Investigación actual: Teoría de Control, Optimización y Teoría de Juegos

CLIMA Y MATEMÁTICAS

JESÚS ILDEFONSO DÍAZ

Poner en relación algo tan complejo y heterogéneo como el clima con una ciencia tan aparentemente intolerante con la imprecisión como las Matemáticas podría parecer, a primera vista, un empeño artificial e injustificado. Nada más lejos de la realidad. Los modelos matemáticos (a veces denominados modelos numéricos por su predominante componente computacional) son los responsables de formular las leyes físicas que rigen las variaciones de las distintas variables que configuran el clima. Gracias a esos modelos el hombre es capaz hoy día de predecir, con notable éxito, tanto el tiempo que hará en los próximos días, amortiguando así los efectos de las posibles catástrofes naturales, como analizar las consecuencias negativas de la acentuación del efecto invernadero por la polución atmosférica. Estos modelos permiten también mirar al pasado y reconstruir situaciones climáticas de las que sólo tenemos muy limitados datos. Ese último objetivo, además de poseer un gran interés en sí mismo, es de gran utilidad para la validación de los modelos y mejorar su fiabilidad.

JESÚS ILDEFONSO DÍAZ
es Catedrático de Matemática Aplicada de la Universidad Complutense de Madrid y miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Pero ¿qué tipo de matemáticas está presente en el estudio del clima? El bagaje requerido para penetrar en el mundo matemático y la limitada extensión de estas líneas nos sugieren abordar la respuesta sin entrar en detalles técnicos pero indicando, al menos, las *palabras clave* desde las que el lector interesado podría reconstruir un camino que quizás no esté exento de alguna dificultad pero sin duda está repleto de satisfacciones intelectuales. Nada mejor que comenzar señalando que la interacción entre climamatología y matemáticas no es exclusiva de nuestra época en la que los ordenadores han revolucionado la aplicabilidad de las matemáticas. Así, por ejemplo, el tema propuesto por la Academia Francesa de Ciencias para el Premio de Matemáticas de 1738 versaba sobre *la causa del flujo y reflujo del mar* resultando premiados D. Bernoulli, L. Euler y C. MacLaurin. Igualmente, el Premio de Matemáticas de la Academia de Ciencias de Prusia del año 1746 fijaba como tema *la causa general de los vientos* siendo, esta vez, premiado J. d'Alembert.

Por otra parte, P. S. de Laplace, escribía en 1772: «*Se pueden reconocer y determinar por un gran número de observaciones, incluso poco precisas, las leyes y las causas de fenómenos de los cuales es imposible obtener las expresiones analíticas como, por ejemplo, los efectos del calor solar sobre la atmósfera, la producción de vientos alisios y monzones, y las variaciones regulares, sean diurnas, anuales, del barómetro o del termómetro*». Finalmente, J. Fourier, se anticipaba a un punto de vista que responde al enfoque ecológico de nuestros días al afirmar en 1824: «*El establecimiento y el progreso de las sociedades humanas, la acción de las fuerzas naturales, pueden cambiar notablemente y dentro de grandes regiones, el estado de la superficie del suelo, la distribución de las aguas y los grandes movimientos del aire. Dichos efectos son capaces de hacer variar el grado de calor medio a lo largo de varios siglos*».

La interacción entre climatología y matemáticas no es exclusiva de la época de los ordenadores

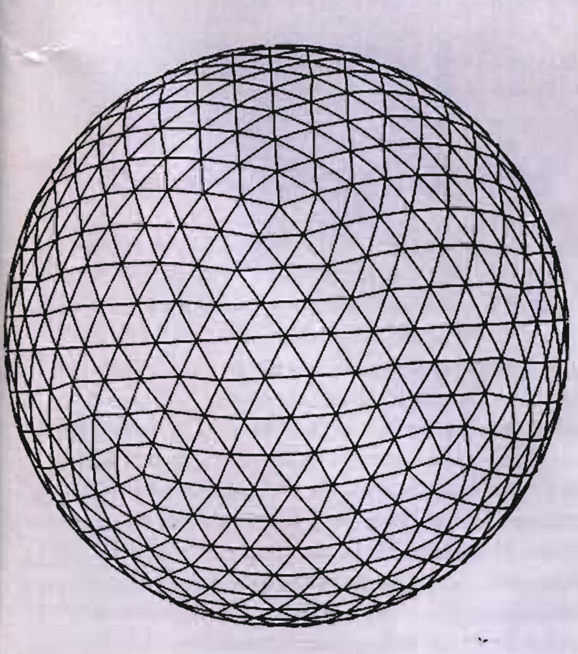
El punto de vista de Fourier fija su atención no ya en la predicción a corto plazo de tiempo, lo que hoy día se nos ofrece en los telediarios y periódicos, sino en las variaciones de clima a más larga escala de tiempo: decenas de años, siglos e incluso miles de años. Es claro que esa diferencia de objetivos (que distingue a la Meteorología de la Climatología) se ha de traducir en una clara diferencia en los modelos matemáticos utilizados en uno y otro caso.

La predicción a corto plazo de tiempo requiere disponer de una información expresable en cantidades numéricas lo más precisas posible de cada una de las variables climáticas: temperaturas terrestres y marinas a diferentes alturas y profundidades, dirección e intensidades de las velocidades, isobaras de los fluidos («cielos y mares») que nos rodean, propiedades químicas de sus componentes (salinidad, concentraciones de gases), etc. Son los modelos denominados genéricamente de *Circulación General*. Los algoritmos o *modelos discretos* que son introducidos en los más potentes ordenadores disponibles del momento se obtienen al reemplazar por sistemas de ecuaciones discretas las numerosas *ecuaciones en derivadas parciales no lineales* acopladas entre sí (las magnitudes en estudio dependen de varias variables espaciales y del tiempo y la «regla de tres» deja de ser aplicables en este contexto).

La posibilidad de predicción del tiempo, con todas sus posibles limitaciones, es uno de los grandes triunfos de parcelas fundamentales de la matemática como son el *Análisis Numérico* y la *Computación*. No es extraño que el nombre de un meteorólogo, como L.F. Richardson, aparezca irremisiblemente en los textos de Análisis Numérico por sus investigaciones, en la segunda déca-

(1)
J.L.Lions, R. Temam y S. Wang, *Journ. Math. Pures et Appl.*, 74, 105-164,1995.
(2)
J.L. Lions, *El Planeta Tierra: el papel de las matemáticas y de los super denadores*.Espasa-Calpe. Serie del Instituto de España. 1990.
(3)
Mundo Científico publicó un número especial (nº 115) sobre *La ciencia del caos*,Julio-Agosto, 1991.
(4)
R. Temam, en *Mathematics, Climate and Environment*, (J.I. Díaz y J.L. Lions, eds.), Masson, 1993, 189-211.

da del siglo, sobre los llamados *esquemas explícitos e implícitos*. Tampoco es de extrañar que una figura tan singular como la de J. von Neumann, autor de contribuciones que cimientan la matemática pura de este siglo, esté también unido a este éxito. El 31 de enero de 1949 el potente ordenador ENIAC dise-



ñado por él y los algoritmos numéricos de von Neumann y el meteorólogo J.G. Charney fueron capaces de pronosticar, con 24 horas de antelación, una gran tormenta sobre el noroeste de Estados Unidos, lo que constituyó un hito en la historia de la Meteorología.

Pero las técnicas más sofisticadas del Análisis Numérico y de la Computación se quedarían en meros fuegos de artificio si no fuese por la existencia de un *modelo continuo* que formule las leyes físicas que rigen el comportamiento de las variables climáticas. Esos modelos suelen acoplar las famosas *ecuaciones de Navier-Stokes* con la de la energía térmica y otras *ecuaciones de difusión* de los componentes químicos, etc. Además, es imprescindible dar una información complementaria sobre lo que está ocurriendo en el instante inicial y lo que ocurre en todo instante sobre el contorno de la región espacial analizada. Hace tan sólo unos años que se ha podido demostrar con todo rigor que esos modelos están «moderadamente» *bien planteados*[1] pese a su enorme complejidad y a la imposibilidad de resolución mediante fórmulas explícitas. El estudio de esas cuestiones está ligado al *Análisis Matemático* de los modelos y constituye un cuerpo de doctrina conocido como *Teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales* o de *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* (cuando las incógnitas no dependen más que de una variable real). Existe incluso una teoría matemática que analiza la situación realista de *problemas con datos incompletos*[2].

Por otra parte, analizando la dependencia continua de las variables climáticas respecto de los datos iniciales fue como el meteorólogo E.N. Lorenz popularizó, a partir de sus trabajos de 1960, la *Teoría del Caos Determinista* de los *sistemas dinámicos no lineales* que se presenta en ciencias tan dispares como la economía, biología, etc.[3] Es el «efecto mariposa» que hasta ha servido de título para una reciente película española.

Pero si antes se ha tenido la precaución de utilizar el término «moderadamente» bien planteados es porque, por increíble que parezca, en la fecha en la que se escribe este artículo, no se conoce si hay *unicidad de soluciones*, es decir si hay un único comportamiento de esas variables a partir de los datos iniciales y de contorno o por el contrario hay múltiples comportamientos posibles. Un problema abierto que no desmerece un ápice, por su trascendencia y dificultad, del recientemente resuelto problema de Fermat.

Otra fructífera interacción entre matemáticas y clima radica en el estudio del comportamiento, cuando el tiempo tiende a infinito, de las soluciones de un sistema dinámico no lineal. En el caso de la meteorología el sistema dinámico asociado tiene *infinitos grados de libertad*. Uno podría imaginar que el conjunto de todos los estados de equilibrio, soluciones periódicas, etc., alcanzados (*el atractor maximal*) depende también de un número infinito de parámetros pero se sabe que en este caso no es así: el conjunto tiene una *dimensión fractal* (introducida por B. Mandelbrot como una modificación de la *dimensión de Hausdorff*) finita. Además, la *Teoría de las variedades lentas* utilizada en Meteorología para la *asimilación de datos* ha sido extendida a un ámbito matemático mucho más general (*las variedades inerciales*) para mostrar que la transición al atractor maximal, cuando el tiempo tiende a infinito, no se hace homogéneamente, sino que hay «modos» mucho más rápidos que otros y que definen la pauta de la evolución temporal[4]

El problema de la unicidad de soluciones es del mismo rango de dificultad que el problema de Fermat

Los modelos matemáticos en Climatología no pretenden el pronóstico exacto sino diagnósticos cualitativos. La escala temporal es mucho mayor. Como se suele decir, «los arboles no dejan ver el bosque» y es aconsejable acudir a simplificaciones de los modelos de circulación general. Una de las aportaciones más singulares y pioneras se debe al astrónomo yugoslavo Milutin Milankovitch (1879-1958): el primero en completar una teoría climática de las glaciaciones del Pleistoceno calculando los elementos orbitales y los subsiguientes cambios en la insolación y en el clima.[5] La principal contribución de Milankovitch fue analizar la radiación solar a diferentes latitudes y en distintas estaciones con un enfoque matemático, produciendo tabulaciones y mapas de gran detalle. Su teoría se basaba en que aunque la energía emitida por el Sol se mantuviese constante, la variación de los parámetros orbitales originaría cambios fundamentales en la distancia y orientación relativas entre la Tierra y el Sol, lo que podría justificar los ciclos de glaciaciones pasadas.

(5)
Mundo Científico publicó un dossier en el que se hacían repetidas referencias a la teoría de Milankovitch, nº 204, setiembre, 1999.

A grandes rasgos, y para mencionar algunos de los métodos matemáticos de la *Mecánica Celeste* que utilizó Milankowitch, hemos de recordar que los datos orbitales se obtienen a través de la *ley de atracción universal de Newton* y que únicamente en el caso del llamado *problema de los dos cuerpos* (solo dos astros en interacción) se posee una solución exacta que permite demostrar rigurosamente las famosas *tres leyes de Kepler* (obtenidas por éste únicamente de manera empírica). Los llamados *métodos de perturbaciones* son los más usuales para abordar el *problema de los tres cuerpos*. El portentoso trabajo de Milankovitch consistió en elaborar tablas muy detalladas sin el apoyo de las facilidades de computación que disponemos hoy día. No sobra señalar que, pese al enorme potencial computacional actual, la cuestión de *la estabilidad del sistema planetario* constituye otro de los grandes problemas matemáticos que aún no han sido completamente resueltos. Para su estudio, H. Poincaré introdujo las llamadas *soluciones cuasi-periódicas* (soluciones constituidas por la suma de funciones trigonométricas de frecuencias racionales desacopladas entre sí). Posteriormente A. Kolmogorov conjeturó que la mayoría» de las soluciones del problema de los tres cuerpos eran cuasi-periódicas, hecho que fue mostrado bajo hipótesis adicionales por V.I. Arnold y J. Moser, en los años sesenta, dando lugar a una compleja teoría que hoy es conocida como *teoría KAM*.

Los modelos de balance de energía reflejan las variaciones de parámetros solares y terrestres

Los estudios sobre las repercusiones de la variaciones de la función de insolación son ahora más precisos que los elaborados por Milankovitch. No sólo por las disponibilidades computacionales ni por las mediciones de satélites puestos en órbita con esos fines (como el Earth Radiation Budget Satellite) sino también por los progresos realizados en una más correcta modelización. Los modelos matemáticos más utilizados en la actualidad son los denominados *Modelos de Balance de Energía*. Su principal característica es la de analizar la sensibilidad de la temperatura frente a pequeñas variaciones de parámetros solares o terrestres. Aprovecharemos su mayor simplicidad para dar una idea de las distintas etapas en el proceso de *modelización matemática*.

Existe toda una jerarquía entre esa familia de modelos comenzando en su nivel más elemental por los llamados *modelos cero-dimensionales* (a veces denominados modelos «juguete») en los que la incógnita es la temperatura promediada globalmente y por tanto únicamente dependiente del tiempo. Una segunda clase lo forman los llamados *modelos difusivos unidimensionales* introducidos en 1969 por M.I. Budyko y W.D. Sellers de forma independiente. En ellos la incognita es un cierto promedio local (en el tiempo y en el espacio) de la temperatura superficial que conduce a una incognita ahora dependiente del tiempo y de la latitud. Si se añade la dependencia respecto de la longitud se obtienen los *modelos bidimensionales*. En ese caso la incognita está definida sobre la superficie terrestre que suele ser modelizada mediante una superficie esférica o más en general, sin condiciones de simetría, por una *variedad Riemanniana compacta* y *sin borde*. Las herramientas de *Geometría Diferencial* se hacen aquí indispensables para poder definir propiamente los operadores diferenciales: gradiente, divergencia, laplaciano, rotacional, etc.

Un hecho común a esa clase de modelos es su formulación a partir de un balance de energía en la superficie de la Tierra: incremento de calor = $R_a - R_e + D$, donde R_a y R_e modelizan las componentes internas del sistema climático y representan respectivamente la energía de radiación (de onda corta) absorbida y la energía de radiación (infrarroja de gran longitud de onda) emitida por la superficie terrestre. D representa la redistribución de calor dada mediante un operador (de difusión) diferencial de segundo orden.

Para construir el modelo necesitamos una incognita que en esta caso va a ser la distribución de la temperatura sobre la superficie terrestre $u(x,t)$ como función del punto de la superficie x y del instante t. Una vez definida la incognita debemos «cerrar el modelo» relacionando cada uno de los términos del balance anterior con la incógnita u. El incremento de calor viene dado por el producto de la *capacidad calorífica* $c(x,t)$ por la derivada temporal $u_t(x,t)$ de la temperatura. La energía absorbida por la atmósfera R_a depende del «color» de la superficie: más concretamente del *coalbedo planetario* b que representa la fracción de la energía recibida que es absorbida por la superficie y toma valores comprendidos entre 0 y 1. Las zonas cubiertas de hielo reflejan más la luz solar que en los océanos y por tanto el coalbedo es mayor en estas ultimas. Se observa que alrededor de las *interfases* que separan los casquetes polares existen zonas muy próximas con coalbedos muy diferentes. En los modelos de balance de energía se consideran expresiones para el coalbedo que varian bruscamente en un entorno de la temperatura en la que el hielo adopta el color blanco y que usualmente se toma como $u=-10$ °C. Por tanto podemos suponer que b es una función prácticamente constante de la temperatura pero con un cambio brusco cuando $u=-10$. Las nieves perpetuas de las altas montañas conducen a suponer también que b depende del punto x, por lo que finalmente se supone que $b=b(x, u(x,t))$. La energía absorbida viene dada por $R_a = QS(x,t)b(x, u)$ donde $S(x,t)$ es la *función de insolación* y Q es una constante denominada *constante solar*[6].

La función de insolación es claramente una función de la latitud y su calculo en épocas pasadas fue la gran aportación de Milankovitch.

La superficie de la Tierra y la atmósfera, calentadas por el Sol, emiten calor en forma de radiación infrarroja de grandes longitudes de onda R_e. Esta energía liberada por la Tierra puede venir representada por la *ley de enfriamiento de Newton* ($R_e(u) = B(x,t)u + C(x,t)$) o más en general por la ley de Stefan-Boltzman $R_e(u) = e(x,t)u^4$ donde ahora u se expresa en grados Kelvin y donde $e(x,t)$ representa un coeficiente de emisión que se supone positivo y puede depender del lugar y del tiempo. Los coeficientes $B(x,t)$, $C(x,t)$ y $e(x,t)$ dependen de manera esencial de la concentración de los gases de invernadero. Su correcta parametrización es uno de las dificultades mayores de la modelización. La difusión de calor D, según convenios bien aceptados, viene dada por $D=\mathrm{div}(k\nabla u)$ con $k=k(x,t)>0$. La ecuación resultante es pues del estilo de $cu_t - \mathrm{div}(k\nabla u) + Bu + C = QS(x,t)b(x,u)$.

La multiplicidad de estados de equilibrio muestra la riqueza de los modelos

El estudio de esta clase de ecuaciones ha sido llevado a cabo por diferentes autores[7] analizando también la estabilización de soluciones hacia los *estados de equilibrio* o soluciones de la ecuación estacionaria asociada, $-\mathrm{div}(\underline{k}\nabla w) + \underline{B}w + \underline{C} = Q\underline{S}(x)b(x,w)$. Una peculiaridad de estos modelos es que dependiendo del valor de la constante solar Q puede haber uno o más de un estado de equilibrio. La *curva de bifurcación* de soluciones tiene forma de «ese» y se produce un fenómeno de *histéresis* cuando Q varía pues las soluciones estables sufren cambios discontinuos con Q al modo de la *Teoría de las Catástrofes* de René Thom.

Como ya se apuntó anteriormente, una detallada información sobre la variabilidad de la función de insolación $S(x,t)$ conduce a la justificación matemática de las conjeturas de Milankovitz sobre las variaciones pasadas del clima[8]. A veces se acude a introducir *términos no deterministas* para tener en cuenta procesos de difícil modelización

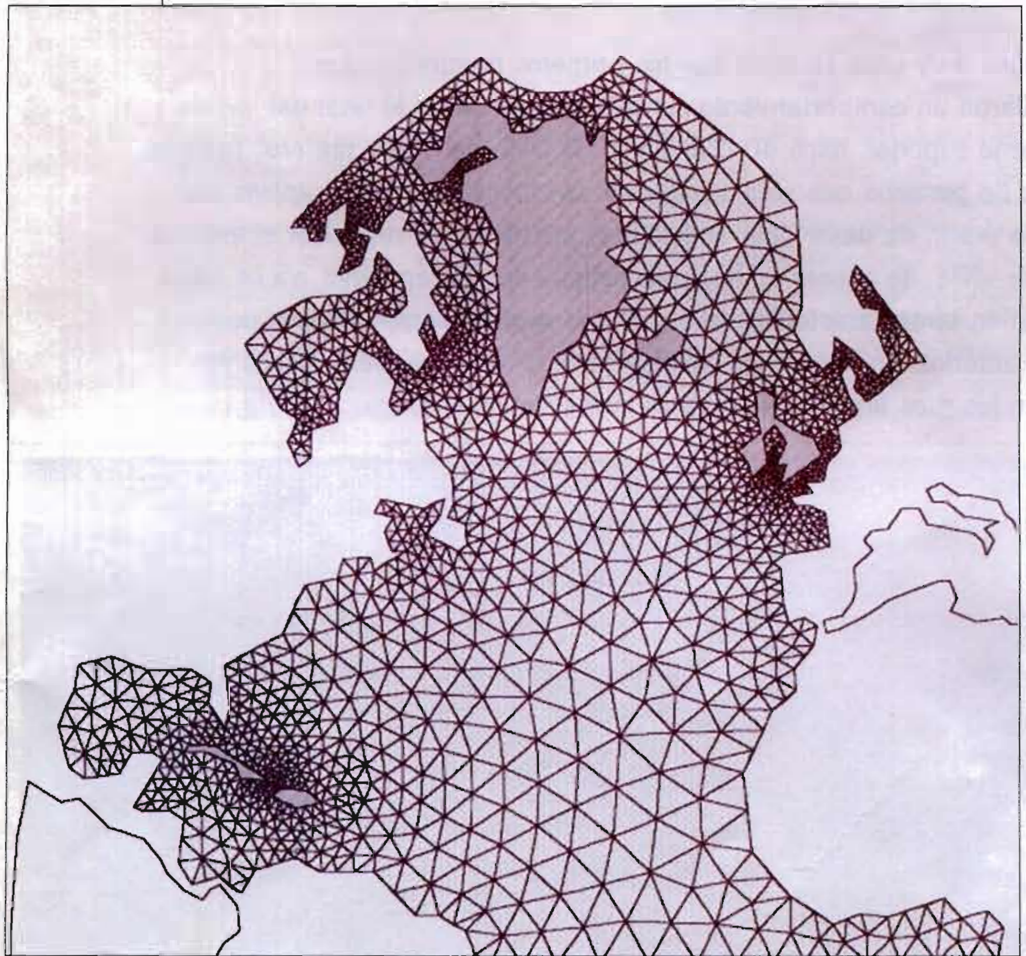
(6)
M. Vázquez Abeledo: *La historia del Sol y el cambio climático*. McGrawHill, Madrid, 1998.
(7)
J.I. Díaz, [ed.]: *The Mathematics of Models for Climatology and Environment*, NATO ASI Series, Springer, Berlin. 1997.
(8)
G.R. North, J.G. Mengel y D.A. Short: *J. Geophys. Res.*, 88. 6576-6586. 1983.

como, por ejemplo, las erupciones volcánicas. El modelo pasa a ser ahora una ecuación estocástica en derivadas parciales en la que aparece un *término fuente* que viene dado por un campo aleatorio dependiente del tiempo (aparece así el *espacio de las series temporales*) [9].

Otro tipo de modelos matemáticos de utilidad para la reconstrucción de climas pasados es el que se refiere a *modelos escalares de casquetes polares* en los que la dinámica de las masas de hielo es estudiada a partir de las leyes de conservación para *fluidos no-Newtonianos* junto a la *aproximación de capas poco profundas* típica de cuando la altura es mucho menor que las otras dimensiones. Ese tipo de modelos ha conducido a una gran concordancia entre los resultados sobre el volumen de hielo estimados en diferentes épocas pasadas y los registros isotópicos geológicos disponibles[10].

Modelos mas sofisticados, acoplando las ecuaciones de la temperatura superficial con las del volumen de hielo y las de la elasticidad del manto que soporta las masas de hielo han logrado justificar la periodicidad de 100.000 años en el espectro climático que se corresponde con la oscilación periódica de la excentricidad de la órbita terrestre[11].

Modelos casi tan complejos como los de circulación general permiten analizar la variabilidad de la salinidad oceánica en largos periodos de tiempo y también han sido utilizados para la justificación de las glaciaciones. La condición necesaria para la formación de una glaciación de que los veranos sean adecuadamente fríos en el hemisferio Norte se ha puesto en entredicho pues algunos glaciares de montaña apuntan hacia el Sur. La respuesta puede estar en variaciones de la salinidad y de las corrientes marinas profundas que recorren los océanos alterando drásticamente su comportamiento. Estudios numéricos de este tipo de modelos muestran, de nuevo, multiplicidad de estados de equilibrio y diagramas de bifurcación respecto un cierto parámetro, con forma de «ese» que sugieren fenómenos de histéresis[12].



Modelos casi tan complejos como los de circulación general permiten analizar la variabilidad de la salinidad oceánica en largos períodos de tiempo y también han sido utilizados para la justificación de las glaciaciones.

Para concluir es obligado referirenos a la acción del hombre sobre el clima. El gran debate se centra en la cuestión de si las consecuencias negativas de las emisiones producidas a lo largo de los últimos siglos son ya irreversibles o por el contrario existe alguna vía de reposición del equilibrio natural existente previamente. El tema no es ajeno a experiencias a una escala mucho menor. Así, algunos aficionados al fútbol seguro que se quedaron sorprendidos cuando leyeron el titular de prensa en la página de deportes de uno de los diarios de mayor tirada nacional, el pasado 13 de mayo, «El alcalde de Moscú ordenó quitar las nubes». La noticia hacía referencia a como el alcalde de esa capital, Y. Luzhkov, ordenó al Servicio Meteorológico de su país despejar las nubes de modo que la final de la Copa de la UEFA, que se celebraría horas después en el estadio Luzhniki de su ciudad llegara con brillantez a todas las pantalla de Europa. Dos horas antes del partido varios aviones y helicópteros arrojaron reactivos especiales sobre las nubes logrando sus pretendidos fines. Despejar y, su efecto contrario, sembrar nubes son ejemplos de acciones controladas (aunque costosas) que han mostrado su eficacia desde los trabajos del Premio Nobel I. Langmuir a mediados de los años cuarenta. La conjetura sobre la posibilidad de modificar el clima mediante posibles acciones humanas sobre el albedo terrestre se debe a J. von Neumann, quien la formuló en 1956, pero no ha sido aún probada ni siquiera sobre modelos matemáticos medianamente complejos. Las normativas mundiales sobre las emisiones permitidas para gases de efecto invernadero que se acuerdan en cumbres como la de Kyoto pueden ser también entendidas como medidas de control introducidas por el hombre con la esperanza de modificar, y al menos no aumentar, las alteraciones nocivas introducidas desde la aparición de la sociedad industrial. La justificación matemática de esas posibles acciones y sus repercusiones sobre una realidad tan compleja son temas punteros de la investigación actual en *Teoría de Control, Optimización* y *Teoría de Juegos*: parcelas importantes de la matemática, tanto por su riqueza científica como por su gran aplicabilidad a muchas otras ciencias experimentales y sociales[13]

La conjetura sobre la posibilidad de modificar el clima mediante posibles acciones humanas sobre el albedo terrestre se debe a J. Neumann

J.I.D.

(9)
M. Ghil y S. Childress, *Topics in Geohysical Fluid Dynamics: Atmospheric Dynamics,Dynamo Theory and Climate Dynamics*, Springer-Verlag, Nueva York, 1987.

(10)
D. Pollard:*Nature*, 296, 334-338. 1982.

(11)
H. Le Treut y M. Ghil: *J. Geophys. Res.*, 88, 5167-5190. 1983.

(12)
R. Rahmstorf. *Nature*, 378,145-149, 1995

(13)
J.I. Díaz y J.L. Lions, eds. *Environment, Economics and Their Mathematical Models*,Masson, Paris, 1994.