Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fis.Nat. (Esp),
Vol. 95, N.^{os} 1–2, pp 157–165, 2001
Monográfico: Conmemoraciones Matemáticas: Centenario de la integral de Lebesgue

LA INTEGRAL DE LEBESGUE: HERRAMIENTA DE LA MATEMÁTICA APLICADA

(Henri Lebesgue/integral de Lebesgue/Matemática Aplicada/integral de Riemann/Historia de la Matemática/aplicaciones de la integral de Lebesgue)

JESUS ILDEFONSO DÍAZ *

* Real Academia de Ciencias y Departamento de Matemática Aplicada. Facultad de Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid. Ciudad Universitaria s/n. 28004 Madrid.

1 INTRODUCCIÓN

En junio de 1902, ante una comisión formada por Picard, Koenigs y Goursat [1], un joven matemático de 27 años, antiguo alumno de la Ecole Normale Supérieure, leía su tesis doctoral "Intégrale, Longueur, Aire" (1902) cuyas principales contribuciones había anticipado ya en una breve nota de tres páginas el año anterior (1901).

Su aportación sería histórica, marcando una fecha de obligada referencia para la matemática y de la que ahora celebramos su centenario. En su honor, uno de los entes matemáticos de uso común en Análisis, Física-Matemática y Ecuaciones Diferenciales portarían la inicial de su apellido: los llamados espacios L^p inmortalizando la figura de Henri Lebesgue.

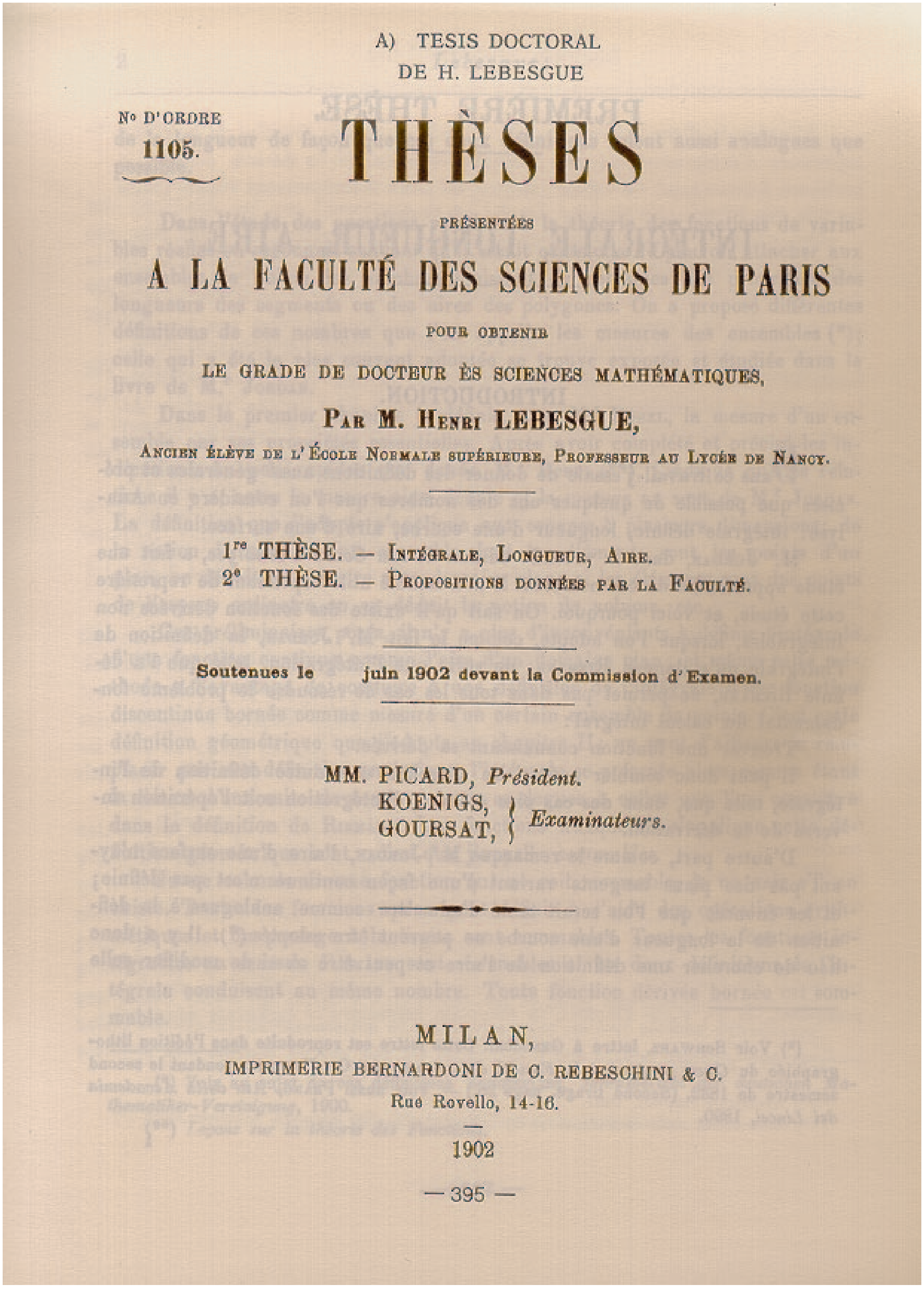
La obra de Lebesgue ha sido objeto de numerosos análisis retrospectivos (véase, por ejemplo, Denjoy (1946), Montel (1941), Denjoy, Félix y Montel (falta fecha), Félix (1974), Hawkins (1975) y Bony, Choquet y Lebeau (2001), entre otros muchos). La publicación de cinco volúmenes recogiendo sus obras científicas (1972) ha permitido un mejor conocimiento de sus motivaciones e inquietudes.

El propósito de estas breves notas responde a una visión complementaria, quizá menos explorada, que la de análisis anteriores. Pretendo subrayar, aunque sea tan sólo mediante unas pocas líneas, el papel fundamental que la integral de Lebesgue viene desempeñando desde entonces en el desarrollo y avances de lo que, de una manera quizás excesivamente laxa, podríamos denominar como Matemática Aplicada. En mi opinión, hoy día, todo matemático con curiosidad e interés en las aplicaciones a otras ciencias naturales y sociales y a la tecnología debe llevar en su "caja de herramientas" los más modernos resultados del Cálculo Integral y Diferencial de su tiempo. Tal y como pretendo ilustrar, una de esas herramientas es la integral de Lebesgue. La integral indefinida representa una operación inversa a la derivación y aparece ya en la resolución del modelo diferencial determinista más elemental posible: dada una función f hallar la solución F de la ecuación $F' = f$. Por su parte, las integrales definidas en una o varias dimensiones (*les grandeurs*) aparecen ligadas a nociones tan básicas como las de longitud, área y volumen[2]. Son conceptos que admiten representaciones intuitivas en muchos casos pero que han requerido una constante revisión a lo largo del tiempo (en alguna manera similar a la obligada revisión evolutiva de conceptos, inicialmente bien acuñados, como los de pintura, música y, más en general, arte). No es, pues, nada extraño que la matemática que aspire a simular el mundo exterior recurra a los más finos desarrollos que le permitan atender a objetos delicados que, si bien, con la óptica de una perspectiva temporal concreta puedan presentar "irregularidades", más tarde, pasan a ser objetos susceptibles de un correcto tratamiento matemático con otra perspectiva posterior más abierta.

Esta exposición no ambiciona más que presentar algunos puntos de vista de manera somera. Así, por ejem-

[1] Lebesgue (1926) relata que cuando le llevó un ejemplar de su tesis a Camille Jordan este le respondió: "Persévérez dans la recherche scientifique: vous y éprouverez de grandes joies, mais il vous faudra apprendre à les goûter solitairement. Vous serez pour les vótres un sujet d'étonnement. Vous ne serez guère mieux compris du monde savant; les mathématiciens y ont place à part et ils ne se lisent même pas toujours les uns les autres".

[2] En sus artículos expositivos, Lebesgue (1956) subraya la excesiva importancia metafísica que a veces se otorga a esas nociones.



A) TESIS DOCTORAL
DE H. LEBESGUE

N° D'ORDRE
1105.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. HENRI LEBESGUE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PROFESSEUR AU LYCÉE DE NANCY.

1[re] THÈSE. — INTÉGRALE, LONGUEUR, AIRE.
2[e] THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le juin 1902 devant la Commission d'Examen.

MM. PICARD, *Président.*
KOENIGS, GOURSAT, *Examinateurs.*

MILAN,
IMPRIMERIE BERNARDONI DE C. REBESCHINI & C.
Rue Rovello, 14-16.
1902

— 395 —

Figura 1. Tesis doctoral de Henri Lebesgue

plo, no nos parece el momento adecuado de llevar a cabo una exposición pedagógica sobre la integral de Lebesgue; por el contrario, presupondremos unos mínimos conocimientos sobre ella (una lectura muy recomendable a este respecto es el texto, ya "clásico" de Hawkins (1975)). Tampoco detallaremos las referencias a numerosas contribuciones que representaron hitos históricos en distintos aspectos matemáticos de la trama argumental de esta exposición. El lector interesado las podrá encontrar en textos más especializados tales como los de Brezis y Browder (1998), Goldstine (1980), Grattan-Guinnes (1980), Hairer y Wanner 2000), Klein (1972) y Lützen (1982), entre otros . . .[3] El plan del resto de la exposición es el siguiente: en primer lugar describiremos, de manera esquemática, una panorámica de la Física-Matemática hacia 1902. A continuación, recordaremos algunas de las mayores limitaciones que presentaba la integral de Riemann. Finalmente abordaremos algunos de los logros y aplicaciones de la integral de Lebesgue desde la perspectiva que nos permite la Matemática Aplicada de nuestros días.

Figura 2. Henri Lebesgue hacia 1904

2 PANORAMA DE LA FÍSICA-MATEMÁTICA HACIA 1902

Desde la obtención, en 1746, de la primera ecuación en derivadas parciales (la ecuación de la cuerda vibrante, $u_{tt} = c^2 u_{xx}$) por Jean Le Rond D'Alembert en su artículo *Investigaciones sobre la curva que forma una cuerda tensa que se hace vibrar*, los problemas modelados en términos de ecuaciones en derivadas parciales se extendieron a fenómenos de una enorme variedad de orígenes físicos. Así, entre las llamadas ecuaciones elípticas, podemos señalar la *ecuación de Laplace*, que data de 1780, para el estudio del potencial gravitatorio, y que obedece a la formulación genérica $\Delta u = f$ cuando se supone $f = 0$ y se toma como Δ el *operador Laplaciano* dado por

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

para una función incógnita $u : \Omega \to \mathbb{R}$, con Ω abierto de $\mathbb{R}^N$. El estudio del caso $f \neq 0$ se inició en 1813 y dio lugar a la llamada *ecuación de Poisson*, también estudiada por Green (1828) y Gauss (1839) en relación con el potencial eléctrico. Las ecuaciones de *superficies mínimas* y *de curvatura constante* se pueden formular (en el caso no paramétrico) mediante

$$div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = H(x,u),$$

con $H = 0$ para el primero de los casos. Fueron objeto de estudio por Lagrange (1760), Gauss (1830) y Plateau (1840), entre otros muchos.

Las ecuaciones de tipo parabólico, como por ejemplo *la ecuación del calor*

$$u_t - \Delta u = 0,$$

serían estudiadas por Fourier en 1811. Desde el punto de vista de la *Mecánica de Medios Continuos*, el *sistema de Navier-Stokes*

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - \nu\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \\ div\ \boldsymbol{u} = 0 \end{cases}.$$

(aquí formulado para un fluido incompresible) sería objeto de consideración por Navier (1822), Poisson (1831) y Stokes (1845). Pero, además, muchas otras ecuaciones y sistemas jugarían un papel de enorme relevancia. Este es el caso de las *ecuaciones de Euler* para la dinámica de gases (1755), las *ecuaciones de la Elasticidad* (analizadas por Navier (1821) y Cauchy (1822)), las *ecuaciones de Maxwell* (1864), etc.

Un hecho común en la obtención de todas las ecuaciones anteriormente mencionadas es el uso de herramientas del *Cálculo Integral*. Esencialmente, podemos distinguir dos tipos de métodos para la obtención de las citadas ecuaciones diferenciales.

(i) *Paso de forma integral a forma diferencial* (*método de localización*).

[3] Véanse también las exposiciones en distintos Seminarios de Historia de la Matemática por parte de Ballvé y Jiménez Guerra (1997) y Bombal (1991a, 1991b).

Por ejemplo, en el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes, se toma un *volumen de control* V (destinado a ser elegido cada vez más pequeño de manera que se contraiga a un cierto punto de la configuración de referencia $\boldsymbol{p}_0$). La conservación del *momento lineal* sobre el conjunto transformado de V, $V(t)$, mediante el movimiento del fluido $\boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{p})$ (es decir, $V(t) = \boldsymbol{X}(t,V)$) conduce a la identidad

$$\mathbf{0} = \frac{1}{med(V(t))}\int_{V(t)} (\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \Delta\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f})\,d\boldsymbol{x}.$$

Suponiendo ahora que V se contrae a $\boldsymbol{p}_0$ se llega a que $V(t)$ se contrae al lugar $\boldsymbol{x}_0$ ocupado por la partícula $\boldsymbol{p}_0$ en el instante t, $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{p}_0)$. En ese argumento, los textos sobre la materia concluyen que, por tanto, se tiene la igualdad puntual $\mathbf{0} = \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \Delta\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}$ cuando el segundo término se supone particularizado en $(t,\boldsymbol{x}_0)$. Este proceso, tan comúnmente utilizado, requiere una adecuada regularidad sobre la función del integrando $\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \Delta\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}$ (algo que constituye uno de los problemas abiertos más relevantes de nuestro tiempo, al que me referiré más tarde). Sin duda, el proceso está bien justificado si esa función es continua (véase, por ejemplo, Gurtin (1981)), sin embargo, más allá de la continuidad, la dificultad que aparece es heredera del estudio de la óptima regularidad sobre una función escalar $f(t)$ para que se verifique el, a veces, llamado *teorema fundamental del cálculo*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)\,ds = f(t).$$

Lebesgue se ocupó de ese tipo de métodos (el paso de *funciones de conjunto* a *funciones de punto*) en varios de sus trabajos (véase su conferencia expositiva en la *Revista Matemática Hispano Americana* (1925)) así como en el primero de sus cursos impartidos en el Collège de France, el curso 1921-1922 (Volumen I, p. 177 de sus obras científicas (1972)). Según Lebesgue:

> *"Les grandeurs considérées en Physique sont toutes attachées à des corps géométriquement étendus et non à des points"*

(véase la última de las referencias citadas). El tema es de una gran riqueza matemática en la que se han producido importantes aportaciones de matemáticos españoles: véase Guzmán (1975) [4].

(ii) *Multiplicación por un amplio conjunto de funciones test.*

(ii.a) Las llamadas *ecuaciones de Euler-Lagrange* del *Cálculo de Variaciones,* que permiten sistematizar el *Principio de Maupertuis,* surgen al estudiar los puntos estacionarios de un funcional J asociado a una función Lagrangiana $F : \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

$$J(u) = \int_\Omega F(\boldsymbol{x}, u, \nabla u)\,d\boldsymbol{x},$$

donde Ω representa un abierto de $\mathbb{R}^N$. La caracterización de los puntos estacionarios viene dada por la anulación de la *variación* de J en cualquier "dirección" v (es decir, por la anulación de la *derivada Gâteaux* según toda "dirección" v)

$$0 = \partial J(u,v) = \frac{d}{dt}J(u+tv)\,|_{t=0}.$$

Integrando por partes (supuesto que, por ejemplo, u y v se anulan en el borde y poseen la regularidad adecuada) se llega a la identidad resultante de multiplicar por la función test v

$$0 = \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial}{\partial p_i}F(\boldsymbol{x},u,\nabla u) - \frac{\partial}{\partial u}F(\boldsymbol{x},u,\nabla u)\Big)\Big)v\,d\boldsymbol{x}. \tag{1}$$

Nótese que este planteamiento general se aplica al caso del llamado *Principio de Dirichlet*, ya estudiado por Lord Kelvin (1847), por Riemann (1854) en su tesis doctoral y por Dirichlet (1876), en el que lo que se pretende es hallar $\min_K J$ con $K = \{v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} : v = \varphi$ en $\partial\Omega\}$ (supuesta φ dada sobre $\partial\Omega$) para la *energía de Dirichlet*

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,d\boldsymbol{x}.$$

Otro caso de especial relevancia en *Fluidoestática* y *Geometría Diferencial* aparece cuando el funcional J viene dado por

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla v|^2}\,d\boldsymbol{x},$$

lo que corresponde al área de la superficie (en forma no paramétrica) generada por la aplicación $v : \Omega \to \mathbb{R}$ (con lo que se llega a la teoría variacional de *superficies mínimas*).

(ii.b) El llamado *Principio de trabajos virtuales* también conduce a identidades similares a (véase Gurtin (1981)). Así, por ejemplo, en el caso de la conservación de los momentos lineal y angular para el movimiento de un

[4] La conferencia de Fernando Soria, en este mismo acto, ofreció numerosas referencias a este respecto.

fluido viscoso incompresible se llega a la relación (véase, por ejemplo, Gurtin (1981))

$$0 = \int_\Omega (\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} - \Delta \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}$$

para todo $\boldsymbol{v}$ *desplazamiento infinitesimal*.

En ambos casos lo que se pretende deducir es la llamada *forma diferencial* de la correspondiente identidad integral; es decir las ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\frac{\partial}{\partial p_i} F(\boldsymbol{x}, u, \nabla u) - \frac{\partial}{\partial u} F(\boldsymbol{x}, u, \nabla u) \Big) = 0$$

y

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} - \Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$$

respectivamente. Esto no es más que un caso particular de una propiedad genérica entre funciones integrables: *si* $0 = \int_\Omega w \cdot v dx$ *para toda función* v *"adecuadamente regular" entonces* $w \equiv 0$ *en* Ω. Uno de los primeros en demostrar esta propiedad, suponiendo la continuidad de ambas funciones, fue Du Bois-Reymond (1879). Su resultado sería mejorado, años más tarde, por muchos otros autores.

3 LIMITACIONES DE LA INTEGRAL DE RIEMANN

La integral de Riemann, definida a través de la convergencia del área generada por funciones escalonadas superiores e inferiores convergiendo a la función, resultaba inapropiada para el cálculo de la integral de numerosas funciones discontinuas[5]. En particular, el paso al límite en una sucesión de integrales requería poco menos que la convergencia uniforme de los integrandos.

¿Cuál era la importancia de esas limitaciones? La respuesta podría encontrarse en la frase de Lebesgue (1922):

> *Una discontinuidad, una singularidad no es una monstruosidad.*

En efecto, las funciones discontinuas habían aparecido ya en escena con la famosa *fórmula de d'Alembert* para la resolución de la *ecuación de ondas*

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$$

en la que, inicialmente, se obtenían soluciones de la forma

$$u(\boldsymbol{x}, t) = f(\boldsymbol{x} - ct) + g(\boldsymbol{x} + ct)$$

supuestas f y g *funciones analíticas*. Sin embargo, en 1748, Euler resaltó que tal fórmula también generaba soluciones en el mero supuesto de que se supusieran f y g funciones *derivables a trozos* (denominadas por él, entonces, como "discontinuas"). Emergía así la primera *noción de solución débil* en la que una función que no era dos veces derivable verificaba (en un cierto sentido) una ecuación diferencial de segundo orden. Todo ello llevaría a Euler a dar una nueva definición de función en 1755. Surgía de esta manera una rica controversia entre D'Alembert y Euler que conduciría a esclarecer los fundamentos de la Matemática (véase, por ejemplo, la exposición de Klein (1972)[6]). Pero volviendo al caso de Lebesgue, parece que su interés por las funciones discontinuas surge ya desde su primer curso en l'Ecole Normale y, en particular, tras la lectura de un trabajo de Baire[7] en 1899. Lebesgue se interesaba por las *superficies no regladas* aplicables sobre el plano (conservando longitudes de curvas inmersas en ellas). En su trabajo, Lebesgue (1922) afirmaba:

> *Dans certains livres de géométrie élémentaire, on apprend aux enfants comment il faut plier une feuille de carton pour construire les divers polyèdres réguliers. C'est à ces livres que j'ai immédiatement pensé lorsqu'on m'a démontré, pour la première fois, que les surfaces applicables sur le plan sont toutes des surfaces développables. Le désaccord apparent entre cet énoncé et l'existence même de l'art du cartonnier s'explique de suite: un polyèdre est une surface non analytique et possède des lignes singulières.*

Respecto del origen físico de este tipo de cuestiones, Lebesgue (1922), escribía:

> *Le problème des surfaces applicables de la géométrie des surfaces a été évidemment suggéré par la considération des déformations matérielles; pourtant, dans la plupart des déformations physiques, il y a modification des longueurs; il s'agit alors d'un problème appartenant à la théorie de l'élasticité.*

Así, en su Nota en las CRAS de 1901, Lebesgue (1901), Lebesgue ofrece una aplicación geométrica de su noción de integral: la longitud de una curva "con picos". Lebesgue recuerda allí que la longitud de una curva "regular" $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$ viene dada

---

[5] Conviene recordar que la integral de Riemann ya se podia definir para ciertas funciones discontínuas.

[6] Lebesgue se refirió a la controversia en Lebesgue (1905): véase su Chapitre III.

[7] Según indicaba, años más tarde, el propio Lebesgue (1922), Baire se interesaba allí por la integración general de la ecuación $\partial^2 z/\partial x \partial y = 0$ efectuada sin hacer más hipótesis sobre z que las estrictamente necesarias para que el problema tuviese sentido. Recuerdese que esta ecuación aparece a la hora de la deducción de la fórmula de d'Alembert para la resolución de la ecuación de la cuerda vibrante tras introducir unos cambios de variables adecuados.

por la expresión

$$\int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + \varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt$$

y que tal fórmula tiene perfecto sentido (gracias a su noción de integral) aunque $f'(t)$, $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$ sean tan sólo funciones acotadas (el paso al caso "legítimo" en el que esas funciones son meramente integrables requirió algunos años de maduración adicional).

Parece oportuno mencionar también que las funciones discontinuas habían aparecido antes en muchos otros contextos, como por ejemplo, en el estudio de las *Series de Fourier.* Debemos recordar que, en1751, Daniel Bernoulli, había encontrado soluciones a la ecuación de la cuerda vibrante mediante la coexistencia formal de oscilaciones pequeñas de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{m} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

y que sería en 1759 cuando Lagrange extendería su tratamiento al caso de velocidad inicial no nula, pasando también al límite cuando $m \to +\infty$. En 1807 Fourier afirmaba que toda función acotada se podía expresar como

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

siendo

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\, dx, \\ a_n &= \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx, \\ b_n &= \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx. \end{aligned}$$

El plan formal para justificar la afirmación de Fourier podría residir (según Cauchy y Riemann) en multiplicar la función de partida f por funciones trigonométricas, integrar término a término e intercambiar

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-a}^{a} \quad \text{con} \quad \int_{-a}^{a}\sum_{n=1}^{\infty}.$$

Tal programa fue justificado por Abel (1829). Sin embargo, pronto surgiría un ejemplo de función discontinua para la que fallaba el desarrollo de Fourier. Se trataba de la *función de Dirichlet* (1829)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Esta función no era, ni siquiera, integrable en el sentido de Riemann. El interés por las funciones discontinuas había ido creciendo poco a poco. En 1806 Ampère había lanzado la conjetura de que "toda función continua es derivable salvo en un pequeño conjunto de puntos". En 1861, Riemann dio un ejemplo de función continua y no derivable sobre un conjunto denso de puntos. Weierstrass mostraba en 1872 que existen funciones continuas que no son derivables en ningún punto. En 1875 Darboux publicó su tratado sobre funciones discontinuas. Se veía también que las funciones de densidad en el estudio de gases, como soluciones de las *ecuaciones de Euler* y de las *ecuaciones de leyes conservación*, podían presentar "choques" originando discontinuidades [8] y además, poco a poco, iban apareciendo funciones "patológicas" con infinitos puntos de no derivabilidad (curvas de Von Koch (1906), de Takagi (1903), la función y el conjunto de Cantor (1883), etc.). De hecho, Lebesgue también propuso su propia función singular, en 1920, que pasaría a ser denominada como *función de Lebesgue* (véase, por ejemplo Yamaguti et al. (1997)). Hoy día sabemos que esas curiosas funciones constituyeron los primeros ejemplos de *fractales* que aparecen también en el estudio del comportamiento asintótico de ciertos *sistemas dinámicos discretos*, Yamaguti et al. (1997). Las patologías que presentaban esas funciones habían alcanzado, quizá, su máximo grado en 1890 con la llamada *curva de Peano* que pese a ser limite de funciones continuas "llenaba" todo el rectángulo [9].

Otra fuente incesante de motivaciones para el estudio de discontinuidades y singularidades tuvo su origen en la Física-Matemática. En 1871, estudiando el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = \varphi & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

sobre un círculo, F. Prym dio un ejemplo de un dato de contorno φ, continuo sobre la circunferencia, tal que no admite ninguna extensión armónica al círculo con energía finita. La singularidad aparece aquí no ya sobre la función sino sobre su energía de Dirichlet. Argumentos de esta naturaleza darían lugar al desarrollo de *métodos no energéticos* por parte de H.A. Schwarz (1871), C. Neumann (1877) y H. Poincaré (1890; método de *balayage, . . .*), entre otros.

Pero sería con la monografía de George Green (*An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism*), en 1828, cuando comenzaría el estudio de las llamadas *soluciones funda-*

[8] Lebesgue se refirió en Lebesgue (1905) a cómo los resultados de la Teoría de Funciones podrían esclarecer razonamientos, a veces oscuros de la *Cinética de gases*.

[9] Según recogen Ballvé y Jiménez Guerra (1997), en 1905 Hermite escribía a Stieljes "Estoy horrorizado por esta plaga de funciones que no tienen derivada".

mentales[10] (tales que $\Delta U = \delta$, con δ lo que luego sería conocido como *delta de Dirac* (nacido en 1902)). Dirichlet extendería, en 1829, el estudio al caso de la ecuación del calor, G.R. Kirchoff (1882) al caso de la de ondas, Maxwell introducía, en 1873, los *dipolos*. Esos estudios hacían emerger *integrales singulares* en los que el integrando presentaba discontinuidades en ciertos puntos. De manera paralela comenzaba el estudio sistemático de las llamadas *ecuaciones integrales* que sería desarrollado inicialmente por Volterra (1896), Fredholm (1899) y Hilbert (1904). Además, surgía la importante obra de Heaviside (1893) estableciendo relaciones entre series de Fourier y las deltas de Dirac y dando lugar al *Cálculo Operacional*.

4 LA INTEGRAL DE LEBESGUE Y ALGUNOS DE SUS LOGROS

La tesis doctoral de Lebesgue aportaba una concepción de la integral radicalmente distinta a la de Riemann. Él citó en varias ocasiones que su idea de operar era similar a la de un contable ordenado. El procedimiento de Riemann correspondería a como si el contable contase las monedas y billetes según el mero azar con el que le llegasen a su mano, mientras que el método de Lebesgue correspondería a un contable metódico que dijese: tengo

$m(E_1)$ monedas de 1 corona que valen $1 \cdot m(E_1)$,
$m(E_2)$ monedas de 2 coronas que valen $2 \cdot m(E_2)$,
$m(E_3)$ monedas de 5 coronas que valen $5 \cdot m(E_3)$,

etc., y por tanto, en total tengo

$$S = 1 \cdot m(E_1) + 2 \cdot m(E_2) + 5 \cdot m(E_3) + \cdots$$

Una de las mayores virtudes de la noción de integral de Lebesgue es la baja regularidad requerida para pasar al límite en una sucesión de integrales. El denominado *Teorema de convergencia dominada de Lebesgue* afirma que si $|f_n(x)| \leq g(x)$ y $\lim f_n(x) = f(x)$ para todo x salvo un conjunto *de medida nula,* y si g es integrable entonces f es integrable y $\lim \int f_n(x)\,dx = \int f(x)\,dx$. La importancia de este resultado es capital: una teoría de la integración que no permita pasar al límite sin aludir a unos grandes requerimientos es tan limitada como tratar de hacer matemáticas tan sólo con los números racionales excluyendo los irracionales.

Las aplicaciones de esta nueva teoría de la integral se revelaban cada vez más importantes en contextos enteramente distintos. A título de muestra, cabe citar el listado de aplicaciones que Lebesgue seleccionaba en sus "Notices" de 1922 [11]. Éste era el siguiente:

- Cálculo de primitivas y existencia de derivadas
- Series de Fourier
- Integrales singulares
- Ecuaciones integrales
- Problema de Dirichlet y representación conforme
- Cálculo de Variaciones
- Operaciones funcionales
- Integración de diferenciales totales
- Condición de existencia de funciones analíticas
- Estudio de funciones analíticas cerca de sus singularidades.

Es claro que hemos de renunciar a detallar la enorme repercusión que la integral de Lebesgue tuvo en todos

Figura 3. Henri Lebesgue en 1920

[10] Lebesgue se ocupó de las singularidades de funciones armónicas en su nota (Lebesgue (1923)).

[11] Este es un documento de gran valor autobiográfico. Obedeciendo a la tradición francesa, aún en vigor, al haber sido propuesto como candidato a miembro de la Académie des Sciences, Lebesgue tuvo que redactar unas notas retrospectivas sobre sus propios trabajos indicando, entre otras cosas, sus motivaciones y sus repercusiones. Aunque de un interés menor, señalemos que en la página 19 Lebesgue menciona que sus resultados sobre *Teoría de Funciones* eran enseñados en cursos impartidos en España. En otro artículo, Lebesgue (1928) hace mención a la visita de de la Vallée Poussin a la Universidad de Madrid, en 1921.

esos frentes (el lector podrá encontrar en esa referencia una exposición especialmente valiosa). Aquí nos limitaremos a recordar algunos de los progresos a los que se refería Lebesgue en relación al problema de Dirichlet (que extenderemos a la consideración del Cálculo de Variaciones y de las ecuaciones de Navier-Stokes).

A la hora de analizar el problema de minimizar un funcional surgieron los llamados *Métodos directos* (introducidos por el propio Lebesgue (1899) y por Hilbert (1904)) en los que ahora la existencia del mínimo no se obtiene ya a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas sino por un programa alternativo que consiste en mostrar la existencia de una sucesión minimizante y en obtener la convergencia hacia un punto que resulta ser el mínimo gracias a la noción de *semicontinuidad inferior* (supuestamente verificada por el funcional a minimizar).

Beppo Levi (1906) y Fubini (1907), utilizando una famosa desigualdad debida a Poincaré, muestran que una sucesión minimizante del funcional de energía de Dirichlet [12] es de Cauchy para la norma

$$\left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \, d\boldsymbol{x} + \int_\Omega |v|^2 \, d\boldsymbol{x} \right)^{1/2}. \tag{2}$$

En 1907 F. Riesz muestra la completitud del espacio de funciones de cuadrado integrable (usualmente denotado por $L^2(\Omega)$) y caracteriza su dual (que resulta ser el propio espacio), $(L^2(\Omega))^* = L^2(\Omega)$, así como el del espacio de las funciones de potencia p-ésima integrable (denotado por $L^p(\Omega)$) para $p > 1$, $(L^p(\Omega))^* = L^{p'}(\Omega)$ con $1/p + 1/p' = 1$. Se aporta así la propiedad de completitud similar a la de los números reales (ausente en el conjunto de los números racionales o en el espacio de las funciones integrables en el sentido de Riemann).

Paralelamente, C. W. Osen muestra, en 1911, la existencia de soluciones (locales en el tiempo) con energía finita del sistema de Navier-Stokes.

Los comienzos del tratamiento de problemas del Cálculo de Variaciones [13] por medio de espacios funcionales surgen a raíz de los trabajos de Tonelli (1926), Wiener (1926) y Nikodym (1935) entre otros.

En 1931 Jean Leray obtiene un resultado largamente esperado: el primer teorema de existencia de soluciones (globales en el tiempo) para el sistema de Navier-Stokes.

En una serie de trabajos L. Sobolev (1930) y C. Morrey (1930) sistematizan la noción de solución débil de problemas de contorno introduciendo los llamados *espacios de Sobolev* (espacios de energía finita) dotados de normas similares a la dada por Brezis y Browder (1998)). La noción de solución débil viene dada mediante identidades integrales obtenidas al multiplicar por funciones test arbitrarias (pero adaptadas a cada problema). La deducción de la forma diferencial de esas identidades, a la que hemos hecho referencia en la segunda sección, tiene lugar (en el espacio dual) como una sencilla consecuencia del *Teorema de Hahn-Banach* (1927), con lo que el resultado de Du Bois-Reymond es ampliamente mejorado. Más tarde, en 1950, llegaría la correcta fundamentación de las deltas de Dirac y los dipolos con la *teoría de las distribuciones* de L. Schwartz.

Se había producido un importante cambio de filosofía a la hora de abordar los problemas de la Física-Matemática. En vez de intentar obtener directamente la existencia de soluciones clásicas de las ecuaciones diferenciales en estudio, ahora el programa consistía en dos etapas claramente diferenciadas: i) demostración de la existencia de soluciones débiles *(Problema 20 de Hilbert*), y ii) obtención de teoremas de regularidad (*Problema 19 de Hilbert*).

Con Dirac (1926) y von Neumann (1927) se produciría otra aplicación notable de la integral de Lebesgue, esta vez en el campo de la *Mecánica Cuántica*. Nos referimos a la *teoría espectral*, no ya para *operadores compactos* (cuya aplicabilidad al estudio de ecuaciones integrales había sido mostrada ya por Hilbert) si no para *operadores no acotados* en el espacio $L^2(\Omega)$.

Los *problemas de evolución* comenzaron a ser entendidos como *problemas abstractos de Cauchy* sobre *espacios de Banach X* del tipo

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

con el *teorema de generación de semigrupos* de Hille-Yosida en 1956. En numerosos casos el espacio de Banach oportuno resulta ser el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$ aunque también hay ecuaciones en derivadas parciales, de gran relevancia en la Física-Matemática, en las que el espacio adecuado es $L^p(\Omega)$ con $p \neq 2$.

En 1941 fallecía Henri Lebesgue sin haber tenido la oportunidad de ser testigo de la consagración de su noción de integral incluso en contextos insospechados. Este fue el caso del *Análisis Numérico* en donde la convergencia de aproximaciones por polinomios u otras funciones simples (*métodos de diferencias finitas*[14], *elementos finitos, de Galerkin*, ...) requirió el uso de normas

[12] Lebesgue se ocupó del problema de Dirichlet en una serie de *Notes aux Comptes Rendues de l'Académie des Sciences* entre 1907 y 1937 (véase la recopilación presentada en el Volumen IV de (1972)).

[13] Algunas de las aportaciones de Lebesgue (1963) al Cálculo de Variaciones fueron editadas postumamente como libro.

[14] Lebesgue dedicó su curso en el Collège de France, durante el curso académico 1928-29, a las ecuaciones en diferencias finítas (Lebesgue (1972): Vol. I., pp. 180–181).

de espacios de energía finita involucrando integrales en el sentido de Lebesgue. Pero además, el estudio de las singularidades que pueden presentar las soluciones de ecuaciones diferenciales (que tanto atrajo a Lebesgue) está, hoy día, de máxima actualidad. Así, por ejemplo, el último de los grandes siete problemas matemáticos pendientes de resolución al comenzar el siglo XXI, seleccionados por la *Fundación Clay* en el año 2000, se refiere al estudio de las posibles singularidades de las soluciones del sistema de Navier-Stokes.

La tesis de Henri Lebesgue, de1902, marcó pues una fecha de referencia para la Matemática Pura y Aplicada y de hecho, tomando prestada una famosa frase de Jacobi, más en general "para el honor del espíritu humano".

BIBLIOGRAFÍA

1. Ballvé, M. E. y Jiménez Guerra, P. (1997). Borel, Baire y Lebesgue. En el libro *Historia de la Matemática del siglo XX.* Real Academia de Ciencias. Madrid, 195–220.

2. Bombal, F. (1991a). La teoría de la medida: 1875–1925. En el libro *Seminario de Historia de la Matemática I,* Ed. M. Martínez, Universidad Complutense. Madrid, 107–144.

3. Bombal, F. (1991b). Los orígenes de la teoría de distribuciones. En el libro *Seminario de Historia de la Matemática I,* Ed. M. Martínez, Universidad Complutense. Madrid, 211–244.

4. Bony, J. M., Choquet, G. et Lebeau, G. (2001). Le centenaire de l'intégrale de Lebesgue, *C.R. Acad. Sci. Paris,* **332,** Série I, 85–90.

5. Brezis, H. and Browder, F. (1998). Partial differential equations in the 20th century, *Advances in Math.,* **136,** 76–144.

6. Denjoy, A. (1946). Notice sur la vie et l'oeuvre de Henri Lebesgue, Institut de France.

7. Denjoy, A., Félix, L. et Montel, P. (1???). Henri Lebesgue: le savant, le professeur, l'homme. *L'Enseignement mathém.,* **III.**

8. Félix, L. (1974). *Message d'un mathématicien: Henri Lebesgue,* Librairie Scientifique et technique Albert Blanchard, Paris.

9. Goldstine, H. H. (1980). *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19 Century*, Springer-Verlag, New York.

10. Grattan-Guinnes, I. (ed.), (1980). *From the Calculus to the Set Theory*, Duckworth, Londres.

11. Gurtin, M.(1981). *Introduction to Continuum Mechanics,* Academic Press, New York.

12. Guzmán, M. de (1975). *Differentiation of integrals in* $\mathbb{R}^n$, Lect. Notes Math., **481**, Springer, Berlín.

13. Hairer, E. and Wanner, G. (2000). *L'analyse au fil de l'histoire*, Springer, Paris.

14. Hawkins, Th. (1975). *Lebesgue's Theory of Integration*, Chelsea Publishing Company, New York.

15. Hawkins, Th. (1976). Henri Léon Lebesgue, *Dictionary of Scientific Biography*, **14**, 110–112.

16. Klein, M. (1972). *Mathematical thoughs from ancient to modern times*, Oxford University Press. Hay traducción al castellano: *El pensamiento matemático de la Ántigüedad a nuestros días*. Alianza Universidad. Madrid, 1992.

17. Lebesgue, H. (1901). Sur une généralisation de l'intégrale définie, *C.R. Acad. Sci.,* **132,** 867–869.

18. Lebesgue, H. (1902). *Intégrale, Longueur, Aire,* Thèses. Faculté des Sciences de Paris. Publicada también en Imprimerie Bernardoni de C. Rebeschini, Milan y *Ann. Mat. Pura Appl.,* **7,** (1902).

19. Lebesgue, H. (1905). A propos de quelques travaux mathématiques récents. En Lebesgue (1972), Vol. II, 395–492.

20. Lebesgue, H. (1922). *Notice sur les travaux scientifiques de M. Henri Lebesgue*, Imprimerie et librairie Éduard Privat, Toulouse: También en Lebesgue (1972), Vol. I, 97–175.

21. Lebesgue, H. (1923). Sur les singularités des fonctions harmoniques, *C. R. Acad. Sci.,* **176**, 1097-1099 y 1270–1271.

22. Lebesgue, H. (1925). Evolución de la noción de integral, *Rev. Mat. Hisp. Amer.*, **2,** 65–74 y 97–106.

23. Lebesgue, H. (1926). Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan (1838-1922), *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, **58,** 39–46.

24. Lebesgue, H. (1928). Ch.-J. de la Vallée Poussin, *Revue des questions scientifiques,* 5–15. También en Lebesgue (1972), Vol. V, 374–384

25. Lebesgue, H. (1956). *La mesure des grandeurs,* Monographie de l'Enseignement Mathématique, Genève. Recopilación de una serie de artículos que bajo el mismo título (Sur la mesure des grandeurs) aparecieron en *l'Enseignement Mathématique* entre 1932 y 1935.

26. Lebesgue, H. (1963). *En marge du calcul des variations,* L'Enseignement Mathématique, Institut de Mathématiques, Genève.

27. Lebesgue, H. (1972). *Oeuvres Scientifiques, Volumes I,II, III, IV, V.* L'Enseignement Mathématique, Institut de Mathématiques, Université de Genève.

28. Lützen, J. (1982). *The Prehistory of the Theory of Distributions*, Springer-Verlag, New York.

29. Montel, P. (1941). *Notice nécrologique sur M. Henri Lebesgue, C.R. Acad. Sci.,* **213,** 14–34.

30. Yamaguti, M., Hata, M. and Kigami, J. (1997). *Mathematics of fractals,* University of Bangalore Press, New Delhi.