

УДК 517.956.4+517.958:531.3-1

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИСТЕЧЕНИЯ ЛАМИНАРНОЙ СТРУИ ГОРЯЧЕГО ГАЗА В ПОКОЯЩИЙСЯ ГАЗ С БОЛЕЕ НИЗКОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ

С. Н. Антонцев, Д. И. Диас\*

Университет Лиссабона, 1649-003 Лиссабон, Португалия

\* Университет Мадрида, 28040 Мадрид, Испания

E-mails: anton@ptmat.fc.ul.pt, diaz.racefyn@insde.es

Исследуется приближение пограничного слоя классической математической модели, описывающей истечение ламинарной струи горячего газа в покоящийся газ с более низкой температурой. Доказано существование и единственность решений невырожденной задачи в областях, не содержащих застойных зон. Исследовано асимптотическое поведение этих решений.

Ключевые слова: нелинейные вырожденные уравнения параболического типа, диффузия, горячие газовые струи, асимптотическое поведение решения.

**Введение.** Рассматривается математическая модель, описывающая истечение ламинарной струи горячего газа в покоящийся газ, имеющий более низкую температуру. Эта задача является классической в теории динамики сжимаемой жидкости и важна для исследования явлений, связанных с горением. Рассматривается приближение пограничного слоя (при котором можно пренебречь влиянием давления). При использовании приближения пограничного слоя моделирование плоских струй в безразмерных переменных сводится к нелинейной системе дифференциальных уравнений в частных производных (см. [1–7])

$$\begin{aligned} \frac{\partial (r^i \rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (r^i \rho v)}{\partial r} &= 0, \\ r^i \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + r^i \rho v \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( r^i \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) + G \left( 1 - \frac{\varepsilon}{T} \right), \\ r^i \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + r^i \rho v \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^i \mu \frac{\partial T}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $Pr$  — число Прандтля;  $G$  — величина, обратная квадрату числа Фруда (заданные положительные числа);  $i = 0$  в случае плоской конфигурации,  $i = 1$  в случае осесимметричной струи. Система замыкается уравнениями состояния  $\rho = 1/T$ ,  $\mu = T^\sigma$  ( $0 < \sigma < \infty$ ). Неизвестными величинами в задаче являются компоненты вектора скорости  $v$ ,  $u$  и температура  $T$ .

Система (1) рассматривается в области  $\Omega = \{(x, r) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < \infty, 0 < r < l \leq \infty\}$  с граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} = v = \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad r = 0, \quad x > 0, \\ u = \delta, \quad T = \varepsilon, \quad r = l, \quad x > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

и “начальным” условием

$$u(0, r) = u_0(r) \geq \delta, \quad T(0, r) = T_0(r) \geq \varepsilon, \quad x = 0, \quad r \in [0, l]. \quad (3)$$

Следует отметить, что несмотря на стационарный характер задачи, эта система является системой параболического типа и условие (3) можно интерпретировать как начальное условие, если рассматривать переменную  $x$  в качестве фиктивного времени. В [7] задача (1)–(3) ~~уже~~ рассмотрена для случая

$$T \rightarrow \varepsilon, \quad u \rightarrow \delta \quad \text{при} \quad r \rightarrow +\infty.$$

Там же изучены автомодельные решения и проведено их численное моделирование.

В данной работе доказывается существование и единственность решений невырожденной задачи (в предположении  $\delta > 0$  и  $\varepsilon > 0$ , что означает отсутствие застойных зон). Также исследуется асимптотическое поведение решений по  $x$  и  $l$ .

Для доказательства существования и единственности решений используются так называемые переменные Мизеса  $x, \psi$  ( $\psi$  — сопряженная “функция тока”), в которых система уравнений (1) после исключения неизвестной  $v$  преобразуется в чисто диффузионную систему

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left( r^{2i} T^{\sigma-1} u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) + \frac{TG}{ur^i} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{T} \right), \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( r^i T^{\sigma-1} u \frac{\partial T}{\partial \psi} \right).$$

Отметим, что системы такого типа возникают в различных областях, например в биологии, при изучении явлений фильтрации.

**1. Преобразование к переменным Мизеса  $x, \psi$ .** Введем функцию тока  $\psi(x, r)$  с помощью формулы

$$\psi_r = r^i \rho u, \quad \psi_x = -r^i \rho v,$$

а также новые независимые переменные (переменные Мизеса)

$$(X = x, \psi = \psi(x, r)) \leftrightarrow (x, r), \quad \frac{D(X, \psi)}{D(x, r)} = \psi_r = r^i \rho u > 0, \quad (4)$$

определяющие гомеоморфизм  $(x, r) \leftrightarrow (X = x, \psi = \psi(x, r))$ . В дальнейшем для упрощения записи сохраним обозначение  $X = x$ . Используя формулы

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} - r^i \rho v \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = r^i \rho u \frac{\partial}{\partial \psi}$$

и исключая неизвестную  $v$ , преобразуем систему (1) в систему уравнений для неизвестных  $u, T$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left( r^{2i} a(u, T) \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) + r^{-i} c(u, T), \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left( r^{2i} b(u, T) \frac{\partial T}{\partial \psi} \right), \quad (5)$$

где

$$a = T^{\sigma-1} u, \quad c = \frac{G}{u} T \left( 1 - \frac{\varepsilon}{T} \right), \quad b = \frac{a}{Pr}. \quad (6)$$

Здесь  $r = r(x, \psi)$  определяется с помощью нелокального оператора:

$$r^{i+1}(x, \psi) = (i + 1) \int_0^{\psi} \frac{T(x, s)}{u(x, s)} ds.$$

Как сказано выше, системы, аналогичные (5), возникают также в других областях, например в биологии, при изучении явлений фильтрации (см., например, [8–11]).

Отметим, что при  $\sigma = 1$ ,  $i = 0$ ,  $G = 0$  система (5) распадается на два независимых параболических уравнения. В этом случае первое уравнение совпадает с известным “уравнением пористой среды” для функции  $u$  (см., например, [12–17]). Второе уравнение можно рассматривать как “обобщенное уравнение пористой среды” для функции  $T$  при заданной функции  $u$ .

**2. Существование и единственность решений невырожденных задач** ( $0 < \varepsilon \leq 1$ ,  $0 < \delta \leq 1$ ). В плоском случае ( $i = 0$ ) рассмотрим две различные задачи для системы (5).

**ЗАДАЧА 1.** При  $0 < l < \infty$  найти решение  $(u, T)$  системы (5) в области  $\Omega = \{(x, \psi) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < \infty, 0 < \psi < l < \infty\}$  с граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \psi} = \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0 & \quad \text{при } \psi = 0, \quad x > 0, \\ u = \delta, \quad T = \varepsilon & \quad \text{при } \psi = l, \quad x > 0 \end{aligned}$$

и “начальными” условиями

$$u = u_0(\psi), \quad T = T_0(\psi) \quad \text{при } x = 0, \quad 0 \leq \psi \leq l. \quad (7)$$

Система (5) является системой параболического типа, поэтому условие (7) можно интерпретировать как начальное условие, если переменная  $x$  рассматривается в качестве фиктивного времени. В (7)  $u_0(\psi) = u_0(r(0, \psi))$ ;  $T_0(\psi) = T_0(r(0, \psi))$ ; функция  $r(0, \psi)$  задается следующим образом:

$$r(0, \psi) = \int_0^{\psi} \frac{T_0(s)}{u_0(s)} ds.$$

Предполагается, что

$$u_0(l) = \delta, \quad T_0(l) = \varepsilon, \quad 0 < \delta \leq u_0(\psi) \leq 1, \quad 0 < \varepsilon \leq T_0(\psi) \leq 1. \quad (8)$$

**ЗАДАЧА 2.** Найти решение  $(u, T)$  системы (5) в области  $\Omega = \{(x, \psi) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < \infty, 0 < \psi < f(x) = \psi(x, l)\}$  при  $r(x, f(x)) = l = \text{const}$  с граничными и “начальными” условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \psi} = \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0 & \quad \text{при } \psi = 0, \quad x > 0, \\ u = \delta, \quad T = \varepsilon & \quad \text{при } \psi = \psi(x, l) = f(x), \quad x > 0, \\ u = u_0(\psi), \quad T = T_0(\psi) & \quad \text{при } x = 0, \quad 0 \leq \psi < l. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $\psi(x, l) = f(x)$  — неизвестная функция, определяемая уравнением

$$r(x, \psi) = l, \quad 0 < l < \infty$$

с заданной положительной постоянной  $l$ . Отметим, что при  $l = \infty$  задачи 1 и 2 совпадают.

2.1. *Существование и единственность решений задачи 1.* Докажем следующий “принцип максимума” для задач 1, 2. Предположим, что  $G = 0$ . Тогда

$$\delta \leq u(x, \psi) \leq 1, \quad \varepsilon \leq T(x, \psi) \leq 1. \quad (10)$$

Кроме того, если  $G > 0$ , то при  $x \in [0, X]$

$$\delta \leq u(x, \psi) \leq \inf_{\lambda > 0} [\max(e^{\lambda X} \sqrt{G}/\sqrt{\lambda}, 1)] = C_0(X), \quad \varepsilon \leq T(x, \psi) \leq 1. \quad (11)$$

При выполнении условий (8), (9) это уравнение следует из классического принципа максимума (см., например, [18, гл. 1]). Из оценок (10), (11) вытекают неравенства

$$0 < a_0(\varepsilon, \delta) \leq a = bPr \leq a_1(\varepsilon, \delta) < \infty, \quad 0 \leq c \leq c_0(\varepsilon, \delta) < \infty. \quad (12)$$

**Теорема 2.1.** Пусть функции  $(u_0, T_0) \in C^\alpha[0, l]$ ,  $0 < \alpha < 1$  и выполнены условия (8) при  $0 < \varepsilon$ ,  $0 < \delta$ . Тогда при любом заданном значении  $0 < X < \infty$  задача 1 имеет, по крайней мере, классическое решение  $(u, T) \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega}) \cap C^{2m+\alpha, m+\alpha/2}(\Omega')$  ( $\Omega = (0, X) \times (0, l)$ ,  $\Omega' = \Omega \cap (x > 0)$ ,  $m \geq 1$ ). Более того, при  $q > 1$  решение является единственным, если  $(u_\psi, T_\psi) \in L^4(0, X; L^{2q}(0, l))$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В соответствии с (12) при  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  система (5) является равномерно параболической системой с регулярными ограниченными коэффициентами, поэтому с использованием ряда известных результатов (см., например, [18, гл. 5]) можно доказать существование решения.

Единственность решения доказывается обычным путем. Пусть  $w_i = (u_i, T_i)$  ( $i = 1, 2$ ) — два различных решения и

$$w = (u, T) = (u_1 - u_2, T_1 - T_2).$$

Тогда легко заметить, что  $u, T$  удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left( A \frac{\partial w}{\partial \psi} + Bw \right) + Cw, \quad (13)$$

где  $A, B, C$  — матрицы:

$$A = \{A_{ij}\}, \quad A_{11} = a_{11}, \quad A_{22} = b_{11}, \quad A_{12} = A_{21} = 0,$$

$$B = \{B_{ij}\}, \quad B_{11} = \frac{a_{11} - a_{21}}{u_1 - u_2} u_{2\psi}, \quad B_{12} = \frac{a_{21} - a_{22}}{T_1 - T_2} u_{2\psi},$$

$$B_{21} = \frac{b_{11} - b_{21}}{u_1 - u_2} T_{2\psi}, \quad B_{22} = \frac{b_{21} - b_{22}}{T_1 - T_2} T_{2\psi},$$

$$C = \{C_{ij}\}, \quad C_{11} = \frac{c_{11} - c_{21}}{u_1 - u_2}, \quad C_{12} = \frac{c_{21} - c_{22}}{T_1 - T_2}, \quad C_{21} = C_{22} = 0,$$

$$a_{ij} = a(u_i, T_j), \quad b_{ij} = b(u_i, T_j), \quad c_{ij} = c(u_i, T_j).$$

Нетрудно проверить, что

$$0 < a_0(\varepsilon, \delta) \leq A_{11}, \quad A_{22} \leq b_0(\varepsilon, \delta),$$

$$|B| \leq K|w_{2\psi}|, \quad |C_i| \leq K, \quad K = \max(|a_w|, |b_w|, |c_w|).$$

Умножая (13) на  $w$  и интегрируя по  $(0, x) \times (0, l)$ , получаем неравенство

$$\int_0^l |w(x, s)|^2 ds + \int_0^x \int_0^l |w_\psi|^2 ds dt \leq CI, \quad x > 0, \quad (14)$$

где

$$I = \int_0^x \int_0^l |\mathbf{w}(x, s)|^2 |\mathbf{w}_{2\psi}|^2 ds dt, \quad C = C(K)$$

и

$$I \leq \int_0^x \left( \int_0^l |\mathbf{w}(x, s)|^{2q/(q-1)} ds \right)^{(q-1)/q} \left( \int_0^l |\mathbf{w}_{2\psi}|^{2q} ds \right)^{1/q} dt, \quad 1 < q < \infty.$$

Введем функцию

$$Y(x) = \int_0^l |\mathbf{w}(x, s)|^2 ds$$

и используем следующие неравенства:

$$|\mathbf{w}(x, s)|^2 \leq 4Y^{1/2}(x) \left( \int_0^l |\mathbf{w}_\psi|^2 ds \right)^{1/2},$$

$$\left( \int_0^l |\mathbf{w}(x, s)|^{2q/(q-1)} ds \right)^{(q-1)/q} \leq 4l^{(q-1)/q} Y^{1/2}(x) \left( \int_0^l |\mathbf{w}_\psi|^2 ds \right)^{1/2},$$

$$\begin{aligned} I &\leq \int_0^x 4l^{(q-1)/q} Y^{1/2}(x) \left( \int_0^l |\mathbf{w}_\psi|^2 ds \right)^{1/2} \left( \int_0^l |\mathbf{w}_{2\psi}|^{2q} ds \right)^{1/q} dt \leq \\ &\leq \frac{C(K)}{2} \int_0^x \int_0^l |\mathbf{w}_\psi|^{2q} ds dt + C(K, l, q) \int_0^x Y(t) \left( \int_0^l |\mathbf{w}_{2\psi}|^{2q} ds \right)^{2/q} dt. \end{aligned}$$

С учетом (14) и последних неравенств получаем интегральное неравенство

$$Y(x) \leq C \int_0^x Y(s) \left( \int_0^l |\mathbf{w}_{2\psi}|^{2q} dt \right)^{2/q} ds,$$

которое имеет только тривиальное решение, если

$$\int_0^x \left( \int_0^l |\mathbf{w}_{2\psi}|^{2q} dt \right)^{2/q} ds \leq C < \infty, \quad q > 1. \quad (15)$$

Это означает, что любое решение, удовлетворяющее неравенству (15), является единственным.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Построенное решение  $\mathbf{w} = (u(x, \psi), T(x, \psi))$  определяет гомеоморфизм между областью в плоскости физических переменных  $\Omega_{X,r} = \{(x, \psi) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < X, 0 < r < r(x, l)\}$  и областью  $\Omega_{X,l} = \{(x, \psi) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < X, 0 < \psi < l\}$  с якобианом

$$0 < \varepsilon \leq \frac{D(X, \psi)}{D(x, r)} = \psi_r = \rho u = \frac{T}{u} \leq \frac{1}{\delta} < \infty.$$

Г1

Это решение определяет также форму линии тока  $r = r(x, l) = g(x)$  ( $g'(x) = v(x, l)/u(x, l)$ ) в физической области. Вторая компонента вектора скорости  $v(x, \psi)$  задается формулой

$$v(x, \psi) = u(x, \psi) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\psi} \frac{ds}{\rho(x, s)u(x, s)}. \quad (16)$$

Согласно (4), (10), (11) классическое решение  $w = (u(x, \psi), T(x, \psi))$  определяет классическое решение  $(v(x, r), u(x, r), T(x, r))$  системы (1), удовлетворяющее условиям (2).

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Аналогично можно доказать существование решений в осесимметричном случае ( $i = 1$ ), но при этом возникает ряд технических трудностей.

Исследуем асимптотическое поведение решений задачи 1 по переменной  $x$ . Введем энергетические функции

$$\eta_l(x) = \int_0^l (u(x, \psi) - \delta)^2 d\psi, \quad \mu_l(x) = \int_0^l (T(x, \psi) - \varepsilon)^2 d\psi$$

и положительные числа (см. (6)):

$$\lambda = a_0/(2l^2 \text{Pr}), \quad \nu = a_0/(2l^2) \quad (\nu = \lambda \text{Pr}).$$

Сначала рассмотрим случай  $0 < l < \infty$ .

**Теорема 2.2.** Пусть  $w = (u, T)$  — решение задачи 1 и  $0 < l < \infty$ . Если  $G = 0$ , то

$$\eta_l(x) = \int_0^l (u(x, \psi) - \delta)^2 d\psi \leq \eta(0) e^{-\nu x}; \quad (17)$$

$$\mu_l(x) = \int_0^l (T(x, \psi) - \varepsilon)^2 d\psi \leq \mu(0) e^{-\lambda x}. \quad (18)$$

Если  $G > 0$  и  $\lambda > \nu$  (последнее неравенство соответствует  $\text{Pr} < 1$ ), то (17) нужно заменить на неравенство

$$\eta_l(x) = \int_0^l (u(x, \psi) - \delta)^2 d\psi \leq 2\eta(0) \left(1 + \frac{4G^2 \underline{e}^2}{\delta^2 \varepsilon^2}\right) e^{-\nu x}. \quad (19)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Умножая первое уравнение системы (5) на  $u - \delta$ , второе уравнение — на  $T - \varepsilon$  и интегрируя их по  $\psi$  в интервале  $(0, l)$ , получаем следующие энергетические соотношения:

$$\frac{d\eta_l(x)}{2dx} + \int_0^l au_\psi^2 d\psi = \int_0^l \frac{G}{uT} (T - \varepsilon)(u - \delta) d\psi; \quad (20)$$

$$\frac{d\mu_l(x)}{2dx} + \int_0^l \frac{a}{\text{Pr}} T_\psi^2 d\psi = 0. \quad (21)$$

Предположим, что  $G = 0$ . Тогда с использованием неравенств

$$\eta_l(x) \leq 4l^2 \int_0^l u_\psi^2 d\psi, \quad \mu_l(x) \leq 4l^2 \int_0^l T_\psi^2 d\psi \quad (22)$$

получаем дифференциальные неравенства

$$\frac{d\eta_l}{dx} + \nu\eta_l \leq 0, \quad \frac{d\mu_l}{dx} + \lambda\mu_l \leq 0 \quad \left( \nu = \frac{a_0}{2l^2}, \quad \lambda = \frac{\nu}{\text{Pr}} \right).$$

Интегрируя эти неравенства, имеем оценки (17), (18).

Теперь предположим, что  $G > 0$ . С учетом (18) из (20) получаем

$$\frac{d\eta_l}{dx} + \nu\eta_l \leq \gamma\sqrt{\eta_l}\sqrt{\mu_l} \leq \gamma\sqrt{\eta_l}\sqrt{\mu_l(0)}e^{-\lambda x/2} = \omega\sqrt{\eta_l}e^{-\lambda x/2}, \quad (23)$$

где  $\gamma = 2G/(\delta\varepsilon)$ ,  $\omega = \gamma\sqrt{\mu_l(0)}$ . Интегрируя (23) при  $\lambda > \nu$ , имеем неравенство

$$2\sqrt{\mu_l(x)}e^{\nu x} - 2\sqrt{\mu_l(0)} \leq \omega \int_0^x e^{-(\lambda-\nu)s/2} ds \leq \omega \frac{2e}{\lambda-\nu} = 2\beta < \infty,$$

из которого и следует оценка (19). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В теореме 2.2

$$\lambda = a_0/(2l^2 \text{Pr}) \rightarrow 0, \quad \nu = a_0/(2l^2) \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow \infty.$$

Получим некоторые оценки, не зависящие от  $l$ , сделав дополнительное предположение, что  $G = 0$ , начальные функции  $u_0, T_0$  определены при  $\psi \in [0, \infty]$  и

$$\int_0^\infty |u_0 - \delta| d\psi \leq C_u < \infty, \quad \int_0^\infty |T_0 - \varepsilon| d\psi \leq C_T < \infty. \quad (24)$$

Используем известные оценки (см., например, [2, 19, 20])

$$\int_0^l |u - \delta| d\psi \leq \int_0^l |u_0 - \delta| d\psi \leq C_u, \quad \int_0^l |T - \varepsilon| d\psi \leq \int_0^l |T_0 - \varepsilon| d\psi \leq C_T \quad (25)$$

для решений системы (5) при  $i = G = 0$ . Из (24), (25) с учетом (10) следует

$$\eta_\infty(x) = \int_0^\infty |u_0 - \delta|^2 d\psi \leq C_u < \infty, \quad \mu_\infty(x) = \int_0^\infty |T_0 - \varepsilon|^2 d\psi \leq C_T < \infty.$$

**Теорема 2.3.** Пусть  $w = (u, T)$  — решение задачи 1 с начальными данными (24) и  $G = 0$ . Тогда

$$\eta_l(x) = \int_0^l (u - \delta)^2 d\psi \leq \frac{\eta_\infty(0)}{\sqrt{1 + 2x\nu\eta_\infty^2(0)}}, \quad \nu = \frac{8a_0}{9C_u^4}; \quad (26)$$

$$\mu_l(x) = \int_0^l (T - \varepsilon)^2 d\psi \leq \frac{\mu_\infty(0)}{\sqrt{1 + 2x\lambda\mu_\infty^2(0)}}, \quad \lambda = \frac{8a_0}{9C_T^4 \text{Pr}}. \quad (27)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для доказательства теоремы вновь используем энергетические соотношения (20), (21) при  $G = 0$ , но в данном случае применим интерполяционное неравенство

$$\eta_l^3(x) = \left( \int_0^l (u - \delta)^2 d\psi \right)^3 \leq \left( \frac{3}{2} \right)^2 \left( \int_0^l |u - \delta| d\psi \right)^4 \int_0^l |u_\psi|^2 d\psi$$

в неравенствах (22). Тогда из (20), (25) следует дифференциальное неравенство

$$\frac{d\eta_l}{dx} + \nu\eta_l^3 \leq 0, \quad \nu = \frac{8a_0}{9C_u^4}.$$

Интегрируя последнее неравенство, получаем

$$\eta_l(x) = \int_0^l (u - \delta)^2 d\psi \leq \frac{\eta(0)}{\sqrt{1 + 2x\nu\eta^2(0)}} \leq \frac{\eta_\infty(0)}{\sqrt{1 + 2x\nu\eta_\infty^2(0)}}.$$

Переходя к пределу при  $l \rightarrow \infty$ , завершаем доказательство оценки (26). Доказательство оценки (27) идентично. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Предположим, что  $G = 0$  и  $w$  — решение системы (13). Тогда

$$\int_0^\infty |w(x, \psi) - w_{\delta, \varepsilon}|^4 dx \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \psi \rightarrow \infty, \quad (28)$$

где  $w = (u, T)$ ;  $w_{\delta, \varepsilon} = (\delta, \varepsilon)$ . Из (20), (21) следует, что

$$\sup_{0 \leq x \leq \infty} \int_0^\infty |w - w_{\delta, \varepsilon}|^2 d\psi + \int_0^\infty \int_0^\infty |w_\psi|^2 d\psi dx \leq C_0(\varepsilon, \delta) \int_0^\infty |w_0 - w_{\delta, \varepsilon}|^2 d\psi.$$

Используя мультипликативное неравенство

$$\int_0^\infty |w(x, \psi) - w_{\delta, \varepsilon}|^4 dx \leq 4 \left( \sup_{0 \leq x \leq \infty} \int_0^\infty |w(x, \psi) - w_{\delta, \varepsilon}|^2 d\psi \right) \left( \int_0^\infty \int_0^\infty |w_\psi|^2 d\psi dx \right)$$

и теорему Лебега, получаем (28).

2.2. *Существование и единственность локальных решений задачи 2.* Введем новые переменные  $x = x$ ,  $\eta = \psi/f(x)$ . Используя формулы

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\eta f'(x)}{f} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{D(x, \eta)}{D(x, \psi)} = \frac{1}{f(x)},$$

приводим задачу 2 к задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\eta f'(x)}{f(x)} \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{1}{f^2(x)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( a \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + c, \\ \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\eta f'(x)}{f(x)} \frac{\partial T}{\partial \eta} &= \frac{1}{f^2(x)} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( a \frac{\partial u}{\partial \eta} \right); \end{aligned} \quad (29)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial T}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 0, \quad x > 0, \quad u = \delta, \quad T = \varepsilon, \quad \eta = 1, \quad X > 0,$$

$$u = u_0(\eta f(0)), \quad T = T_0(\eta f(0)) \quad \text{for} \quad x = 0, \quad 0 \leq \eta \leq 1$$

в полуполосе  $\Omega = \{(x, \eta) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < \infty, 0 < \eta < 1\}$ . Здесь

$$f(0) = \int_0^l \frac{u_0(s)}{T_0(s)} ds > 0$$

↑  
✓  
H при



является заданной константой, а неизвестная функция  $f(x)$  определяется с помощью нелокального оператора по  $u, T$  и их производных по  $\eta$  выражением

$$f(x)f'(x) = \Xi(u, T, u_\eta, T_\eta), \tag{31}$$

$$\Xi(u, T, u_\eta, T_\eta) = \left( T^{\sigma-1}u_\eta - \frac{uT^{\sigma-2}T_\eta}{Pr} \right) \Big|_{\eta=1} + \frac{u(x, 1)}{T(x, 1)} \int_0^1 \left( -T^{\sigma-1}T_\eta u_\eta \left( \frac{1}{u} + \frac{1}{Pr} \right) + \frac{2}{u^2} T^{\sigma-1}u_\eta^2 \right) ds.$$

Для доказательства теоремы существования в дополнение к (10), (11) применим некоторые априорные оценки решения. Используя определение функции тока, получаем

$$\psi(x, r) = \int_0^r \rho(x, r)u(x, r) dr,$$

$$\frac{l}{C_0} \leq l \min(\rho u) \leq \psi(x, l) = f(x) \leq l \max(\rho u) \leq C_0 l. \tag{32}$$

Умножая первое уравнение системы (29) на  $f(x)(u - \delta)$ , второе уравнение — на  $f(x)(T - \varepsilon)$  и интегрируя их по  $\eta$  и  $x$ , получаем соотношения

$$f(x) \int_0^1 (u(x, \eta) - \delta)^2 d\eta + 2 \int_0^x \int_0^1 \frac{a}{f(x)} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 d\eta dx = f(x) \int_0^1 (u_0(\eta f(0)) - \delta)^2 d\eta + \int_0^x f I_c dx,$$

$$f(x) \int_0^1 (T(x, \eta) - \varepsilon)^2 d\eta + 2 \int_0^x \int_0^1 \frac{a}{f(x) Pr} \left( \frac{\partial T}{\partial \eta} \right)^2 d\eta dx = f(x) \int_0^1 (T_0(\eta f(0)) - \varepsilon)^2 d\eta,$$

где

$$I_c = \int_0^1 \frac{G}{uT} (u - \delta)(T - \varepsilon) d\eta.$$

С учетом (10), (11), (32) из этих соотношений следует оценка

$$\int_0^x \int_0^1 |\omega_\eta|^2 d\eta dx \leq C(l, \varepsilon, \delta).$$

Умножив первое уравнение системы (29) на  $u_{\eta\eta}$ , второе уравнение — на  $T_{\eta\eta}$ , получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^1 u_\eta^2 d\eta + \frac{1}{f^2(x)} \int_0^1 a u_{\eta\eta}^2 d\eta = I + I_1 + \Lambda_1,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^1 T_\eta^2 d\eta + \frac{1}{f^2(x) Pr} \int_0^1 a T_{\eta\eta}^2 d\eta = I_1 + \Lambda_2,$$

(33)  $I_1$  или  $I_2$ ?

где

$$I = \int_0^1 c u_{\eta\eta} d\eta, \quad I_1 = -\frac{f'(x)}{f(x)} \int_0^1 \eta u_\eta u_{\eta\eta} d\eta,$$

$2p$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{f^2(x)} \int_0^1 (a_u u_\eta^2 + a_T u_\eta T_\eta) T_{\eta\eta} d\eta,$$

$$I_2 = -\frac{f'(x)}{f(x)} \int_0^1 \eta T_\eta T_{\eta\eta} d\eta, \quad \Lambda_2 = \frac{1}{f^2(x) \text{Pr}} \int_0^1 (a_T T_\eta^2 + a_u u_\eta T_\eta) u_{\eta\eta} d\eta.$$

Легко проверить, что

$$|I| \leq \epsilon \int_0^1 u_{\eta\eta}^2 d\eta + C \int_0^1 |w|^2 d\eta, \quad (34)$$

$$\sqrt{|\Lambda_1|, |\Lambda_2|} \leq C \int_0^1 |w_\eta|^2 |w_{\eta\eta}| d\eta \leq \epsilon \int_0^1 |w_{\eta\eta}|^2 d\eta + C \int_0^1 |w_\eta|^4 d\eta, \quad \epsilon \in (0, 1)$$

при некотором  $C = C(\epsilon, \epsilon, \delta, l)$ . Используя (31), получаем оценки

$$\sqrt{|I_1|, |I_2|} \leq \epsilon \int_0^1 |w_{\eta\eta}|^2 d\eta + C f'^2(x) \int_0^1 |w_\eta|^2 d\eta, \quad \epsilon \in (0, 1),$$

где

$$f'^2(x) \int_0^1 |w_\eta|^2 d\eta \leq C \left[ |w_\eta(x, 1)|^2 + \int_0^1 |w_\eta|^4 d\eta \right] \int_0^1 |w_\eta|^2 d\eta.$$

Введя функцию

$$Y(x) = \int_0^1 |w_\eta|^2 d\eta$$

и используя мультипликативные неравенства

$$|w_\eta(x, \eta)|^2 \leq 2Y^{1/2}(x) \left( \int_0^1 |w_{\eta\eta}|^2 d\eta \right)^{1/2}, \quad \int_0^1 |w|^2 d\eta \leq 4Y(x), \quad (35)$$

$$\int_0^1 |w_\eta|^4 d\eta \leq 2Y^{3/2}(x) \left( \int_0^1 |w_{\eta\eta}|^2 d\eta \right)^{1/2},$$

имеем

$$f'^2(x) \int_0^1 |w_\eta|^2 d\eta \leq \epsilon \int_0^1 |w_{\eta\eta}|^2 d\eta + CY^5. \quad (36)$$

С учетом (33)–(36) и выбирая подходящее значение  $\epsilon > 0$ , получаем неравенство

$$\frac{dY}{dx} + \int_0^1 |w_{\eta\eta}|^2 d\eta \leq CY^5.$$

Отсюда следует

$$Y(x) \leq \left( \frac{Y^4(0)}{1 - xCY^4(0)} \right)^{1/4} < \infty \quad \text{при } 0 \leq x \leq X_0 < X^* = \frac{1}{CY^4(0)} \quad (37)$$

и

$$Y(x) + \int_0^x \int_0^1 |w_{\eta\eta}|^2 d\eta dx \leq C(Y(0), X_0) \quad \text{при } x \leq X_0 < X^*. \quad (38) \quad \text{H38}$$

Последняя оценка справедлива для любого значения  $X^*$ , если  $Y(0) = \int_0^1 |w_{\eta}(0, \eta)|^2 d\eta$  удовлетворяет неравенству  $X^*CY^4(0) < 1$ . Оценка (38) обеспечивает большую гладкость решения. Действительно, используя (31), (35), получаем

$$|f'(x)|^4 \leq C(|w_{\eta}(x, 1)|^4 + Y^4) \leq C\left(Y \int_0^1 w_{\eta\eta}^2 d\eta + Y^4\right) \in L^1(0, X_0).$$

Следовательно,

$$\|f'(x)\|_{L^4(0, X_0)} \leq C(l, \delta, \varepsilon, X_0). \quad (39)$$

Рассмотрим уравнения системы (29) как независимые с заданными коэффициентами  $f'(x)$ ,  $f(x)$ ,  $a$ ,  $b$  и применим теорию параболических уравнений [18].

Для доказательства теоремы существования решения построим вполне непрерывный оператор с использованием теоремы Шаудера о неподвижной точке.

Используя (31), определим однопараметрическое семейство наборов операторов

$$\Phi_{\lambda} = \Phi_{\lambda}(w, w_{\eta}) = \frac{1}{2} \lambda \Xi(w, w_{\eta}|x) / \left( 2\lambda \int_0^1 \Xi(w, w_{\eta}|s) ds + f^2(0) \right), \quad \lambda \in [0, 1]. \quad \text{H4}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \eta g'(x) \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( e^{2g(x)} a \frac{\partial u}{\partial \eta} \right), \quad (40)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} - \eta g'(x) \frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( e^{2g(x)} b \frac{\partial u}{\partial \eta} \right);$$

$$g'(x) = \Phi_{\lambda}(w, w_{\eta}), \quad g(0) = \ln f(0) \quad (41)$$

с граничными и начальными условиями (30). Отметим, что при  $\lambda = 0$  эта задача рассматривалась в подп. 2.1. Полученные выше априорные оценки остаются справедливыми для любого  $\lambda \in [0, 1]$ . С учетом (32), (39) определим семейство функций  $\varphi \in M$ , таких что

$$\varphi(0) = g(0), \quad \ln(l/C_0) \leq \varphi(x) \leq \ln lC_0, \quad \varphi' \in L^2.$$

Пусть  $\varphi \in M$  — произвольная заданная функция. Подставим  $\varphi$  в (40) вместо  $g$ . Тогда соответствующая задача имеет, по крайней мере, одно решение  $w = (u, T)$ , которое определяет нелинейный оператор  $\Pi_{\lambda}: \varphi \rightarrow w$ . Далее, используя (41), можно определить оператор

$$F_{\lambda}: \varphi \rightarrow g = \int_0^x \Phi_{\lambda}(w, w_{\eta}) ds + g(0).$$

Согласно приведенным выше априорным оценкам и теории параболических уравнений оператор  $F_\lambda$  является вполне непрерывным и удовлетворяет всем условиям теоремы Шаудера. Поэтому уравнение  $\varphi = F_\lambda(\varphi)$  имеет, по крайней мере, одно решение, которое определяет функции  $w = (u, T)$ . Таким образом, доказана

**Теорема 2.4.** Пусть функции  $(u_0, T_0) \in C^{2+\alpha}[0, 1]$  ( $0 < \alpha < 1$ ) удовлетворяют соответствующим условиям совместности. Тогда задача 2 имеет единственное классическое решение  $w = (u(x, \eta), T(x, \eta))$  на интервале  $x \in [0, X_0] \subset [0, X^*)$ , где величина  $X^* = X^*(Y(0)) > 0$  определена в (37). Более того, решение существует для любого

конечного значения  $X_0$  при условии, что  $Y(0) = \int_0^1 (u_{0\eta}^2 + T_{0\eta}^2) d\eta$  достаточно мало.

Докажем единственность классических решений.

**Теорема 2.5.** Классическое решение задачи 2 является единственным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $w_i = (u_i, T_i)$  ( $i = 1, 2$ ) — два различных классических решения и  $w = w_1 - w_2$ . Тогда векторная функция  $w$  является решением задачи

$$w_x = Aw_{\eta\eta} + Bw_\eta + Cw + Dw_\eta(x, 1) + \int_0^1 Ew_\eta d\eta; \quad (42)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 0, \quad x > 0, \quad w = 0, \quad \eta = 1, \quad x > 0,$$

$$w = 0, \quad x = 0, \quad 0 \leq \eta \leq 1$$

с ограниченными матрицами

$$|A, B, C, D, E| \leq C < \infty \quad (43)$$

и положительной матрицей  $A$

$$a_0(\xi, \xi) \leq (A\xi, \xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2. \quad (44) \quad H44$$

Умножая уравнение (42) на  $w_{\eta\eta}$  и проводя интегрирование, получаем интегральное соотношение

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^1 |w_\eta|^2 d\eta + \int_0^1 (Aw_{\eta\eta}, w_{\eta\eta}) d\eta = I, \quad (45)$$

где

$$I = - \int_0^1 \left( Bw_\eta + Cw + Dw_\eta(x, 1) + \int_0^1 Ew_\eta d\eta \right) w_{\eta\eta} d\eta.$$

С учетом (35), (43), (44) величину  $I$  можно оценить следующим образом:

$$|I| \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (Aw_{\eta\eta}, w_{\eta\eta}) d\eta + C \int_0^1 |w_\eta|^2 d\eta.$$

С учетом (45) и последней оценки получаем дифференциальное неравенство

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 |w_\eta|^2 d\eta \leq C \int_0^1 |w_\eta|^2 d\eta,$$

которое завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Построенное решение определяет гомеоморфизм между областью  $\Omega_{x,r} = \{(x, \psi) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < X^*, 0 < r < l\}$  в физических переменных и областью  $\Omega_{X,\psi} = \{(x, \psi) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < X^*, 0 < \psi < f(x, l)\}$ . Это классическое решение  $w = (u, T)$  определяет классическое решение  $(v(x, r), u(x, r), T(x, r))$  системы (1), удовлетворяющее условиям (2) (см. замечание 1). Вторая компонента вектора скорости  $v$  определяется формулой (16). Г е

Авторы выражают благодарность А. Линьяну за поддержку данной работы и полезные обсуждения физических аспектов обсуждаемой задачи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Antontsev S. N., Díaz J. I.** Mathematical analysis of the discharge of a laminar hot gas in a colder atmosphere // Book of abstr. Intern. conf. "Differential equations and related topics". М.: Moscow State Univ., 2007. P. 19–20.
2. **Antontsev S. N., Díaz J. I.** Mathematical analysis of the discharge of a laminar hot gas in a colder atmosphere // Revista Real Acad. Cien. Exact. Ser. Appl. Math. 2007. V. 101, N 1. P. 119–124.
3. **Antontsev S. N., Díaz J. I.** On thermal and stagnation interfaces generated by the discharge of a laminar hot gas in a stagnant colder atmosphere // J. Interface Free Boundar. (В печати.) ∩
4. **Antontsev S. N.** Energy methods for free boundary problems: Applications to non-linear PDEs and fluid mechanics. Progress in nonlinear differential equations and their applications V. 48 / S. N. Antontsev, J. I. Díaz, S. Shmarev. Boston: Birkhäuser Boston, Inc., 2002. L. rik
5. **Баренблатт Г. И., Вышик М. И.** О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости или газа // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20. С. 411–417.
6. **Bénilan P., Kruzhkov S. N.** Conservation laws with continuous flux function // Nonlinear Different. Equat. Appl. 1996. V. 3, N 4. P. 395–419.
7. **Chen L., Jüngel A.** Analysis of a parabolic cross-diffusion population model without self-diffusion // J. Different. Equat. 2006. V. 224, N 1. P. 39–59.
8. **Chen L., Jüngel A.** Analysis of a parabolic cross-diffusion semiconductor model with electron-hole scattering // Comm. Partial. Different. Equat. 2007. V. 32, N 1/3. P. 127–148. ∩ on
9. **Hill A.** Duvle-diffusive convection in a porous medium with a concentration based internal heat source // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 2005. V. 461, N 2054. P. 561–574.
10. **Кружков С. Н.** Квазилинейные уравнения первого порядка с несколькими независимыми переменными // Мат. сб. 1970. Т. 81, № 123. С. 228–255.
11. **Ладыженская О. А.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева. М.: Наука, 1967.
12. **Pai S.** Fluid dynamics of jets. Toronto; N. Y.; L.: D. Van Nostrand Comp., Inc., 1954.
13. **Pai S.** Two-dimensional jet mixing of a compressible fluid // J. Aeronaut. Sci. 1949. V. 16. P. 463–469.
14. **Pai S.** Axially symmetrical jet mixing of a compressible fluid // Quart. Appl. Math. 1952. V. 10. P. 141–148.
15. **Sánchez-Sanz M., Sánchez A., Liñán A.** Front solutions in high-temperature laminar gas jets // J. Fluid Mech. 2006. V. 547. P. 257–266.
16. **Shepherd R., Wiltshire R. J.** An analytical approach to coupled heat and moisture transport in soil // Transport Porous Media. 1995. V. 20, N 3. P. 281–304.

авт  
версия?

17. **Vazquez J.** An introduction to the mathematical theory of the porous medium equation // Shape optimization and free boundaries (Montreal, 1990), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C. Math. Phys. Sci. V. 380. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992. P. 347–389.
18. **Vazquez J.** Smoothing and decay estimates for nonlinear diffusion equations. Equations of porous medium type. Lecture series in mathematics and its applications. V. 33. Oxford: Oxford Univ. Press, 2006.
19. **Vazquez J.** The porous medium equation. Mathematical theory. Oxford: Clarendon Press: Oxford Univ. Press, 2007.
20. **Zeldovič Y. B., Kompaneec A. S.** On the theory of propagation of heat with the heat conductivity depending upon the temperature // Collection in honor of the 70<sup>th</sup> birthday of acad. A. F. Ioffe. M.: Izdat. Akad. Nauk SSSR, 1950. P. 61–71.

*Поступила в редакцию 30/VII 2007 г.*

---