Treut e M. Ghil, *J. Geophys. Res.*, 88, pp. 5167-5190, 1983.

oceanica in un lungo periodo di tempo e sono stati utilizzati anche per giustificare le glaciazioni. Una condizione necessaria per la formazione di una glaciazione nella quale le estati siano adeguatamente fredde nell'emisfero Nord sembra dettata dal fatto che alcuni ghiacciai di montagna puntano verso Sud. La risposta potrebbe essere nelle variazioni della salinità e delle correnti marine profonde che attraversano gli oceani alterando in modo drastico il suo comportamento. Studi numerici di questo tipo di modelli mostrano di nuovo molteplici stati di equilibrio e diagrammi di biforcazione rispetto ad un certo parametro, la cui forma ad «esse» suggerisce fenomeni di isteresi ([12]).

Per concludere è d'obbligo riferire sull'azione dell'uomo sul clima. Il grande dibattito è centrato sulla questione se le conseguenze negative delle emissioni prodotte a lungo negli ultimi secoli sono già irreversibili o se – al contrario – esiste una via di ripresa dell'equilibrio naturale esistente precedentemente. L'argomento non è estraneo ad esperienze in scala molto più piccola. Così coloro che sono appassionati di calcio sicuramente si sono sorpresi quando hanno letto il titolo di testa nella pagina sportiva di uno dei quotidiani di maggior tiratura nazionale lo scorso 13 maggio, «il sindaco di Mosca ha ordinato di eliminare le nuvole». La notizia si riferiva a come il sindaco di questa capitale, Y. Luzhkov, aveva ordinato al Servizio Meteorologico del suo paese di allontanare le nuvole in modo che la finale della Coppa UEFA, che si svolgeva nello stadio Luzhniki della sua città giungesse con chiarezza su tutti gli schermi televisivi d'Europa. Due ore prima della partita vari aerei ed elicotteri lanciarono speciali reagenti sulle nuvole ottenendo lo scopo che si erano proposti. *Allontanare* e, il suo effetto contrario, *produrre* nuvole sono esempi di azioni controllate (sebbene costose) che hanno mostrato la loro efficacia a partire dagli articoli del Premio Nobel J. Langmuir a metà degli anni quaranta. La congettura sulla possibilità di modificare il clima mediante possibili azioni umane sull'albedo terrestre si deve a J. von Neumannn, che la formulò nel 1956, ma non è stata ancora provata nemmeno per mezzo di modelli matematici mediamen-

([12]) R. Kahmstorf, *Nature*, **378**, pp. 145-149, 1995 te complessi. Le normative mondiali sulle emissioni consentite per i gas responsabili di effetto serra che si concordano in vertici mondiali come quello di Kyoto possono essere intese tanto come mezzi di controllo introdotti dall'uomo con la speranza di modificare, o almeno non aumentare, le alterazioni nocive introdotte a partire dalla nascita della società industriale. La giustificazione matematica di queste possibili azioni e delle loro ripercussioni su una realtà tanto complessa sono argomenti di punta delle attuali ricerche in *Teoria del Controllo, Ottimizzazione e Teoria dei Giochi* settori importanti della matematica, tanto per la loro fertilità scientifica quanto per la loro applicabilità a molte altre scienze sperimentali e sociali ([13]).

([13]) J.I. Diaz e J.L. Lions eds. *Environment, Economics and Their Mathematics Models*, Masson Paris, 1994.