MEMORIAS
DE LA
REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES
DE
MADRID

SERIE DE CIENCIAS EXACTAS

TOMO XXVIII

# SIMETRIZACION DE PROBLEMAS PARABOLICOS NO LINEALES: APLICACION A ECUACIONES DE REACCION-DIFUSION

POR

J. I. Díaz
Académico Correspondiente

MADRID
DOMICILIO DE LA ACADEMIA
VALVERDE, 22 - TELEFONO 521 25 29
1991

I. S. B. N.: 84 - 87125 - 18 - 2
Depósito Legal: M. 43.926 - 1991

REALIGRAF, S. A. - Burgos, 12, Tel. 311 14 92 - 28039 Madrid

# SIMETRIZACION DE PROBLEMAS PARABOLICOS NO LINEALES: APLICACION A ECUACIONES DE REACCION-DIFUSION(*)

por

J. I. Diaz

Académico Correspondiente.

**Resumen**

Dado un problema de contorno parabólico sobre un abierto de $\Omega$ de $\mathbb{R}^N$ con dato inicial $u_0$, término independiente $f(t,.)$ y condiciones de anulación en el borde, se define su "problema simetrizado" reemplazando $\Omega$ por una bola $\Omega^*$, de igual medida que $\Omega$, centrada en el orígen y $u_0, f(t,.)$ por $U_0, F(t,.)$ funciones radialmente simétricas y decrecientes a lo largo de los radios.

El principal resultado de este trabajo muestra la estabilidad de este proceso en términos de lo que podría considerarse como la asimetría de la solución y de los datos: la diferencia entre la solución y datos radiales y las funciones de reordenamiento simétrico de la solución y datos de partida. Como caso particular se obtiene el "criterio de comparación en masa", inicialmente obtenido por C. Bandle para la ecuación del calor. La generalidad de las hipótesis aquí supuestas hace posible obtener diversas aplicaciones de la comparación en masa para evaluar diversas propiedades cualitativas de las soluciones u y U: estimaciones en norma, tiempo de explosión, tiempo de extinción y medida del conjunto de anulación.

La extensión al caso de sistemas de ecuaciones de reacción-difusión es llevada a cabo en la última sección, aplicando los resultados al caso del problema de adsorción de un fluido sobre las paredes de un sólido, de gran relevancia en Ingeniería Química.

---

(*) Resultados presentados en la Conferencia impartida en la Real Academia el 5 de Diciembre de 1990.

Symmetrization of nonlinear parabolic equations: application to reaction-diffusion equations


## Abstract

Given a parabolic boundary value problem on an open set $\Omega$ of $\mathbb{R}^N$, of initial datum $u_0$, right side hand term $f(t,.)$ and homogeneous Dirichlet conditions, we define its "symmetrized problem" by replacing $\Omega$ by a ball $\Omega^*$ of some measure than $\Omega$ and $u_0, f(t,.)$ by $U_0, F(t,.)$ radially symmetric functions decreasing along the radii.

The main result of this work (Teorema 1) shows the stability of this process in terms of the asymmetry of the solution and the data: the difference between the radial solution and data and the symmetric rearrangement of the initial solution and data (see (2.16)). As a direct consequence we find a "mass comparison principle" (Corolario 1) obtained by first time by C. Bandle for the heat equation. In Section 3 we apply this in order to compare the behavior of u and U in several qualitative properties: norm estimates, blow-up time, finite extinction time and measure of the vanishing set.

Finally, in section 4, we extend the previous results to the case of suitable reaction-diffusion systems. The adsorption problem, of relevance in Chemical Engineering, is considered as a special case.


## 1. Introducción.

Sea $\Omega$ un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ de frontera regular. Consideremos el siguiente problema de contorno de tipo parabólico

$$(P)\quad \begin{cases} b(u)_t - \operatorname{div} A(x,u,\nabla u) + B(t,x,u) = f(t,x) & \text{en } Q=(0,T)\times\Omega \\ u=0 & \text{en } \Sigma=(0,T)\times\partial\Omega \\ b(u(0,x)) = b(u_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde b es una función real contínua no decreciente tal que $b(0)=0$. Las funciones f y $u_0$ se suponen funciones integrables conocidas y los "coeficientes" A y B satisfacen, entre otras, las siguientes hipótesis:

$$A(x,u,\xi).\xi \geq |\xi|^p \qquad \forall x\in\Omega\ ,\ u\in\mathbb{R}\ ,\ \xi\in\mathbb{R}^N$$

y

$$B(t,x,u)u \geq g(u)u \qquad \forall (t,x)\in Q\ ,\ u\in\mathbb{R},$$

para algún $p\in(1,\infty)$ y alguna función real continua $g$ con $g(0)=0$. Problemas de esta naturaleza aparecen en numerosas aplicaciones: filtración de fluidos en medios porosos, reacciones químicas isotérmicas, fluidos no Newtonianos, conducción no lineal del calor, etc. Referencias detalladas se pueden encontrar en los trabajos Diaz [1980b], [1985a], [1986] y Diaz-de Thelin [1991].

Uno de los principales objetivos de este artículo es la comparación de la solución $u$ del problema (P) con la solución $U$ de un nuevo problema $(P^*)$ de formulación más simple y con propiedades de simetría radial. El proceso de simetrización, ya recogido en la monografía pionera de Polya y Sezgo [1952], comienza por reemplazar el dominio $\Omega$ por una bola $\Omega^*=B(0,R)$ de $\mathbb{R}^N$, centrada en el origen y de igual medida que $\Omega$. El problema simetrizado asociado a (P) se enuncia ahora como

$$(P^*)\quad \begin{cases} b(U)_t-\Delta_p U+g(U) = F(t,x) & \text{en } Q^*=(0,T)\times\Omega^* \\ U = 0 & \text{en } \Sigma^*=(0,T)\times\partial\Omega^* \\ b(U(0,x))=b(U_0(x)) & \text{en } \Omega^*, \end{cases}$$

siendo

$$\Delta_p U = \operatorname{div}(|\nabla U|^{p-2}\nabla U) \ . \tag{1.1}$$

(Observese que para $p=2$ el anterior operador se reduce al operador lineal de Laplace). Los nuevos datos $F$ y $U_0$ son funciones con simetría radial en $x$ relacionados adecuadamente con $f$ y $u_0$. Además, como se pretende que $U$ tenga un comportamiento simple se supondrá también que $F(t,.)$ y $U_0$ son funciones simétricas que decrecen a lo largo de los radios. La elección óptima de $F$ y $u_0$ corresponde a las funciones reordenamientos simétricos de $f$ y $u_0$. Recordemos que dada una función arbitraria $h\in L^1(\Omega)$, $h\geq 0$, siguiendo a Hardy-Littlewood-Polya [1934], se definen las siguientes funciones auxiliares:

$$\mu(\tau)=|\{x\in\Omega: h(x)>\tau\}| \quad \text{(\underline{función de distribución})},$$

$$\tilde{h}:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ \tilde{h}(s)=\inf\{\tau\geq 0:\mu(\tau)\leq s\} \quad \text{(\underline{reordenamiento decreciente})}$$

y finalmente

$$h_*:\Omega^*\to\mathbb{R},\ h_*(x)=\tilde{h}(\omega_N|x|^N) \quad \text{(\underline{reordenamiento simétrico decreciente de } \underline{h})}$$

donde $\omega_N$ es el volúmen de la bola unidad en $\mathbb{R}^N$. Nótese que $h_*$ es simétrica, decrece a lo largo de los radios y que los conjuntos de nivel $\{x\in\Omega: h(x)>\tau\}$ y $\{x\in\Omega^*: h^*(x)>\tau\}$ tienen igual medida. Muchas otras propiedades de la función $h^*$ pueden encontrarse en las monografías Bandle [1980], Mossino [1984] and Kawohl [1985].

Uno de los aspectos básicos que fundamentan la comparación entre u y U tiene sus orígenes en la desigualdad isoperimétrica

$$L \geq N\omega_N^{1/N} A^{(N-1)/N}$$

en la que L representa la longitud (si N=2) o medida de superficie de $\partial\Omega$ y A el area (si N=2) o medida de volúmen de $\Omega$. La igualdad sólo se tiene en el caso de que $\Omega$ sea un círculo (si N=2) o, más en general, cuando $\Omega$ es una bola N-dimensional. Tal desigualdad, que tiene sus orígenes en Dido de Cartago (850 a.C.), no fué obtenida con rigor hasta los trabajos de Steiner (1882 N=2), Schwarz (1890 N=3) y Schmidt (1939 $N \in \mathbb{N}$). La aplicación que aquí haremos pasa por la noción más reciente de "perímetro en el sentido de Giorgi" (De Giorgi [1957]).

Es bien conocido que en el caso elíptico ($b \equiv 0$). Se tiene la comparación puntual $u^* \leq U$ en $\Omega^*$ si se toma $g \equiv 0$ (Talenti [1977]). En el caso parabólico tal tipo de comparación puntual no es posible y la comparación ha de entenderse en un sentido más indirecto pero igualmente de gran utilidad para varios propósitos. En el caso de ecuaciones lineales ($b(u)=u$, $A(t,x,u,\xi)=\xi$, $B \equiv 0$) la desigualdad que se obtiene, tras suponer $U_0 = u_{0*}$ y $F(t,.) = f_*(t,.)$ es

$$\int_0^s \tilde{u}(t,\sigma)d\sigma \leq \int_0^s \tilde{U}(t,\sigma)d\sigma \qquad \forall s \in [0,|\Omega|], \quad \forall t \in [0,T]. \tag{1.2}$$

Esta comparación, que denominaremos "comparación en masa", ha sido recientemente extendida a diversas formualciones no lineales que aquí corresponden a formulaciones particulares del problema (P) (veanse referencias en la Observación 2).

Las principales contribuciones que contiene este artículo son las siguientes: En primer lugar, en la Sección 2, obtendremos una estimación de la norma $L^\infty$ de la diferencia de las funciones de la expresión (1.2) en términos de similares expresiones asociadas a los datos iniciales y a las funciones "miembro-independiente" de las ecuaciones. Tal estimación muestra, en un cierto sentido, la estabilidad del proceso de simetrización e implica como caso particular la comparación de las masas dada en (1.2). Esta consecuencia mejora resultados conocidos establecidos bajo formulaciones particulares de (P). Señalemos a este respecto que si $b(u)\neq u$ la comparación adecuada se debe enunciar en términos de (1.2) pero reemplazando u y U por b(u) y b(U). En esta sección también se muestra una estimación sobre la razón en el tiempo con que una solución de (P), cuando $\Omega$ es una bola, converge a una solución radialmente simétrica cuando $t\to+\infty$.

La Sección 3 contiene diversas aplicaciones del resultado de comparación antes mencionado mostrándose varias propiedades cualitativas de las soluciones de (P). En particular se obtienen estimaciones sobre la norma $L^p$ de $b(u(t,.))$; se muestran las desigualdades

$$T_{\infty,\Omega}\geq T_{\infty,\Omega^*} \qquad y \qquad T_{0,\Omega}\leq T_{0,\Omega^*}$$

donde, en cada caso, $T_\infty$ y $T_0$ representan los tiempos de explosión y de extinción de las soluciones respectivas. Por último se muestra la desigualdad

$$|N_t(u:\Omega)|\leq|N_t(U:\Omega^*)| \qquad , \forall t\in[0,T],$$

siendo $N_t$ el conjunto de anulación de las funciones involucradas sobre los dominios correspondientes. Un hecho notable a este respecto es que tal desigualdad se mantiene incluso para datos de contorno no homogeneos.

Finalmente, en la Sección 4, se extiende el resuldado de comparación en masa al caso de sistemas de reacción-difusión del tipo

$$u_t-\mathrm{div}A_1(x,u,\nabla u)+R_1(u,v)=0$$
$$v_t-\mathrm{div}A_2(x,v,\nabla v)+R_2(u,v)=0\,'$$

cuando se supone

$$R_i(u,v)=f_i(u)+g_i(v)$$

con $f_i$ y $g_i$ adecuadas. Sistemas de este tipo aparecen en la modelización de fenómenos de absorción en Ingeniería Química (vease p.e. Costa [1985], Van Duyn-Knaber [1980].

Una buena parte de los resultados de este trabajo fueron expuestos, en una versión preliminar, en el curso de doctorado que el autor impartió durante el curso 1987/1988 en la Universidad Complutense de Madrid. El autor agradece a J. Mossino y B. Gustafsson las estimulantes discusiones mantenidas durante sus estancias en Madrid en el citado curso académico.

## 2. Estabilidad y comparación en masa en el proceso de simetrización.

Comenzaremos precisando el cuadro funcional en el que enmarcaremos los problemas (P) y (P*) para su tratamiento. Las hipótesis estructurales sobre **A** y B son las siguientes:

$\mathbf{A}:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}^N$ es una función de Caratheodory (e.d. continua en $(\eta,\xi)$ y medible en x), $\mathbf{A}=(A_i)$, i=1,... N tal que

$$|A_i(x,\eta,\xi)|\le C(|\eta|^{p-1}+|\xi|^{p-1}) \tag{2.1}$$

$$A(x,u,\xi).\xi\ge|\xi|^p \tag{2.2}$$

para algún $p\in(1,+\infty)$, para todo $(\eta,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ y para casi todo $x\in\Omega$. Supondremos $B:(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ función de Caratheodory tal que

$$B(.,.,\eta)\in L^{p'}((0,T)\times\Omega) \tag{2.3}$$

$$B(t,x,\eta)\eta\ge g(\eta)\eta \tag{2.4}$$

para todo $\eta\in\mathbb{R}$ y para casi todo $(t,x)\in Q$, siendo g una función continua. Un ejemplo sencillo, de interés en las aplicaciones, es el dado por $\mathbf{A}(x,\eta,\xi)=|\xi|^{p-2}\xi$. Observese que las condiciones (2.1) y (2.2) son satisfechas y que el operador div A se reduce al operador $\Delta_p$ dado en (1.1).

Con respecto a los datos supondremos siempre

$$u_0\in L^\infty(\Omega)\cap W^{1,p}(\Omega) \tag{2.5}$$

$$f\in L^{p'}((0,T)\times\Omega) \tag{2.6}$$

aunque más adelante se comentará el caso de hipótesis más generales (vease la Observación 3). Siguiendo Alt-Luckhaus [1983], diremos que $u\in L^p(0,T:W_0^{1,p}(\Omega))$ es una <u>solución</u> <u>débil</u> <u>acotada</u> de (P) si se verifican las siguientes condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} u\in L^\infty((0,T)\times\Omega),\ b(u)_t\in L^{p'}(0,T:W^{-1,p'}(\Omega)) \text{ y para todo} \\ v\in L^p(0,T:W_0^{1,p}(\Omega))\cap W^{1,1}(0,T:L^1(\Omega)) \text{ tal que } v(T,.)=0 \\ \text{se verifica} \\ \displaystyle\int_0^T<b(u)_t,v>dt+\int_0^T\int_\Omega[b(u)-b(u_0)]v_t\,dxdt=0\ , \end{array}\right\} \tag{2.7}$$

y

$$\left.\begin{array}{c} \text{para todo } v\in L^p(0,T:W_0^{1,p}(\Omega)) \text{ se tiene que} \\ \displaystyle\int_0^T<b(u)_t,v>dt+\int_0^T\int_\Omega A(.,u,\nabla u).\nabla v\,dxdt+\int_0^T\int_\Omega B(t,x,u)v\,dxdt=\int_0^T\int_\Omega f(t,x)v\,dxdt \end{array}\right\} \tag{2.8}$$

La existencia y unicidad de soluciones débiles acotadas han sido establecidas por diversos autores bajo distintas hipótesis. Veanse Alt-Luckhaus [1983], Benilan [1981], Bernis [1988], Blanchard-Francfort [1988], [1989], Diaz-de Thelin [1991] y sus referencias. Siendo el objetivo de esta sección independiente de la teoría de la existencia y unicidad, en todo lo que sigue supondremos la existencia y unicidad de solución débil acotada. Con respecto al problema (P*) basta indicar que su formulación no es más que un caso particular de la de (P) reemplazando $\Omega$ por $\Omega^*$. Así, en todo lo que sigue supondremos

$$U_0\in L^{\infty}(\Omega^*)\cap W^{1,p}(\Omega^*) \tag{2.9}$$

$$F\in L^{p'}((0,T)\times\Omega^*). \tag{2.10}$$

El principal interés de nuestros resultados se refiere al caso de soluciones no negativas. Por este motivo supondremos también que

$$u\geq 0 \qquad y \qquad U\geq 0 \qquad \text{en } Q \text{ y } Q^* \text{ respectivamente.} \tag{2.11}$$

La positividad de u y U se obtiene por métodos conocidos una vez supuesto

$$u_0, f, U_0, F \text{ funciones no negativas} \tag{2.12}$$

y que $gb^{-1}$ es localmente Lipschitciana o bien monótona no decreciente. Más en general basta pedir que

$$\left.\begin{array}{l} g(b^{-1}(\hat{\eta}))-g(b^{-1}(\eta))\geq k(\hat{\eta}-\eta) \\ \text{para algún } k\geq 0 \text{ y para todo } \hat{\eta},\eta \text{ tales que } \eta\leq\hat{\eta}. \end{array}\right\} \tag{2.13}$$

(vease p.e. Diaz-de Thelin [1991]).

Con el fin de enunciar el resultado principal de esta sección definimos las funciones auxiliares

$$\left.\begin{array}{lll} k(t,s)=\displaystyle\int_0^s b(\tilde{u}(t,\sigma))d\sigma & , & K(t,s)=\displaystyle\int_0^s b(\tilde{U}(t,\sigma))d\sigma \\ l(t,s)=\displaystyle\int_0^s \tilde{f}(t,\sigma)d\sigma & , & L(t,s)=\displaystyle\int_0^s \tilde{F}(t,\sigma)d\sigma\ . \end{array}\right\} \tag{2.14}$$

con $t\in[0,T]$ y $s\in(0,|\Omega|)$. La anterior notación sigue el siguiente convenio: si $h(t,x)$ está definida en Q, $\tilde{h}(t,\sigma)$ y $h_*(t,x)$ denotan las funciones reordenamiento decreciente y reordenamiento simétrico decreciente, con respecto a x, de $h(t,.)$ e.d. para t fijo. Finalmente, en todo lo que sigue supondremos

$$U_0=U_{0,*} \qquad y \qquad F=F_* \quad ,$$

hipótesis que es trivialmente equivalente a que $U_0(.)$ y $F(t,.)$ (para cada t fijo) sean funciones radialmente simétricas no decrecientes a lo largo de los radios. Con respecto a los términos no lineales b y B supondremos

$$gb^{-1}=\varphi_1+\varphi_2 \text{ con } \varphi_1 \text{ convexa y } \varphi_2 \text{ cóncava} \tag{2.15}$$

**Teorema 1**

*Sean* u *y* U *las soluciones débiles acotadas de* (P) *y* (P*) *respectivamente. Bajo las hipótesis anteriores existe una constante real* C *tal que para todo* $t\in[0,T]$ *se tiene*

$$\|[k(t,.)-K(t,.)]_+\|_{L^\infty(0,|\Omega|)} \le e^{Ct}\|[k(0,.)-K(0,.)]_+\|_{L^\infty(0,|\Omega|)}$$
$$+\int_0^t e^{C(t-\tau)}\|[l(\tau,.)-L(\tau,.)]_+\|_{L^\infty(0,|\Omega|)}d\tau . \tag{2.16}$$

**Demostración.** El esquema de la argumentación es el siguiente: (i) demostración para el caso de soluciones regulares, (ii) aproximación de las soluciones débiles acotadas por soluciones regulares y paso al límite. Como veremos la primera de las etapas es la más laboriosa y crucial.

<u>Etapa (i)</u>. Comencemos caracterizando la función K mediante la solución de un problema de contorno parabólico. Obviamente se tiene que

$$K(0,s)=\int_0^s b(\tilde{U}(0,\sigma))d\sigma=\int_0^s b(\tilde{U}_0(\sigma))d\sigma\equiv K_0(s) \quad , \quad s\in(0,|\Omega|)$$
$$K(t,0)=0 \quad , \quad K_s(t,|\Omega|)=\tilde{U}(t,|\Omega|)=0 \quad , \quad t\in(0,T).$$

Gracias a (2.13) (P*) admite solución única. Por la simetría de los datos deducimos que necesariamente U es una función simétrica $U(t,x)=U(t,|x|)$. Además, bajo hipótesis suficientes de regularidad

$$\Delta_p U=\frac{\partial}{\partial r}(|U_r|^{p-2}U_r)+\frac{(N-1)}{r}|U_r|^{p-2}U_r$$

y por tanto $U_r$ verifica

$$\frac{\partial}{\partial t}(b'(U)U_r)-\frac{\partial^2}{\partial r^2}(|U_r|^{p-2}U_r)-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{(N-1)}{r}|U_r|^{p-2}U_r\right)+g'(U)U_r=F_r$$
$$\text{en } (0,T)\times(0,R) \quad .$$
$$U_r(t,0)=0 \quad , \quad U_r(t,R)\le 0 \qquad t\in(0,T)$$
$$U_r(0,r)=U_{0,r}(r) \qquad r\in(0,R).$$

Mediante regularización de b y g podemos suponer que $b'(U)>0$ y que la función $g'(U)$ es no negativa o bien es una función acotada. Entonces por el principio del máximo para la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}(a_0(t,r)z)-\frac{\partial^2}{\partial r}(|z|^{p-2}z)-\frac{\partial}{\partial z}(a_1(t,r)|z|^{p-2}z)+a_2(t,r)z=F_r$$

(véase p.e. Protter-Weinberger [1967], Ladyzhenskaya-Solonnikov-Uraltseva [1968]), concluimos que $U_r\geq 0$ y por tanto $U(t,.)$ decrece a lo largo de los radios, e.d. $U_*=U$. Escribiendo ahora $U(t,x)=\tilde{U}(t,\omega_N r^N)$ con $r=|x|$, y tomando $s=\omega_N r^N$ resulta

$$\frac{\partial K}{\partial s}(t,s)=b(\tilde{U}(t,s)) \quad , \quad \tilde{U}=b^{-1}\left(\frac{\partial K}{\partial s}\right) \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial r}=N\omega_N^{1/N}s^{(N-1)/N}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial s} .$$

Por tanto

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t\partial s}(t,s)-\frac{\partial}{\partial s}\left[a(s)\left|\frac{\partial}{\partial s}b^{-1}\left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)\right|^{p-2}\frac{\partial}{\partial s}b^{-1}\left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)\right]+g\left(b^{-1}\left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)\right)=\tilde{F}(t,s)$$

siendo

$$a(s)=\left[N\omega_N^{1/N}s^{(N-1)/N}\right]^p. \tag{2.17}$$

Integrando en s se obtiene que

$$\frac{\partial K}{\partial t}-a(s)\left|\frac{\partial}{\partial s}b^{-1}\left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)\right|^{p-2}\frac{\partial}{\partial s}b^{-1}\left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)+\int_0^s g\left((b^{-1}\left(\frac{\partial K}{\partial s}(t,\sigma)\right)\right)d\sigma=L(t,\sigma). \tag{2.18}$$

La parte más compleja de la demostración radicará en mostrar que la función k satisface una desigualdad expresada en términos del operador diferencial de la parte izquierda de (2.18). Para ello multiplicamos la ecuación de (P) por la función test $v=T_{\tau,h}(u)$ siendo $T_{\tau,h}(s)=0$ si $0\leq s\leq\tau$, $T_{\tau,h}(s)=s-\tau$ si $\tau<s\leq\tau+h$, $T_{\tau,h}(s)=h$ si $s>\tau+h$. Es claro que $T_{\tau,h}\in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ y por tanto $v\in L^p(0,T:W_0^{1,p}(\Omega))$. Supondremos en esta etapa que u es solución débil acotada de (P) tal que

$$\frac{\partial b(u)}{\partial t}\in L^1(0,T:L^1(\Omega)). \tag{2.19}$$

Integrando sobre $\Omega$ se obtiene entonces

$$\int_{\{\tau<u(t,x)\leq\tau+h\}} A(x,u,\nabla u).\nabla u dx = \int_\Omega \left[f(t,x)-B(t,x,u)-\frac{\partial b(u)}{\partial t}\right]T_{\tau,h}(u)dx.$$

Por un proceso ya clásico en teoría del reordenamiento (vease p.e. Talenti [1977] y el Lemma 1.29 de Diaz [1985]) tras utilizar las hipótesis (2.2) y (2.4) se obtiene que

$$-\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{\{u>\theta\}}|\nabla u|^p dx\leq\int_0^{\mu(\theta)}\tilde{f}(t,s)ds-\int_0^{\mu(\theta)}g(\tilde{u}(t,s))ds-\int_{\{u>\theta\}}\frac{\partial b(u)}{\partial t}dx. \tag{2.20}$$

Utilizando la desigualdad de Jensen, la fórmula de Fleming-Rishel, la desigualdad isoperimétrica y la noción de perímetro en el sentido de De Giorgi se obtiene (Talenti [1977] y Lemma 1.30 de Diaz [1985]) que

$$N\omega_N^{1/N}\mu(\theta)^{(N-1)/N}\le(-\mu'(\theta))^{1/p'}\left(-\frac{\partial}{\partial\cancel{t}}\int_{\{u>\theta\}}|\nabla u|^p dx\right)^{1/p}. \tag{2.21}$$

Por otra parte, por los resultados de la teoría del reordenamiento relativo (Mossino-Rakotoson [1986]: en concreto por el Theorem 2.1 e igualdad (2.12) de ese trabajo)

$$\int_{\{u>\theta\}}\frac{\partial b(u)}{\partial t}dx=\int_0^{\mu(\theta)}\frac{\partial b(\tilde{u}(t,\sigma))}{\partial t}d\sigma = \frac{\partial k}{\partial t}(t,\mu(\theta)) \tag{2.22}$$

De (2.20), (2.21) y (2.22) obtenemos que

$$1 \le \frac{-\mu'(\theta)}{[N\omega^{1/N}\mu(\theta)^{(N-1)/N}]^{p/(p-1)}}\left(\int_0^{\mu(\theta)}\tilde{f}(t,s)ds-\int_0^{\mu(\theta)}g(\tilde{u}(t,s))ds-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial k}{\partial t}(t,\mu(\theta))\right)^{1/(p-1)} \tag{2.23}$$

para casi todo $\theta>0$. Integrando (2.23) entre $\theta_1$ y $\theta_2$ $(\theta_1<\theta_2)$ se obtiene que

$$\theta_2-\theta_1 \le \frac{1}{(N\omega^{1/N})^{p/(s-1)}}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mu(\tau)^{-(N-1)p/N(p-1)}\left(\int_0^{\mu(\tau)}\tilde{f}(t,s)ds-\right.$$
$$\left.-\int_0^{\mu(\tau)}g(\tilde{u}(t,s))ds-\frac{\partial k}{\partial t}(t,\mu(\tau))\right)^{1/(p-1)}\mu'(\tau)d\tau \tag{2.24}$$

El próximo paso es hacer un cambio de variable en las integrales de (2.24) para obtener

$$\theta_2-\theta_1 \le \frac{1}{(N\omega^{1/N})^{p/(p-1)}}\int_{\mu(\theta_1)}^{\mu(\theta_2)}s^{-(N-1)p/N(p-1)}\left(\int_0^s\tilde{f}(b,\sigma)d\sigma-\right.$$
$$\left.-\int_0^s g(\tilde{u}(t,\sigma))d\sigma-\frac{\partial k}{\partial t}(t,s)\right)^{1/(p-1)}ds \tag{2.25}$$

La fórmula anterior necesita una cuidadosa justificación toda vez que la función $\mu(\theta)$ no es de clase $C^1$. Sin embargo $\mu$ es absolutamente continua (por ser monótona no decreciente) y entonces se tiene, formalmente, que $\mu'(\theta)d\theta\ge d\mu(\theta)$. Un resultado sencillo de teoría de la integración (vease Mossino [1984], Lemma A1.1) asegura que si $\mu(\theta)$ es no decreciente se tiene que

$$-\int_a^b \Phi(\mu(\theta))\mu'(\theta)d\theta \le -\int_{\mu(a)}^{\mu(b)} \Phi(s)ds$$

supuesto que $\Phi$ es una función contínua y no negativa sobre (a,b). En el caso de la expresión (2.24) la comprobación de esta hipótesis se reduce a repetir los argumentos de Mossino-Rakotoson [1986] (vease también Gustafsson-Mossino [1989]) y de esta manera (2.25) queda justificada.

Tomando $\theta_2=\tilde{u}(t,s_2)$, $\theta_1=\tilde{u}(t,s_1)$ y dividiendo por $s_2-s_1$ tras pasar al límite en $s_2-s_1\to 0$ se obtiene

$$-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial s}(t,s) \le \left[\frac{1}{(N\omega^{1/N}s^{(N-1)/N})^p}\int_0^s \tilde{f}(t,\sigma)d\sigma - \int_0^s g(\tilde{u}(t,\sigma))d\sigma - \frac{\partial k}{\partial t}(t,s)\right]^{\frac{1}{p-1}}. \qquad (2.26)$$

Finalmente, de la definición de k deducimos que

$$k(0,s)=\int_0^s b(\tilde{u}(0,\sigma))d\sigma=\int_0^s b(\tilde{u}_0(\sigma))d\sigma\equiv k_0(s) \qquad , \qquad s\in(0,|\Omega|)$$

$$k(t,0)=0 \quad , \quad k_s(t,|\Omega|)=\tilde{u}(t,|\Omega|)=0 \qquad , \qquad t\in(0,T)$$

y además, como la función

$$\tilde{u}(t,s)=b^{-1}\left(\frac{\partial k}{\partial s}(t,s)\right)$$

es no-decreciente, (2.26) se puede escribir equivalentemente como

$$\frac{\partial k}{\partial t} - a(s)\left|\frac{\partial}{\partial s}b^{-1}\left(\frac{\partial k}{\partial s}\right)\right|^{p-2}\frac{\partial}{\partial s}b^{-1}\left(\frac{\partial k}{\partial s}\right)+\int_0^s g\left(b^{-1}\left(\frac{\partial k}{\partial s}(t,\sigma)\right)\right)d\sigma \le l(t,s) \qquad (2.27)$$

para casi todo $s\in(0,|\Omega|)$ y $t\in(0,T)$.

En un último paso, probaremos que la estimación (2.16) se deriva de manera fundamental de las expresiones (2.18) y (2.27) a través de argumentos típicos de la teoría de "accretive operators" en $L^\infty$ y que a su vez tiene sus orígenes en el principio del máximo (Benilan [1981]). Observemos previamente que si $\varphi=gb^{-1}$, se puede suponer que $\varphi\in C^2(\mathbb{R})$ y por la hipótesis (2.15) se tiene que

$$\varphi(r)-\varphi(\hat{r})\le[\varphi_1'(r)+\varphi_2'(\hat{r})](r-\hat{r}) \qquad \forall r,\hat{r}\in\mathbb{R}.$$

En efecto; por la fórmula de Taylor existen $\theta_1,\theta_2$ tales que

$$\varphi_1(\hat{r})-\varphi_1(r)=\varphi_1'(r)(\hat{r}-r)+\frac{\varphi_1''(\theta_1)}{2}(\hat{r}-r)^2$$

$$\varphi_2(r)-\varphi_2(\hat{r})=\varphi_2'(\hat{r})(r-\hat{r})+\frac{\varphi_2''(\theta_2)}{2}(r-\hat{r})^2.$$

Utilizando que $\varphi_1''(\theta_1)\geq 0$ y $\varphi_2''(\theta)\leq 0$ se llega a la desigualdad deseada. Una vez visto esto trabajaremos con la desigualdad resultante de restar las expresiones (2.18) y (2.27). Observemos que de la anterior desigualdad, tras una integración por partes, se tiene que

$$\int_0^s[g(\tilde{U}(t,\sigma))-g(\tilde{u}(t,\sigma))]d\sigma\leq$$

$$\int_0^s[\varphi_1'(b(\tilde{U}(t,\sigma)))+\varphi_2'(b(\tilde{u}(t,\sigma)))][b(\tilde{U}(t,\sigma))-b(\tilde{u}(t,\sigma))]d\sigma=$$

$$[\varphi_1'(b(\tilde{U}(t,\sigma)))+\varphi_2'(b(\tilde{u}(t,\sigma)))].[\int_0^s\{b(\tilde{U}(t,\sigma))-b(\tilde{u}(t,\sigma))\}d\sigma]$$

$$-\int_0^s\{[\varphi_1''(b(\tilde{U}(t,\sigma)))\frac{\partial}{\partial s}b(\tilde{U}(t,\sigma))+$$

$$+\varphi_2''(b(\tilde{u}(t,\sigma)))\frac{\partial}{\partial s}b(\tilde{u}(t,\sigma))]\int_0^\sigma[b(\tilde{U}(t,\theta))-b(\tilde{u}(t,\theta))]d\theta\}d\sigma$$

En conclusión,

$$\int_0^s[g(\tilde{U}(t,\sigma))-g(\tilde{u}(t,\sigma))]d\sigma]\leq C_1|k(t,s)-K(t,s)|+C_2\max_{\substack{\tau\in[0,T]\\ \sigma\in[0,s]}}|k(\tau,\sigma)-K(\tau,\sigma)|$$

siendo

$$C_1=\sup_{\substack{t\in[0,T]\\ s\in[0,|\Omega|]}}\left|\varphi_1'(b(\tilde{U}(t,s)))+\varphi_2'(b(\tilde{u}(t,s)))\right|$$

$$C_2=|\Omega|\sup_{\substack{t\in[0,T]\\ s\in[0,|\Omega|]}}\left|\varphi_1''(b(\tilde{U}(t,\sigma)))\frac{\partial}{\partial s}b(\tilde{U}(t,\sigma))+\varphi_2''(b(\tilde{u}(t,\sigma)))\frac{\partial}{\partial s}b(\tilde{u}(t,\sigma))\right|$$

Por tanto,

$$\frac{\partial k}{\partial t}-\frac{\partial K}{\partial t}-a(s)\left\{\left|\frac{\partial}{\partial s}b^{-1}\left(\frac{\partial k}{\partial s}\right)\right|^{p-2}\frac{\partial}{\partial s}b^{-1}\left(\frac{\partial k}{\partial s}\right)-\left|\frac{\partial}{\partial s}b^{-1}\left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)\right|^{p-2}\frac{\partial}{\partial s}b^{-1}\left(\frac{\partial k}{\partial s}\right)\right\}$$

$$\leq C_1|k(t,s)-K(t,s)|+C_2\max_{\substack{\tau\in[0,T]\\ \sigma\in[0,s]}}|k(\tau,\sigma)-K(t)|+l(t,s). \tag{2.30}$$

Supongamos por el momento $k,K\in C^{1,2}_{t,s}((0,T]\times(0,|\Omega|)\cap C^{0}([0,T]\times[0,|\Omega|])$ y sean $t\in[0,T]$ arbitrario y $(t_0,s_0)\in[0,t]\times[0,|\Omega|]$ un punto en el que

$$\max_{\substack{\tau\in[0,T]\\ s\in[0,|\Omega|]}} |[k(\tau,\sigma)-K(\tau,s)]_+|=k(t_0,s_0)-K(t_0,s_0)>0$$

(si el máximo es cero la conclusión es trivialmente satisfecha). Supongamos que $t_0>0$ (en otro caso la conclusión es trivial) y que $s_0\in(0,|\Omega|)$. Particularizando (2.30) en $(t_0,s_0)$ se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-(C_1+C_2)t}(k-K)\right) - e^{-(C_1+C_2)t}(l-L)\le e^{-(C_1+C_2)t}a(s)I(t,s) \tag{2.31}$$

donde todas las expresiones están particularizadas en $(t_0,s_0)$, y se ha definido

$$I(t,s) = \left\{\left|\frac{\partial}{\partial s}b^{-1}\left(\frac{\partial k}{\partial s}\right)\right|^{p-1}-\left|\frac{\partial}{\partial s}b^{-1}\left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)\right|^{p-1}\right\} = (p-1)A(t,s)\frac{\partial}{\partial s}\left(b^{-1}\left(\frac{\partial k}{\partial s}\right)-b^{-1}\left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)\right)$$

$$= (p-1)E(t,s)\frac{\partial}{\partial s}(F(t,s)\frac{\partial}{\partial s}(k-K))$$

con

$$E = \int_0^1\left|\frac{\partial}{\partial s}\left(\tau b^{-1}\left(\frac{\partial k}{\partial s}\right)+(1-\tau)b^{-1}\left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)\right)\right|^{p-2}d\tau$$

$$F = \int_0^1(b^{-1})\left(\tau\frac{\partial k}{\partial s}+(1,\tau)\frac{\partial K}{\partial s}\right)d\tau.$$

Como el máximo se alcanza en $(t_0,s_0)$ y $b^{-1}$ es monótona creciente se tiene que E y F son funciones estrictamente positivas y por tanto $I(t_0,s_0)\le 0$ (vease Protter-Weimberger [1967]). Integrando respecto de t en (2.31) se concluye que

$$k(t_0,s_0)-K(t_0,s_0)\le e^{(C_1+C_2)t_0}\left(k(0,s_0)-K(0,s_0)\right))+e^{(C_1+C_2)t_0}\int_0^{t_0}e^{-(C_1+C_2)\tau}(l(\tau,s_0)-$$

$$-L(\tau,s_0))d\tau \tag{2.32}$$

y como

$$k(0,s_0)-K(0,s_0)\le\|[k_0-K_0]_+\|_{L^\infty(0,|\Omega|)}$$

$$l(\tau,s_0)-L(\tau,s_0)\le\|[l(\tau,.)-L(\tau,.)]_+\|_{L^\infty(0,|\Omega|)}$$

se obtiene la conclusión. Supongamos ahora que $s_0$ no es un punto interior. Dada las condiciones de contorno satisfechas por k y K es obvio que no puede ser $s_0=0$. Finalmente si $s_0=|\Omega|$ y suponemos que la conclusión no es cierta utilizando (2.31) ha de ser

$$I(t,s)\geq 0 \qquad \forall (t,s)\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\times(|\Omega|-\varepsilon,|\Omega|)$$

y entonces por el principio fuerte del máximo de Hopf (Protter-Weimberger [1967] Theorem 7) se debe cumplir

$$k_s(t_0,|\Omega|)-K_s(t_0,|\Omega|)>0,$$

lo que es una contradicción.

La regularidad $k\in C^{1,2}_{t,s}((0,T]\times(0,|\Omega|)$ es, demasiado fuerte pues no siempre es verificada, incluso si suponemos $u,b(u)\in C^{\infty}(Q)$. Sin embargo es posible dar un sentido correcto a las anteriores manipulaciones mediante el uso de técnicas finas de la teoría de operadores no lineales en $L^{\infty}$. Comencemos observando que en esta etapa podemos suponer u suficientemente regular, p.e. $u,b(u)\in C^2_x$. En ese caso

$\tilde{u}(t,.)\in W^{2,\infty}(0,|\Omega|)$ , $b(\tilde{u}(.,s))\in W^{1,\infty}((0,T))$ [pues se supone $b'>0$]

y por tanto

$$k(.,s)\in W^{2,\infty}(0,T) \ , \ b^{-1}(k_s(t,.))\in W^{2,\infty}(0,|\Omega|).$$

Analogamente, por el Teorema 1.2 de Mossino-Rakotoson [1986] se tiene que

$$k_t\in L^{\infty}(0,T;L^{\infty}(0,|\Omega|)).$$

Por idénticas razones K goza de la misma regularidad (e incluso más regularidad dado que $U^*=U$). Utilizaremos ahora un argumento similar al del Lemma 1 de G. Diaz-J.I. Diaz [1979]. Se denota por

$$\tau(z,y)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^{-1}(\|z+\varepsilon y\|_{L^{\infty}}-\|y\|_{L^{\infty}}) \quad , \quad z,y\in L^{\infty}$$

el producto semi-interior en $L^{\infty}(0,|\Omega|)$. Por un resultado de Sato [1968] se sabe que

$$\tau(z,y)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\text{ess sup }\{(\text{sign } z(s))y(s) \ : \ s\in J(z\varepsilon)\}$$

siendo

$$J(z,\varepsilon)=\{s\in(0,|\Omega|) \ : \ |z(s)|>\|z\|_{L^{\infty}}-\varepsilon\}.$$

Supongamos que

$$z(t,s):=[K(t,s)-K(t,s)]_+>0 \tag{2.33}$$

pues en otro caso es trivial. Utilizando el principio del máximo de Bony

(Bony [1967], Krylov [1987]), aplicable pues $b^{-1}(k_s)\in W^{2,\infty}$ se obtiene que

$$\tau(z(t,.);\ I(t,s))\ge 0.$$

Multiplicando, por medio de $\tau$, en (2.30) por $z(t,.)$ se concluye que

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{-(C_1+C_2)t}(k-K)-e^{-(C_1+C_2)t}(l-L)) \le 0$$

para casi todo $t\in(0,T)$ y para casi todo $s\in J(z(t,.),\varepsilon)$. Integrando con respecto a t se obtiene (2.32) donde ahora $s_0$ varia en $J(z(t_0,.),\varepsilon)$, salvo un conjunto de medida nula y con $t_0$ es arbitrario verificando (2.33). Haciendo finalmente $\varepsilon\to 0$ se obtiene la conclusión

Etapa (ii). Aproximemos los datos b, B, f y $u_0$ por $b_n$, $B_n$, $f_n$, $u_{0,n}$ de manera que se tengan las siguientes propiedades: a) $b_n$ y $(b_n)^{-1}$ son Lipschitz-continuas, estrictamente crecientes, $b_n(0)=0$ y $b_n\to b$ uniformemente; b) $B_n$ y $B_n(.,.,b_n^{-1}(.))$ son Lipschitz continuas y se tiene

$$B_n(t,x,u)u\ge g_n(u)u$$

$$gb_n^{-1}=\varphi_{1,n}+\varphi_{2,n} \quad , \ \varphi_{1,n}\in C^2 \text{ convexa, } \varphi_{2,n}\in C^2 \text{ cóncava}$$

y tales que $B_n\to B$, $g_n\to g$ uniformemente $\varphi_{1n}\to\varphi_1$ y $\varphi_{2,n}\to\varphi$ en $C^2$; c) $f_n\in C^1(Q)$, $f_n\to f$ en $L^{p'}(0,T:W^{-1,p'}(\Omega))$; d) $u_{0,n}\in C^2(\Omega)$, $u_{0,n}\to u_0$ en $W^{1,p}(\Omega)$; y e) si $u_n$ es la solución correspondiente a la etapa aproximada entonces $u_n\ge 0$ en Q. En las condiciones anteriores, se tiene que la solución $u_n$ satisface que

$$b_n(u_n)_t\in L^2(0,T:L^2(\Omega))$$

(Una demostración de este hecho se puede encontrar en el Teorema 6 de Diaz-de Thelin [1991]. Aunque allí se supone $B\equiv 0$ el resultado es fácilmente extendible al caso $B\not\equiv 0$. Vease también Tsutsumi [1987]). Por los resultados de la etapa anterior se obtiene la existencia de una constante C (independiente de n) tal que

$$\|[k_n(t,.)-K_n(t,.)]_+\|_{L^\infty(0,|\Omega|)} \le e^{Ct}\|[k_n(0,.)-K_n(0,.)]_+\|_{L^\infty(0,|\Omega|)} +$$

$$+\int_0^t e^{C(t-\tau)}\|[l_n(\tau,.)-L_n(\tau,.)]_+\|_{L^\infty(0,|\Omega|)}d\tau . \qquad (2.34)$$

Por otra parte, cuando $n\to+\infty$ se tiene que $b_n(u_n)\to b(u)$ en $L^r((0,T)\times\Omega))$ para todo $1\le r\le+\infty$, con u solución débil del problema (P) de partida (vease Diaz-de Thelin [1991], Theorem 5). En consecuencia $k_n\to k$ en $L^r(0,T:W^{1,r}(0,|\Omega|))$ para todo $1\le r\le+\infty$. De manera análoga $K_n\to K$ en el mismo espacio. Aplicando finalmente el teorema de convergencia dominada de Lebesgue se obtiene la conclusión pasando al límite en (2.34).$\square$

En el caso particular de p=2 y $gb^{-1}(u)=Cu$ para $C\in\mathbb{R}$ se obtiene una desigualdad muy semejante a la del Teorema 1 reeemplazando $L^\infty(0,|\Omega|)$ por el espacio con peso $L^r((0,|\Omega|):a(s)^{1/r})$, con a(s) dado por (2.17).

**Teorema 2.**

*Supongamos las hipótesis del Teorema 1 y además* $\varphi_1\equiv 0$ *y* p=2. *Entonces para todo* $t\in[0,T]$ *y* $r\in[1,+\infty]$ *se tiene*

$$\left\|\frac{1}{a(.)}[k(t,.)-K(t,.)]_+\right\|_{L^r(0,|\Omega|)}\le e^{Ct}\left\|\frac{1}{a(.)}(k(0,.)-K(0,.)]_+\right\|_{L^r(0,|\Omega|)}+$$

$$+\int_0^t e^{C(t-\tau)}\left\|\frac{1}{a(.)}[l(\tau,.)-L(\tau,.)]_+\right\|_{L^r(0,|\Omega|)}d\tau . \qquad (2.35)$$

**Demostración.** Como antes basta razonar para el caso de soluciones y datos regulares. Dado que p=2, (2.30) equivale ahora a

$$\frac{\partial k}{\partial t}-\frac{\partial K}{\partial t}-a(s)\left(\frac{\partial}{\partial s}b^{-1}\left(\frac{\partial k}{\partial s}\right)-\frac{\partial}{\partial s}b^{-1}\left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)\right)\le C_1|k-K|+l-L ,$$

es decir

$$\frac{1}{a(s)}\frac{\partial}{\partial t}(k-K)-\left(\frac{\partial}{\partial s}b^{-1}\left(\frac{\partial k}{\partial s}\right)-\frac{\partial}{\partial s}b^{-1}\left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)\right)\le\frac{C_1}{a(s)}|k-K|+\frac{1}{a(s)}(l-L).$$

Demostremos el resultado primeramente para r=2. Multiplicamos la anterior desigualdad por $(k-K)_+$ e integramos respecto a s, para t fijo. Se tiene que

$$-\int_0^{|\Omega|}\left(\frac{\partial}{\partial s}b^{-1}\left(\frac{\partial k}{\partial s}\right)-\frac{\partial}{\partial s}b^{-1}\left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)\right)\left(k-K\right)_+ds=$$

$$\int_{[k\ge K]}\left[b^{-1}\left(\frac{\partial k}{\partial s}\right)-b^{-1}\left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)\right]\left(\frac{\partial k}{\partial s}-\frac{\partial K}{\partial s}\right)ds\ge 0 ,$$

dado que $(k-K)_+(t,0)=0$, $k_s(t,|\Omega|)=K_s(t,|\Omega|)$ y $b^{-1}$ es una función creciente. Por lo tanto como

$$\int_0^{|\Omega|}\frac{1}{a(s)}\left(\frac{\partial}{\partial t}(k-K)\right)(k-K)_+ds=\frac{d}{dt}\int_0^{|\Omega|}\frac{1}{a(s)}(k-K)_+^2ds,$$

$$\int_0^{|\Omega|}\frac{1}{a(s)}|k-K|(k-K)_+ds = \int_{[k\geq K]}\frac{1}{a(s)}(k-K)^2ds = \int_0^{|\Omega|}\frac{1}{a(s)}(k-K)_+^2ds,$$

y

$$\int_0^{|\Omega|}\frac{1}{a(s)}(l-L)(k-K)ds \leq \int_0^{|\Omega|}\left(\frac{1}{\sqrt{a(s)}}(l-L)_+\frac{1}{\sqrt{a(s)}}(k-K)_+\right)ds\leq$$

$$\leq \left\|\frac{1}{a(s)}(l-L)_+\right\|_{L^2(0,|\Omega|)}\left\|\frac{1}{a(s)}(k-K)_+\right\|_{L^2(0,|\Omega|)}$$

se concluye que

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-C_1t}\left\|\frac{1}{a(s)}(k-K)_+\right\|^2_{L^2(0,|\Omega|)}\right)\leq e^{-C_1t}\left\|\frac{1}{a(s)}(l-L)_+\right\|^2_{L^2(0,|\Omega|)}\left\|\frac{1}{a(s)}(k-K)_+\right\|_{L^2(0,|\Omega}$$

Integrando entre 0 y t y aplicando la desigualdad de Hölder se obtiene

$$\left\|\frac{1}{a(s)}(k(t,.)-K(t,.))_+\right\|^2_{L^2(0,|\Omega|)}\leq e^{C_1t}\left\|\frac{1}{a(s)}[(k(0,.)-K(0,.)]_+\right\|^2_{L^2(0,|\Omega|)}+$$

$$+\int_0^t e^{C_1(t-\tau)}\left\|\frac{1}{a(s)}(l-L)_+(\tau,.)\right\|_{L^2(0,|\Omega|)}\left\|\frac{1}{a(s)}(k(\tau,.)-K(\tau,.))_+\right\|_{L^2(0,|\Omega|)}d\tau.$$

Finalmente, usando la desigualdad de Gronwall (vease Brezis [1973], Lemma A.5) se obtiene la conclusión. El caso de $r\neq2$ sigue un razonamiento similar con sólo cambiar el producto escalar de $L^2$ por el producto semi-interior de $L^r$ dado por

$$\tau_r(f,g) = \frac{1}{\|f\|^{r-1}_{L^r}}\int_0^{|\Omega|}(\mathrm{sign}f)|f|^{r-1}g$$

si $f,g\in L^r(0,|\Omega|)$ (vease, por ejemplo, Sato [1968] y Benilan [1981]). □

**Observación 1.** Las desigualdades (2.16) y (2.35) indican una cierta dependencia continua respecto de la "simetría" de los datos $u_0$ y f. Observemos que si $r=\omega_N s^N$ entonces

$$k(0,s)-K(0,s)=\int_{B_r(0)}(b(u_{0,*}(x))-b(U_0(x)))dx\ ,$$

$$L(t,s)-L(t,s)=\int_{B_r(0)}(f_*(t,x)-F(t,x))dx$$

y

$$k(t,s)-K(t,s)=\int_{B_r(0)}(b(u_*(t,x))-b(U(t,x)))dx\ .$$

La estimación (2.16) puede ser entonces interpretada en los siguientes términos: si consideramos $\Omega=\Omega^*$ y la igualdad en (2.2) y (2.4), "el máximo de la asimetría o caracter no decreciente a lo largo del radio de la solución en un instante $t>0$ no excede a una combinación de los máximos de esas características para el estado inicial (e.d., de $b(u_0)$) y para el dato $f(\tau,x)$, $\forall\tau\in(0,t)$". La desigualdad (2.35) estima las asimetrías locales en la norma $L^r$. Observemos también que en ambas desigualdades podemos suprimir el corchete de parte positiva si suponemos $\Omega=\Omega^*$, la igualdad en (2.2) y (2.4) y u radialmente simétrica y decreciente a lo largo de los radios. En ese caso se alcanza la igualdad en (2.27) y basta repetir los argumentos cambiando los papeles de k y K para concluir una estimación sobre $\|[k(t,.)-K(t,.)]_-\|$. Este tipo de conclusiones fue utilizado en Díaz (1985a) para la obtención de ciertas propiedades cualitativas en problemas estacionarios (véase Theorem 1.38 de la citada obra).

Una conclusión importante del Teorema 1 se refiere a la comparación puntual de las funciones $k(t,.)$ y $K(t,.)$ en $(0,|\Omega|)$ para cada $t\in[0,T]$ fijo:

**Corolario 1.**

*Supongamos las hipótesis del Teorema 1 así como* $k_0\le K_0$ *y* $l(t,.)\le L(t,.)$ *en* $(0,|\Omega|)$. *Entonces* $k(t,s)\le K(t,s)$ *para todo* $t\in[0,T]$ *y* $s\in[0,|\Omega|]$. □

**Demostración**

Es una consecuencia inmediata de la estimación (2.16) dado que $[k(0,.)-K(0,.)]_+=0=[l(\tau,.)-L(\tau,.)]_+$. □

El anterior resultado puede enunciarse también en términos las concentraciones de masa de u y U. Siguiendo a Hardy-Littlewood-Polya [1929] podemos introducir la siguiente relación de orden.

**Definición**: *Sean* $h\in L^1(\Omega)$ *y* $H\in L^1(\Omega^*)$. *Diremos que la masa de* h *es menos concentrada que la de* H *(y lo denotaremos por* $h\overset{*}{<}H$*) si*

$$\int_{B_r(0)} h_*(x)dx \le \int_{B_r(0)} H_*(x)dx \qquad \forall r\in[0,R],$$

*o equivalentemente, si*

$$\int_0^s \tilde{h}(\sigma)d\sigma \le \int_0^s \tilde{H}(\sigma)d\sigma \qquad \forall s\in[0,|\Omega|].$$

**Corolario 2.**

*Bajo las hipótesis del Teorema 1 se tiene que* $u_0\overset{*}{<}U_0$ *y* $f(t,.)\overset{*}{<}F(t,.)$, *casi para todo* $t\in(0,T)$, *implican que* $u(t,.)\overset{*}{<}U(t,.)$ *para todo* $t\in[0,|\Omega|]$. □

**Observación 2.** Los resultados conocidos en la literatura sobre reordenamiento simétrico de soluciones parabólicas son, todos ellos, formulados en términos del Corolario 2. De esta manera el Teorema 1 aporta una importante novedad tanto en la formulación de su conclusión como en la generalidad de sus hipótesis . El primer resultado de comparación (para ecuaciones parabólicas) se debe a Bandle [1976a] para el caso lineal y Bandle [1976b] para el caso semilineal b(u)=u, p=2 y g cóncava decreciente. En tales trabajos se suponen que las soluciones son clásicas así como que $\tilde{u}_t\in C^0$ (vease también Buonocuore [1984] para la extensión al caso de operadores lineales degenerados). El caso de soluciones débiles fué abordado en Mossino- Rokotoson [1986] mediante la noción de "reordenamiento relativo" (y sin la condición $\tilde{u}_t\in C^0$). Dicha técnica, que aquí seguimos, ha sido también aplicada a otros problemas no lineales (problema de Hele-Shaw, Gustafsson- Mossino [1987], problema de Stefan Gustafsson-Mossino [1989], Diaz-Fasano-Meirmanov [1989] y problema de obstáculo de evolución Diaz-Mossino [1987], [1991]. Vease también Rakotoson [1986]). La técnica de discretización en el tiempo y paso al límite fué primeramente utilizada, en el contexto de reordenamiento simétrico, en Vazquez [1982a], [1982b] y más tarde a otros problemas no lineales (Alvino-Lions-Trombetti, [1990]). La "fórmula de Trotter" y la reducción al caso $\Omega=R^N$ fueron utilizados en Alvino-Lions-Trombetti [1986], [1991] para concluir la comparación. En el primero de esos trabajos se considera el caso semilineal $b(u)=u$, $p=2$ y $|g|$ convexa afirmándose (Remarque 2) que la comparación deja de ser válida si $|g|$ no es convexa. Tales técnicas permiten obtener resultados similares para el reordenamiento de Steiner e.d. dejando fijas algunas variables espaciales (véase también Alvino- Diaz-Lions-Trombetti [1991]). Señalaremos, así mismo, los resultados de Bandle-Stakgold [1984a] y [1984b] en los que se considera el caso semilineal con g cóncava decreciente, extendiéndose las técnicas de Bandle al caso $\tilde{u}_t \in L^1$ para la obtención de la comparación $k(t,|\Omega|) \leq K(t,|\Omega|)$.

Otras formulaciones, involucrando otro tipo de condiciones de contorno, han sido también consideradas en la literatura. Así, en Gustafsson-Mossino [1989] se consideran condiciones de contorno similares a la de los problemas de capacidad electrostática y en Bramanti [1991] se aborda el caso de condiciones de tipo Neumann. Señalemos que es posible extender ambos trabajos (en los que el operador diferencial es lineal) al caso cuasilineal adaptando las técnicas desarrolladas en los casos elípticos correspondientes (vease Diaz [1985b] y Diaz [1990] respectivamente). Por último indicaremos que también es posible extender los resultados anteriores a una clase de operadores de difusión más generales incluyendo el operador de superfícies mínimas. Este aspecto fue desarrollado en Díaz [1990] para ecuaciones estacionarias sustituyendo el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ por el espacio de Orlicz-Sobolev $W^{1,A}(\Omega)$.

Finalizaremos esta sección centrando nuestra atención en el caso de que $\Omega$ sea una bola e.d. $\Omega=\Omega^*$. Nuestro objetivo es mostrar que la solución de (P) se hace cada vez más simétrica a medida que el tiempo t crece. Para ello nos situaremos en un marco favorable suponiendo

$$b(u)=u \tag{2.36}$$

$$A(x,u,\xi)=|\xi|^2 \quad \text{con } p\geq 2 \tag{2.37}$$

$$B(t,x,u)=g(u) \quad \text{con g contínua no-decreciente, } g(0)=0 \tag{2.38}$$

$$f\equiv F\equiv 0 \tag{2.39}$$

**Proposición 1.** *Supongamos (2.36)-(2.39) así como* $u_0 \in L^r(\Omega)$ *para algún* $r\geq 1$. *Supongamos también que*

$$p>\frac{2N}{N+r} \tag{2.40}$$

*Sea u solución de (P) y U solución de (P*) con $U_0=U_{0,*}$. Entonces existe una constante C (dependiendo sólo de $|\Omega|$ y p) tal que $\forall q\in[r,+\infty)$ se tiene que*

$$\|u(t,.)-U(t,.)\|_{L^q(\Omega)} \le Ct^{-\delta}\|u_0(.)-u_{0,*}(.)\|^{\sigma}_{L^r(\Omega)} \tag{2.40}$$

*siendo*

$$\delta = \frac{N(q-r)}{q(rp+N(p-2))}, \qquad \sigma = \frac{r(qp+N(p-2))}{q(rp+N(p-2))}$$

**Demostración.** Basta aplicar el Théorème III.4 de Veron [1979]. En efecto, si definimos el operador $A_2$ de $D(A_2)\subset L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ por

$$D(A_2)=\{w\in W_0^{1,1}(\Omega)\cap L^2(\Omega) \; : \; -\Delta pw+g(w)\in L^2(\Omega)\}$$

$$A_2w=-\Delta w+g(w) \quad \text{si } w\in D(A_2),$$

entonces se tiene que

$$A_2w=\partial j(w)+\partial j'(w)$$

siendo $j:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ y $j':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dadas por

$$j(\xi)=|\xi|^p \quad \text{y} \quad j'(u)=\int_0^u g(s)ds \qquad , \; \forall\xi\in\mathbb{R}^N, \; \forall u\in\mathbb{R}.$$

Llamando $A_r$ al cierre en $L^r(\Omega)xL^r(\Omega)$ de $A_2$ si $r\in[1,2]$ o la restricción a $L^r(\Omega)xL^r(\Omega)$ si $r>2$, se concluye que $A_r$ es un operador "m-acretive" y con $\overline{D(A_r)}=L^r(\Omega)$ (véase Attouch-Damlamian [1977]). La hipótesis $p\ge2$ conduce a la desigualdad

$$(|\hat{\xi}|^{p-2}\hat{\xi}-|\xi|^{p-2}\xi).(\hat{\xi}-\xi)\ge c|\xi-\hat{\xi}|^p$$

(véase p.e. Díaz (1985) Theorem 4.9) y por tanto el teorema de Veron (1979) puede ser aplicado obteniéndose la conclusión. □

El caso de $b(u)\ne u$ es algo más complejo por lo que supondremos las siguientes condiciones adicionales

$$b(u)=u^{1/m} \quad (\forall u\ge0) \text{ con } m\ge1 \tag{2.41}$$

$$A(x,u,\xi)=|\xi|^2 \quad , \; B\equiv g\equiv0, \quad f\equiv F\equiv0 \tag{2.42}$$

**Proposición 2.**

*Sea $u_0\in L^1(\Omega)$, $u_0\ge0$ y sean u y U soluciones de (P) y (P*) con $U_0=u_{0,*}$. Sea $r\ge1$ arbitrariamente fijo y supongamos $m>(N-r)/(N+r)$. Entonces* *existe una constante (dependiendo sólo de $|\Omega|$ y m) tal que $\forall q\in[r,+\infty)$ se tiene que*

$$\|[k(t,.)-K(t,.)]_+\|_{L^q(0,|\Omega|)} \le Ct^{-\delta}\|[k_0(.)-K_0(.)]_+\|^{\sigma}_{L^r(0,|\Omega|)} \tag{2.43}$$

*siendo*

$$\delta = \frac{N(q-r)}{q(r(m+1)+N(m-1))} \qquad \sigma = \frac{r(q(m+1)+N(m-1))}{q(r(m+1)+N(m-1))} \tag{2.44}$$

**Demostración.** Definamos el operador $A_2$ sobre el espacio con peso $L^2((0,|\Omega|):a(s)^{1/2})$ con a(s) dado por (2.17):

$$D(A_2)=\{w\in W^{1,1}((0,|\Omega|):a(s))\cap L^2(0,|\Omega|):a(s)^{1/2}):w(0)=0,\quad w'(|\Omega|)=0 \text{ y}$$

$$\Delta_{(m-1)}w\in L^2((0,|\Omega|):a(s)^{1/2})\}$$

$$A_2w=-\Delta_{(m-1)}w \quad \text{si} \quad w\in D(A_2).$$

donde ahora el operador diferencial $\Delta_{(m-1)}$ se refiere a la derivación respecto de s. Los argumentos de la anterior demostración se pueden aplicar de nuevo: en efecto, gracias a (2.18) y (2.27) estamos en una situación similar a la de la Proposición 1 reemplazando $\Omega$ por $(0,|\Omega|)$ y p por (m-1). Señalemos que el carácter subdiferencial del operador $A_2$ se mantiene pese al cambio en las condiciones de contorno (véase Attouch-Damlamian (1977)) y que la conclusión abstracta de Veron (1979) resta válida si una de las funciones es meramente subsolución y se toma la parte positiva de la diferencia. □

**Observación 2.** Fenómenos de "simetría asintótica" (cuando $t\to\infty$) han sido puesto de manifiesto, desde otro punto de vista, en Jones (1983) y Bardi (1987) [véanse también las referencias a los trabajos de Aronson-Caffarelli y Cafarelli-Vázquez-Wolanski en el citado artículo]. La "simetría asintótica" también puede ser obtenida via los teoremas de convergencia hacia soluciones de auto-similaridad (solución fundamental, "very singular solution", solución separable, etc) (véanse referencias en Kamin-Vazquez [1988], Kamin-Peletier [1986], Díaz-Liñan [1989] y Saa [1991]. Es de señalar que las Proposiciones 1 y 2 estiman esta "mejora de la simetría" con el tiempo en términos de la "asimetría inicial".

## 3. Aplicaciones

3.1. Estimaciones en norma:

La comparación en masa dada en el Corolario 1 permite obtener estimaciones "a priori" sobre la norma de b(u).

**Proposición 3.**

*Supongamos las hipótesis del Corolario 1. Entonces, para todo* $t\in[0,T]$ *y para todo* $r\in[1,+\infty]$ *se tiene que*

$$\|b(u(t,.))\|_{L^r(\Omega)} \leq \|b(U(t,.))\|_{L^r(\Omega^*)} . \qquad (3.1)$$

Para la demostración del anterior resultado necesitaremos un resultado clásico

**Lema 1** *(Hardy-Littlewood-Polya [1929)]*

*Sean* $y,z:[0,M]\to\mathbb{R}$ *funciones continuas, y no-crecientes tales que*

$$\int_0^s y(\sigma)d\sigma\leq\int_0^s z(\sigma)d\sigma \qquad \forall s\in[0,M].$$

*Sea* $\Phi$ *función real contínua, convexa no-decreciente. Entonces*

$$\int_0^s \Phi(y(\sigma))d\sigma\leq\int_0^s \Phi(z(\sigma))d\sigma \qquad \forall s\in[0,M].$$

**Observación 3.** Una extensión al caso de $\Phi$ no-decreciente solo sobre un subintervalo fué dada en Diaz [1990] (Lemma 5).

**Demostración de la Proposición 3.** Supongamos $r\in[1,\infty]$. Podemos aplicar entonces el Lema 1 a $\Phi(u)=|u|^r$, $M=|\Omega|$, $y(\sigma)=b(\tilde{u}(t,\sigma))$, $z(\sigma)=b(\tilde{U}(t,\sigma))$ y se concluye observando que

$$\int_0^{|\Omega|} b(\tilde{u}(t,\sigma))d\sigma = \int_{\Omega^*} b(u^*(t,x))dx = \int_\Omega b(u(t,x))dx .$$

El caso de $r=+\infty$ se obtiene por paso al límite en $r\to+\infty$. $\infty$

**Observación 4.** El principal interés del anterior resultado estriba en que la simetría radial de U y la simplicidad de la formulación de (P*) permiten obtener en muchos casos, estimaciones explícitas de U(t,.). Este punto de vista fué seguido en Vazquez [1982a] [1982b] quien puso de manifiesto la optimalidad de ciertas constantes en el efecto regularizante $L^1\to L^\infty$ para la ecuación de medios porosos en $\Omega=\mathbb{R}^N$: para ello, se extiende en primer lugar, a datos iniciales $b(u_0)\in L^1(\mathbb{R}^N)$ el Corolario 2 por medio de argumentos de aproximación. Posteriormente se considera $b(U_0)=M\delta$ con $M=\|b(u_0)\|_{L^1}$ y $\delta$ la delta de Dirac en el origen. Observese que se sigue manteniendo (formalmente) la desigualdad $k_0\le K_0$ pues esta equivale a

$$\int_{B(0,r)} b(u_{0,*}(x))dx \le M$$

De hecho, no es difícil ver que la Proposición 3 se mantiene para estos datos iniciales. Finalmente, U representa una solución fundamental (o solución de auto-similaridad de Barenblatt) que puede ser explicitada en algunos casos particulares: por ejemplo si $b(u)=|u|^{1/m}\text{signu}$ y $g\equiv0$. Puesto que tal solución U verifica que $\forall t>0\ U(t,.)\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, se concluye la misma propiedad para $b(u(t,.))$.

3.2. Explosión en tiempo finito (blow-up)

Cuando el término $B(t,x,u)$ tiene caracter de fuente (p.e. $B(t,x,u)=-b(u)^q$ con $q>(p-1)$) es bien conocido que existe un tiempo finito T' tal que $\|b(u(t,.))\|_{L^\infty(\Omega)}=+\infty\ \forall t\ge T'$. Más en general dado $r\in[1,+\infty]$ se define el tiempo de explosión $T_\infty$ (en $L^r$) de u, solución de (P), como el supremo de los T' para los que $\|b(u(T',.))\|_{L^r(\Omega)}<+\infty$. Se tiene

**Preposición 4.** *Bajo las hipótesis del Corolario 1 se tiene que*

$$T_{\infty,\Omega}\ge T_{\infty,\Omega^*}$$

**Demostración.** La idea consiste en aproximar B y g por $B_n$, $g_n$ de manera que $u_n$ y $U_n$ no exploten en tiempo finito y de manera que $U_n\to U$ en $L^\infty((0,T):L^\infty(\Omega))$. Aplicando la Proposición 3 reemplazando T por $T_{\infty,\Omega^*}-\varepsilon$ (para $\varepsilon\in(0,T_{\infty,\Omega^*})$ fijo) se concluye que

$$\|b(u_n(T_{\infty,\Omega^*}-\varepsilon,.))\|_{L^r(\Omega)}\le\|b(U_n(T_{\infty,\Omega^*}-\varepsilon,.))\|_{L^r(\Omega^*)}.$$

Esta desigualdad permite afirmar que $b(u)$ está definida en $(0,T_{\infty,\Omega^*}-\varepsilon)$ y $b(u_n)\to b(u)$ en $L^r$. En particular, pasando al límite en $\varepsilon\downarrow0$ se concluye que $\|b(u(T_{\infty,\Omega^*},.))\|_{L^r(\Omega)}<+\infty$ y la conclusión se obtiene de la definición de

$T_{\infty,\Omega}$. □

**Observación 5.** La conclusión de la Proposición 4 fue conjeturada inicialmente por J. Bebernes (véase Bebernes-Eberly (1989) para el caso semilineal. Una demostración para ese caso (suponiendo $u(0,x)\equiv 0$) fue dada en Bandle [1976b]. Exposiciones generales, incluyendo numerosas referencias, sobre fenómenos de explosión en tiempo finito se deben a Levin [1990], Samarskii-Galaktionov-Kurdyonov-Mikhailov [1987] y Herrero-Velázquez [1991].

3.3. Extinción en tiempo finito.

En contraste con la propiedad antes mencionada se tiene el fenómeno de "extinción en tiempo finito". Tal comportamiento es peculiar de formulaciones con términos de absorción fuerte (p.e. $B(t,x,u)=b(u)^q$ con $q>1$; vease Kalshnikov [1987], Díaz [1980b] y la exposición general de Stakgold [1986]) o bien de difusiones rápidas (p.e. $B\equiv 0$, $b(u)=u^{1/m}$, $A(x,u,\xi)=|\xi|^{p-2}$ y $m(p-1)<1$; vease p.e. G. Díaz-J.I. Díaz [1979], Antontsev-Díaz [1988] y Díaz-Liñán [1989]). La propiedad en cuestión se caracteriza por la existencia de un tiempo finito $T^{\#}$ tal que la solución u se anula en todo $\Omega$ a partir de $T^{\#}$, e.d. $\|u(t,.)\|_{L^1(\Omega)}=0$ $\forall t\geq T^{\#}$. Si definimos el tiempo de extinción $T_0$ como el mínimo de esos instantes, en virtud de las hipótesis hechas sobre b se tiene que

$$\|b(u(t,.))\|_{L^1(\Omega)}>0 \quad \text{si } t\in[0,T_0)$$

y

$$\|b(u(t,.))\|_{L^1(\Omega)}=0 \quad \text{si } t\in[0,T_0,+\infty).$$

Como consecuencia inmediata de la Proposición ~~4~~ 3 se tiene

**Corolario 3.** *Bajo las hipótesis del Corolario 1 se tiene que*

$$T_{0,\Omega}\leq T_{0,\Omega^*}\ . \quad \square$$

**Observación 6.** Bajo adecuadas condiciones es posible conectar los dos comportamientos antes mencionados para dos formulaciones distintas del problema (P) mediante un cambio de incógnitas (vease Kawohl-Peletier

[1900]).

## 3.4. Problemas con frontera libre.

A veces la anulación de la solución sólo tiene lugar en una parte del dominio $\Omega$ provocándose así, en cada instante t, una "frontera libre" (e.d. indeterminada a priori) que separa las regiones en las que u se anula de las que u es estrictamente positiva. El estudio sistemático de este tipo de fenómenos fue el objeto de la monografía Díaz [1985a] (caso de problemas estacionarios) Para fijar ideas, indiquemos que tal comportamiento aparece en fenómenos de difusión lenta (p.e. $B\equiv 0$, $b(u)=u^{1/m}$, $A(x,u,\xi)=|\xi|^{p-2}\xi$ y $m(p-1)>1$; vease Kalashnikov (1987), Díaz-Herrero [1981], Díaz-Veron [1985], Antontsev-Díaz [1988] y las referencias de estos trabajos) o bien cuando la absorción es fuerte con respecto a la difusión (si A se toma como antes, $b(u)=u$ y $B(t,x,u)=u^q$ el citado caso corresponde suponer $q<(p-1)$; vease Kalashnikov [1987], Díaz-Veron [1985], Antontsev-Díaz-Shmarev [1991]).

Veamos como la comparación en masa permite obtener estimaciones sobre el conjunto de anulación de la solución u.

**Proposición 5.**

*Supongamos las hipótesis del Corolario 1. Para* $t\in[0,T]$ *fijo denotemos*

$$N_t(u;\Omega)=\{x\in\Omega: u(t,x)=0\} \text{ y } P_t(u:\Omega)=\{x\in\Omega: u(t,x)>0\}$$

*y sean* $N_t(U;\Omega^*)$ *y* $P_t(U:\Omega^*)$ *definidos de manera análoga. Supongamos que*

$$\int_\Omega b(u(t,x))dx = \int_{\Omega^*} b(U(t,x))dx \quad , \quad \forall t\in[0,T]. \tag{3.2}$$

*Entonces*

$$|N_t(u;\Omega)|\le|N_t(U;\Omega^*)| \qquad [\text{y } |P_t(u;\Omega)|\ge|P_t(U;\Omega^*|]$$

*para todo* $t\in[0,T]$ *y además si* $|N_t(U:\Omega^*)|=0$ *entonces* $|N_t(u,\Omega)|=0$.

**Demostración.** Por el Corolario 1 se tiene que para todo $s\in[0,|\Omega|]$

$$\int_s^{|\Omega|} b(\tilde{u}(t,\sigma))d\sigma = \int_0^{|\Omega|} b(\tilde{u}(t,\sigma))d\sigma-\int_0^s b(\tilde{u}(t,\sigma))\ge\int_0^{|\Omega|} b(\tilde{U}(t,\sigma))d\sigma-\int_0^s b(\tilde{U}(t,\sigma))d\sigma$$

dado que por la hipótesis (3.2)

$$\int_0^{|\Omega|} b(\tilde{u}(t,\sigma))d\sigma = \int_\Omega b(u(t,x))dx = \int_{\Omega^*} b(U(t,x))dx = \int_0^{|\Omega|} b(\tilde{U}(t,\sigma))d\sigma.$$

Denotemos ahora soporte de $\tilde{u}(t,.)$ por $[0,R_u(t)]$ y soporte de $\tilde{U}(t,.)$ por $[0,R_U(t)]$. De la desigualdad obtenida se deduce claramente que $R_u(t) \geq R_U(t)$ dado que ha ser

$$\int_{R_u}^{|\Omega|} b(\tilde{U}(t,\sigma))d\sigma = 0$$

y como $b(\tilde{U}(t,.))$ es no creciente y no negativa se concluye que $\tilde{U}(t,\sigma)=0$ en $[R_u, |\Omega|]$. Finalmente si $R_U(t)=|\Omega|$ obtenemos que $R_u(t)=|\Omega|$ concluyéndose el resultado. $\square$

La hipótesis (3.2) se verifica bajo distinto tipo de condiciones.

(a) *Conservación de la masa en* (P) *y* (P*): Si se supone que

$$\int_\Omega b(u(t,x))dx = \int_\Omega b(u_0(x))dx \quad \text{y} \quad \int_{\Omega^*} b(U(t,x))dx = \int_{\Omega^*} b(U_0(x))dx \qquad (3.3)$$

y $U_0=u_{0,*}$, entonces la comprobación de (3.2) se reduce a la identidad

$$\int_\Omega b(u_0(x))dx = \int_{\Omega^*} b(u_{0,*}(x))dx$$

que se obtiene trivialmente de la definición de reordenamiento simétrico. Señalemos, por último, que la ~~cos~~ n ervación de la masa es típica de fenómenos sin absorción, $B \equiv g \equiv 0$.

(b) *Derivada nula de* u *en el borde*: El siguiente resultado muestra que añadiendo ciertas hipótesis adicionales se puede concluir (3.2) incluso con términos de absorción no nulos.

**Lema 2.**

*Supongamos las hipótesis del Corolario 1 así como las siguientes condiciones*

$$U_0=u_{0,*} \text{ en } \Omega^* \quad , \quad F=f_* \text{ en } (0,T)\times\Omega^* ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{en } (0,T)\times\partial\Omega \qquad (3.4)$$

$B(t,x,u)=g(u)$ *con* $gb^{-1}$ *función convexa no-decreciente* (3.5)

*Entonces se verifica la identidad (3.2).*

**Demostración**. Por el teorema de la divergencia se tiene que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega b(u(t,x))dx + \int_\Omega B(t,x,u(t,x))dx = \int_\Omega f(t,x)dx + \int_\Omega \operatorname{div}A(x,u,\nabla u)dx =$$

$$= \int_\Omega f(t,x)dx + \int_{\partial\Omega} A(x,u,\nabla u)ds = \int_\Omega f(t,x)dx = \int_\Omega F(t,x)dx =$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega^*} b(U(t,x))dx - \int_{\Omega^*} \operatorname{div}(|\nabla U|^{p-2}\nabla U)dx + \int_{\Omega^*} g(U(t,x))dx$$

$$\geq \frac{d}{dt}\int_{\Omega^*} b(U(t,x)) + \int_{\Omega^*} g(U(t,x))dx \ ,$$

dado que al ser $U\geq 0$ y $U=0$ en $(0,T)\times\partial\Omega^*$ se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial n} \leq 0 \quad \text{en } (0,T)\times\partial\Omega^*$$

y basta de nuevo aplicar el teorema de la divergencia. En conclusión, integrando en t

$$\int_\Omega b(u(t,x))dx - \int_{\Omega^*} b(U(t,x))dx \geq \int_0^t\int_{\Omega^*} g(U(t,x))dx - \int_0^t\int_\Omega B(t,x,u)dx$$

Por otra parte, por hipótesis la función $\Phi(u)=gob^{-1}$ verifica las hipótesis del Lema 1 concluyéndose, a partir del Corolario 1, que

$$\int_0^s g(\tilde{u}(b,\sigma))d\sigma \leq \int_0^s g(\tilde{U}(t,\sigma))d\sigma$$

para todo $t\in[0,T]$ y $s\in[0,|\Omega|]$. En particular

$$\int_\Omega g(u(t,x))dx = \int_0^{|\Omega|} g(\tilde{u}(t,\sigma))d\sigma \leq \int_0^{|\Omega|} g(\tilde{U}(t,\sigma))d\sigma = \int_{\Omega^*} g(U(t,x)dx$$

y por tanto

$$\int_\Omega b(u(t,x))dx \geq \int_{\Omega^*} b(U(t,x)dx \ .$$

Aplicando, de nuevo, el Corolario 1 con $s=|\Omega|$ se obtiene (3.2). □

**Observación 7**. La hipótesis (3.4) se verifica trivialmente si se supone que el soporte de $u(t,.)$ está estrictamente contenido en $\Omega$ $\forall t\in[0,T]$. Nótese también que la presencia de los términos f y g(u) impide, esta vez, la conservación de la masa (3.3).

**Observación 8.** La conclusión de la Proposición 5 permite mostrar la imposibilidad de la comparación puntual $u^*\leq U$ que sin embargo se tiene para los problemas estacionarios sin perturbaciones (B=g=0). En efecto, la Proposición 3 implica que $\max\tilde{u}(t,.)\leq\max\tilde{U}(t,.)$ y como por la Proposición 5 el soporte de $\tilde{u}(t,.)$ contiene al de $\tilde{U}(t,.)$ se obtiene una contradicción (salvo el caso excepcional en el que los soportes de $\tilde{u}$ y $\tilde{U}$ coincidan).

Es interesante resaltar que la conclusión de la Proposición 4 se mantiene incluso para problemas con condiciones de contorno no homogéneas en los que la región de anulación se localiza en el interior ("dead core" problems) en vez de en el contorno. Consideremos el problema

$$(P_1)\quad\begin{cases} b(u)_t-\operatorname{div}A(x,u,\nabla u)+g(u)=0 & \text{en } Q\\ u=h & \text{en } \Sigma\\ b(u(0,x))=b(u_0(x)) & \text{en } \Omega\ , \end{cases}$$

con h>0 constante real. El problema simetrizado corresponde a

$$(P_1^*)\quad\begin{cases} b(U)_t-\Delta_p U+g(U)=0 & \text{en } Q^*\\ U=h & \text{en } \Sigma^*\\ b(U(0,x))=b(U_0(x)) & \text{en } \Omega^*\ . \end{cases}$$

**Proposición 6.** *Supongamos las hipótesis del Corolario 1 pero ahora con $U_0$ función radialmente simétrica no-decreciente a lo largo de los radios y tal que*

$$\int_{B_r(0)} b(u_{0,*}(x))dx \geq \int_{B_r(0)} b(U_{0,*}(x))dx \qquad \forall r\in[0,R]. \tag{3.6}$$

*Además suponemos que*

$$0\leq u_0\leq h\ ,\ \ 0\leq U_0\leq h \tag{3.7}$$

*Entonces*

$$\int_{B_r(0)} b(u_*(t,x))dx \geq \int_{B_r(0)} b(U(t,x))dx \qquad \forall r\in[0,R].$$

*Además,* $U(t,.)>0$ *en* $\Omega^*$ *implica que* $u(t,.)>0$ *en* $\Omega$ *y en general*

$$|N_t(u;\Omega)|\leq|N_t(U;\Omega)|\ . \tag{3.8}$$

**Demostración**. Adaptaremos la demostración de Diaz [1985a] al caso parabólico. Comenzamos homogeneizando la condición de contorno, para lo que introducimos

$$v(t,x)=h-u(t,x), \quad V(t,x)=h-U(t,x).$$

Por la hipótesis (3.7) y el principio del máximo se tiene que $0\le v\le h$ y $0\le V\le h$. Además

$$(P_h)\quad \begin{cases} b_n(v)_t-\operatorname{div}A(x,v,\nabla v)+g_h(v)=g(h) & \text{en } Q \\ v=0 & \text{en } \Sigma \\ b_h(v(0,x))=b_n(v_0(x)) & \text{en } \Omega\ , \end{cases}$$

siendo

$$g_n(v)=g(h)-g(h-v)$$
$$b_n(v)=b(h)-b(h-v)$$
$$A_h(x,v,\nabla v)=A(x,h-v,-\nabla v).$$

Análogamente V satisface

$$(P_h^*)\quad \begin{cases} b_h(V)_t-\operatorname{div}(|V|^{p-2}\nabla V)+g_h(V)=g(h) & \text{en } Q^* \\ V=0 & \text{en } \Sigma^* \\ b_n(V(0,x))=b_n(V_0(x)) & \text{en } \Omega^*\ . \end{cases}$$

donde

$$V_0(x)=h-U_0(x)$$

Es claro que se tiene que $b_n(0)=0$, $B_h(t,x,0)=0$, $g_h(0)=0$, $A_h$ satisface (2.1) y (2.2) y (trivialmente) (2.4). La hipótesis (3.6) implica que

$$\int_0^s b_h(\tilde{v}_0(\sigma))d\sigma \le \int_0^s b_h(\tilde{V}_0(\sigma))d\sigma \qquad \forall s\in[0,|\Omega|]$$

y por tanto podemos aplicar el Corolario 1, lo que asegura que

$$\int_0^s b_h(\tilde{v}(t,\sigma))d\sigma \le \int_0^s b_h(\tilde{V}(t,\sigma))d\sigma\ .$$

Supongamos ahora que $U(t,.)>0$ en $\Omega^*$. En ese caso $0\le b_h(V)=b(h)-b(U)<b(h)$ y por la Proposición 3 concluimos que

$$\|b_h(v)\|_{L^\infty(\Omega)}\le\|b_h(V)\|<b(h)\ ,$$

es decir, necesariamente $u>0$ en $\Omega$ pues b es estrictamente creciente y

$$\max b_h(v) = b(h)-\min b(u)<b(h).$$

Finalmente, para demostrar (3.8) se fija $\varepsilon>0$ y se utiliza el Lema 1 con $\Phi_\varepsilon(r)$ convexa creciente tal que $\Phi_\varepsilon(r)=0$ si $0\le r\le b(h)-\varepsilon$ y $\Phi_\varepsilon(b(h))=1$. Se concluye pasando al límite cuando $\varepsilon\to 0$. □

**Observación 9.** La Proposición 6 extiende un resultado previo debido a Bandle-Stakgold [1984a]. Señalémos también que la estimación (3.8) puede ser aplicada para comparar los "tiempos de espera" sobre $\Omega$ y sobre $\Omega^*$ (referencias sobre este tipo de fenómenos pueden verse en Alvarez-Díaz (1991) y Antontsev-Díaz (1988)).

**4. Sistemas de tipo reacción-difusión.**

En esta sección nos ocuparemos de la extensión de los resultados de comparación en masa al caso de sistemas de reacción-difusión. Con el fin de simplificar la exposición trabajaremos con la siguiente formulación que aunque no es la más general que podemos considerar contiene, sin embargo, los principales elementos de nuestro análisis:

$$(RD)\quad \begin{cases} u_t-\mathrm{div}A_1(x,u,\nabla u)+R_1(u,v)=0 & \text{en } Q \\ v_t-\mathrm{div}A_2(x,v,\nabla v)+R_2(u,v)=0 & \text{en } Q \\ u=v=0 & \text{en } \Sigma \\ u(0,x)=u_0(x),\ \ v(0,x)=v_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde $A_1$ y $A_2$ son funciones de Caratheodory satisfaciendo

$$|A_i(x,\eta,\xi)|\le C(|\eta|^{p_i-1}+|\xi|^{p_i-1})$$

$$A_i(x,\eta,\xi).\xi\ge|\xi|^{p_i}$$

para ciertos $p_i\in(1,\infty)$, $i=1,2$. Supondremos también

$$u_0\in L^\infty(\Omega)\cap W^{1,p_1}(\Omega),\ \ v_0\in L^\infty(\Omega)\cap W^{1,p_2}(\Omega),\ \ u_0\ge0,\ \ v_0\ge0 \text{ en } \Omega.$$

La unicidad de soluciones de (RD) será asimismo supuesta con el fin d simplificar los enunciados. Obviamente esto exige ciertas hipótesis sobr $R_i$ (p.e. $R_i$ globalmente Lipschitz Pao [1980], $R_1=\pm\mu R_2$ para algún $\mu>0$; Díaz Stakgold [1990], etc).

El problema simetrizado se formula en los siguientes términos

$$(RD^*)\quad \begin{cases} U_t-\Delta_{p_1}U+R_1(U,V)=0 & \text{en } Q^*=(0,T)\times\Omega^* \\ V_t-\Delta_{p_2}V+R_2(U,V)=0 & \text{en } Q^* \\ U=V=0 & \text{en } \Sigma^* \\ U(0,x)=U_0(x),\ \ V(0,x)=V_0(x) & \text{en } \Omega^*, \end{cases}$$

con $U_0$ y $V_0$ funciones radialmente simétricas, decrecientes a lo largo de radio y tales que

$$U_0\in L^\infty(\Omega^*)\cap W^{1,p_1}(\Omega^*),\ \ V_0\in L^\infty(\Omega^*)\cap W^{1,p_2}(\Omega^*),\ \ U_0\ge0,\ \ V_0\ge0 \text{ en } \Omega^*.$$

Al igual que en la Sección 2, requeriremos hipótesis adicionale sobre las funciones $R_i$. Una cómoda situación se presenta cuando se puede expresar

$$R_i(u,v)=f_i(u)+g_i(v) \qquad i=1,2 \tag{4.1}$$

con

$$f_i(0)=g_i(0)=0 \tag{4.2}$$

$$f_1 \text{ y } g_2 \text{ suma de funciones cóncavas y convexas} \tag{4.3}$$

$$f_2 \text{ y } g_1 \text{ cóncavas no crecientes.} \tag{4.4}$$

**Teorema 3.**

*Supongamos* $u_0 \overset{*}{<} U_0$ *y* $v_0 \overset{*}{<} V_0$ *entonces para todo* $t\in[0,T]$ *se tiene que* $u(t,.)\overset{*}{<}U(t,.)$ *y* $v(t,.)\overset{*}{<}V(t,.)$.

**Demostración.** Es bien conocido (vease p.e. Pao [1980], Diaz-Stakgold [1990]) que el proceso iterativo

$$u^n_t-\mathrm{div}A_1(x,u^n,\nabla u^n)+f_1(u^n)=-g_1(v^{n-1})$$

$$v^n_t-\mathrm{div}A_2(x,v^n,\nabla v^n)+g_2(v^n)=-f_2(u^{n-1})$$

(con las mismas condiciones de contorno e iniciales que (RD)) converge, cuando $n\to\infty$ a la solución $(u,v)$ del problema, supuesto que en la iteración de partida se toman $(u^0,v^0)$ como super o subsoluciones del problema, e.d. tales que verifican el sistema (RD) pero reemplazando los símbolos de igualdad por los de $\geq$ o $\leq$ respectivamente. De hecho $u^n\nearrow u$ y $v^n\nearrow v$ o bien $u^n\searrow$ y $v^n\searrow v$ según que $(u^0,\ v^0)$ sea una sub ó supersolución del problema. De manera análoga se considera la cadena de problemas simetrizados

$$U^n_t-\Delta_{p_1}U^n+f_1(U^n)=-g_1(V^{n-1})$$

$$V^n_t-\Delta_{p_2}V^n+g_2(V^n)=-f_2(U^{n-1})$$

con las condiciones de contorno e iniciales de (RD*). Como $(U^0,\ V^0)=(0,0)$ es una subsolución de nuevo $U^n\nearrow U$ y $V^n\nearrow V$ cuando $n\to+\infty$.

Consideremos primero $n=1$. Del Corolario 2 concluimos que

$$u^1(t,.)\overset{*}{<}U^1(t,.) \qquad \text{y} \qquad v^1(t,.)\overset{*}{<}V^1(t,.).$$

Además por (4.4) y el Lema 1 se tiene que

$$-g_1(v^1)\overset{*}{<}-g_1(V^1) \qquad \text{y} \qquad -f_2(u^1)\overset{*}{<}-f_2(U^1).$$

Por tanto, estamos en condiciones de aplicar de nuevo el Corolario 2 para deducir que

$$u^2(t,.)\overset{*}{<}U^2(t,.) \quad \text{y} \quad v^n(t,.)\overset{*}{<}V^n(t,.)$$

para todo $n\in\mathbb{N}$. La conclusión se tiene entonces pasando al límite cuando $n\to+\infty$. □

Un problema concreto, de relevancia en Ingeniería Química, en el que se tiene la anterior conclusión es el denominado <u>problema de adsorción</u> (Costa (1985), Van Duijn-Knaber (1990)) y que se puede enunciar en términos sencillos como

$$(\mathrm{Ad})\begin{cases} u_t+v_t-\Delta u=0 & \text{en } Q \\ v_t+v=\psi(u) & \text{en } Q \\ u=0 & \text{en } \Sigma \\ u(0,x)=u_0(x) & \text{en } \Omega \\ v(0,x)=v_0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

siendo $\psi$ una función contínua creciente con $\psi(0)=0$. Si se introduce el problema simetrizado de manera análoga a ocasiones anteriores podemos concluir

**Corolario 3.**

*En el supuesto de que $\psi$ sea convexa y no-decreciente la conclusión del Teorema 3 se mantiene para las soluciones* $(u,v)$ *y* $(U,V)$ *del problema* (Ad) *y su simetrizado*

<u>Demostración</u>. Basta observar que $(u,v)=\lim_{\varepsilon\to 0}(u^\varepsilon,v^\varepsilon)$ con $(u^\varepsilon,v^\varepsilon)$ solución del sistema

$$(\mathrm{Ad})_\varepsilon\begin{cases} u^\varepsilon_t-\Delta u^\varepsilon+\psi(u^\varepsilon)-v^\varepsilon=0 & \text{en } Q \\ v^\varepsilon_t-\varepsilon\Delta v^\varepsilon-\psi(u^\varepsilon)+v^\varepsilon=0 & \text{en } Q \\ u^\varepsilon=u^\varepsilon=0 & \text{en } \Sigma \\ u^\varepsilon(0,x)=u_0(x),\ \ v^\varepsilon(0,x)=v_0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

En efecto, por el principio del máximo se obtiene que

$$0\le\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(Q)}\le C_1 \quad , \quad 0\le\|v_\varepsilon\|_{L^\infty(Q)}\le C_2$$

con $C_1$ y $C_2$ independiente de $\varepsilon$. Además multiplicando la primera ecuación por $u_\varepsilon$ y la segunda por $v_\varepsilon$, se obtiene, tras integrar por partes que

$$\int_0^T\int_\Omega |\nabla u^\varepsilon|^2 dxdt \le C_3 \quad , \quad \varepsilon\int_0^T\int |\nabla v^\varepsilon|^2 dxdt \le C_4$$

y por la linealidad en $v^\varepsilon$ de la segunda ecuación podemos pasar al límite. Finalmente, basta observar que el Teorema 3 puede ser aplicado a $f_1(u)=\psi(u)$, $f_2(u)=-\psi(u)$, $g_1(v)=-v$ y $g_2(v)=v$ de lo que se concluye que

$$u^{\varepsilon} \overset{*}{<} U^{\varepsilon} \quad \text{y} \quad v^{\varepsilon} \overset{*}{<} V^{\varepsilon}.$$

El resultado se obtiene así tras paso al límite cuando $\varepsilon \to 0$. □

Alvarez, L. y Díaz, J.I. (1991): On the initial growth of interfaces in reaction-diffusion equations with strong absorption. Manuscrito.

Abourjaily, C. y Benilan, Ph. (1989). Manuscrito.

Antontsev, S.N. y Díaz, J.I. (1988): New results on space and time localization of solutions of nonlinear elliptic or parabolic equations via energy methods. Soviet Math. Dokl. 203, 524-528 (En ruso). Traducción al inglés en Soviet Math. Dokl 38. (1989) 535-539.

Antontsev, S.N., Díaz, J.I. y Shmarev, S.I. (1991): New applications of energy methods to parabolic free boundary problems. Aparecerá en Russian Mathematical Surveys: Volúmen dedicado a la Conferencia en honor de I.G. Petrovsky. Mayo 1991.

Alvino, A., Lions, P.L. y Trombetti, G. (1986): Comparison des solutions d'équations paraboliques et elliptiques par symétrisation. C.R. Acad. Scien. Paris 303, 975-978.

Alvino, A., Lions, P.L. y Trombetti, G. (1990): Comparison results for elliptic and parabolic equations via Schwarz symmetrization. Ann. Inst. Henri Poincaré, 7, 37-65.

Alvino, A., Lions, P.L., y Trombetti, G (1991): Comparison results for elliptic and parabolic equations via symmetrization: a new approach. Diff. and Integral Equs. 4, 25-50.

Alvino, A., Díaz, J.I., Lions, P.L. y Trombetti, G. (1991): Artículo en preparación.

Attouch, H. y Damlamian, A. (1977): Application des méthodes de convexité et monotonie à l'etude de certains équations quasilineaires. Proc. Royal Soc. Edinburgh 79A, 107-129.

Alt, H.W. y Luckhaus, S. (1983): Quasilinear Elliptic-Parabolic Differ. Equations, Math. Z. 183, 311-341.

Bandle, C. (1976a): On symmetrizations in parabolic equations. J. d'Analyse Math. 30, 98-112.

Bandle, C. (1976b): Isoperimetric Inequalities for a Class of Nonlinear Parabolic Equations, ZAMP 27, 377-384.

Bandle, C. y Stakgold, I. (1984a): The formation of the dead core in parabolic reaction-diffusion equations. Trans. Amer. Math. Soc. 286, 275-293.

Bandle, C. y Stakgold, I. (1984b): Isoperimetric Inequality for the Effectiveness in Semilinear Parabolic Problems, International Series of Numerical Mathematics, Vol. 71, 289-295.

Bardy, M. (1987): Asymptotic Spherical Symmetry of the Free Boundary in Degenerate Diffusion Equations, Ann. di Matem. Pura e Applic. 117-129.

Bebernes, J. y Eberly, D. (1989): *Mathematical Problems from Combustion Theory*. Springer-Verlag.

Benilan, Ph. (1981): *Evolution equations and accretive operators.* Lecture Notes, Univ. of Kentucky.

Bernis, F. (1988): Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains. Math. Annalen, 279, 373-394.

Blanchard, D. y Francfort, G. (1988): Study of a doubly nonlinear heat equation with no growth assumptions on the parabolic term, SIAM J. Math. Anal. 19, 1032-1056.

Blanchard, D. y Francfort, G. (1989): A few results on degenerate parabolic equations. Preprint.

Bony, J.M. (1967): Principe du maximum dans les espaces de Sobolev. C.R. Acad. Sci. paris, 265, 333-336.

Bramanti, M. (1991): Symmetrization in Parabolic Neumann Problems, Applicable Analysis, 90.

Brezis, H. (1973): *Operateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert.* North-Holland.

Buonocuore, P. (1984). Sulla simmetrizzazione in equazioni paraboliche degeneri, Boll. Unione Mat. Ital. VI. Ser. B3 767-778.

Costa Novella, E. (1985): *Ingeniería Química.* Alhambra Universidad.

Díaz, G. y Díaz, J.I. (1979): Finite extinction time for a class of nonlinear parabolic equations. Comm. in Partial Diff. Equations. 4, 1213-1231.

Díaz, J.I. (1980a): Anulación de soluciones para operadores acretivos en espacios de Banach. Rev. Real Acad. Ciencias, Madrid, LXXIV, 865-880.

Díaz, J.I. (1980b): *Propiedades cualitativas de ciertos problemas parabólicos no lineales: Una clasificación para los modelos de difusión del calor.* Memoria de la Real Academia de Ciencias, Madrid, Tomo XIV.

Díaz, J.I. (1985a): Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundaries. Vol. 1. Elliptic Equations. Pitman, London.

Díaz, J.I. (1985b): Applications of symmetric rearrangement to certain nonlinear elliptic equations with a free boundary. In Nonlinear Differential Equations, J. Hale and P. Martínez (eds), 155-181.

Díaz, J.I. (1986): Elliptic and parabolic quasilinear equations givin rise to a free boundary: the boundary of the support of the solution. En *Nonlinear functional analysis and applications*. Editor F.E. Browder. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 45, Part 1, 381-393.

Díaz, J.I. (1989): Problemas estáticos con frontera libre en Mecánica de medios contínuos. Revista de la Real Academia de Ciencias. Madrid. Tomo 83, 119-122.

Díaz, J.I. (1990): Desigualdades de tipo isoperimétrico para problemas de Plateau y Capilaridad. Aparecerá en Revista Academia Canaria de Ciencias.

Díaz, J.I. (1991): Symmetrization of nonlinear elliptic and parabolic problems and applications: a particular overview. Aparecerá en Logman. Actas de la European Conference on Elliptic and Parabolic problems, Pont à Mousson (Francia), Junio, 1991.

Díaz, J.I. y Hernández, J. (1984a): On the existence of a free boundary for a class of reaction-diffusion systems, SIAM J. Math. Anal. 5, 670-685.

Díaz, J.I. y Hernández, J. (1984b): Somer results on the existence of free boundaries for parabolic reaction-diffusion systems. En *Trends in theory and practice of Nonlinear differential equations*. Editor V. Lakshmikantham. Marcel Dekker, 149-156.

Díaz, J.I. y Herrero, M.A. (1981): Estimates on the support of the solutions of some nonlinear elliptic and parabolic problems. Proc. Royal Soc. Edinburgh 89A, 249-258.

Díaz, J.I. y Liñan, A. (1989): Movimiento de descarga de gases en conductos largos: modelización y estudio de una ecuación doblemente no lineal. En *Actas de la Reunión en honor de A. Dou*. Editores J.I. Díaz y J.M. Vegas, Ed. Univ. Complutense, 95-119.

Díaz, J.I., Fasano, A. y Meirmanov, A. (1989): On the disappearance of the mushy region in multidimensional Stefan Problems. Aparecerá en Free

Boundary Problems: Theory and Applications. Pitman, Actas del Congreso celebrado en Montreal, Junio 1989.

Díaz, J.I. y Mossino, J. (1987): Inegalité isoperimetrique dans un probléme d'obstacle parabolique. C.R. Acad. Sc. Paris 305 (1987), 737-740.

Díaz, J.I. y Mossino, J. (1988): Isoperimetric inequalities in the parabolic obstacle problem. Aparecerá en Journal de Mathematiques Pures et Appliquées.

Díaz, J.I., Saa, J.I. y Thiel, U. (1989): Sobre la ecuación de curvatura media prescrita y otras ecuaciones cuasilineales elípticas con soluciones anulándose localmente. Aparecerá en Revista de la Unión Matemática Argentina (volúmen en honor de Julio Rey Pastor).

Díaz, J.I. y Stakgold, I. (1990): Mathematical analysis of the conversion fo a porous solid by a distributed gas reaction. En Actas del XI CEDYA, Univ. de Málaga, 217-223.

Díaz, J.I. y Veron, L. (1985): Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations Transsactions of the Americ. Math. Soc., 787-814.

Díaz, J.I. y de Thelin, F. (1991): On doubly nonlinear parabolic equations arising in some models related to turbulent flows. Manuscrito.

van Duijn, C.J. y Knaber, P. (1990): Solute Transport Through Porous Media with Slow Adsorption. In Free Boundary Problems: Theory and Applications (K.H. Hoffmann and J. Sprekels eds). Pitman, London, 375-388.

Giarusso, E. (1980): Un osservazione su un equazione parabolica del II ordine, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli 48, 161-170.

Gustafsson, B. y Mossino, J. (1987): Some Isoperimetric Inequalities in Electrochemistry and Hele-Shaw Flows. IMA J. Appl. Math. 1987.

Gustafsson, B. and Mossino, J. (1989): Isoperimetric Inequalities for the Stefan Problem. SIAM J. Math. Anal. 20, 1095-1108.

Hardy, G.H., Littlewood, J.E. y Polya, G. (1929): Some simple inequalities satisfied by convex functions. Messenger Math. 58, 145-152.

Hardy, G.H, Littlewood, J.E. y Polya, G. (1934): Inequalities. Cambridge Univ. Press. Cambridge.

Herrero, M.A. y Velázquez, J.J.L. (1991): Some results on Blow-up for semilinear parabolic problems. Aparecerá en Proc. Workshop on Degenerate Diffusion. Editores L.A. Peletier y otros. Springer-Verlag.

Jones, C.K.R.T. (1983): Asymptotic behavior of a reaction-diffusion equation in higher space dimensions. Rocky Mountain J. Math 13, 355-364.

Kalashnikov, A.S. (1987): Some problems of the qualitativve theory of nonlinear degenerate second-order parabolic equations. Uspekhi Mat. Nauk 42, 135-176.

Kamin, S. y Peletier, L.A. (1986): Large time behaviour of solutions of the porous media equation with absorption. Israel Jour. Math. 55, 129-146.

Kamin, S. y Vazquez, J.L. (1988): Fundamental solutions and asymptotic behaviour for the p-Laplacian equation. Rev. Mat. Iberoamericana, 339-352.

Kawohl, B (1985): On Rearrangements, Symmetrization and Maximum Principles, Lectures Notes in Math. Springer-Verlag, 1985.

Kawohl, B. (1986): Qualitative properties of solutions to semilinear heat equations, Expositiones Mathematicae, 4, 257-270.

Kawohl, B. y Peletier, L.A. (1990): Observations on blow up and dead cores for nonlinear parabolic equations, Math. Zeit.

Krylov, N.V. (1987): *Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations of the Second Order*. D. Reidel Publishing Company.

Ladyzenskaja, O.A., Solonnikov, V.A. y Uraltseva, N.N. (1968): *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*. Translatons of the AMS.

Levine, H. (1990): The role of critical exponents in blow-up theorems. SIAM Rew. 32, 262-288.

Mossino, J. (1984): Inegalités Isoperimetriques et Applications en Physique. Herman, Paris.

Mossino, J. y Rakotoson, J.M. (1986): Isoperimetric inequalities in parabolic equations. Ann. Scuola Norm. Pisa Cl, Sci, (4), 13, 51-73.

Pao, C.V. (1980): Mathematical analysis of enzyme-substrate reaction-diffusion in some biochemical systems. Nonlinear Analysis, 4, 369-379.

de Pablo, A. y Vazquez, J.L. (1991): Regularity of solution and interfaces of a generalized porous medium equatin in $\mathbb{R}^N$. Annali di Matem. Pura et

Applicata. CLVIII, 51-74.

Polya, G. y Sezgo, G. (1952): Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Ann. Math. Stud. 27, Princeton Univ. Press.

Protter, M.H. y Weinberger, H.F. (1967): *Maximum Principles in Differential Equations*. Prentice-Hall.

Rakotoson, J.M. (1986): Time Behaviour of solutions of Parabolic Problems, Applicable Analysis 21, 13-29-

Saa, J.E. (1991): Large time behaviour of the doubly nonlinear porous medium equation. Jour. Math. Anal. and Appl. 155, 345-363.

Samarskii, A.A., Galaktionov, V.A., Kurdyumov, S.P. y Mikhailov, A.P. (1987): *Blow-up in Problems for Quasilinear Parabolic Equations*. Nauka (en ruso).

Sato, K. (1968): On the generators of non-negative contraction semigroups in Banach Lattices, J. Math. Soc. Japan 20, 431-436.

Stakgold, I. (1986): Reaction-Diffusin Problems in Chemical Engineering. En *Nonlinear Diffusion Problems*. Editores A. Fasano y M. Primicerio, Springer, 119-153.

Talenti, G. (1977): Nonlinear elliptic equations, rearrangements of functions and Orlicz spaces. Ann. Mat. Pura Appl. IV, 120, 159-184.

Tsutsumi, M. (1987): On solutions of some doubly nonlinear degenerate parabolic equations with absorption, J. Math. Anal. and Appl. 60, 543-549.

Vazquez, J.L. (1982a): Symmetrization pour $u_t=\Delta\varphi(u)$ et applications, C.R. Acad. Sci. Paris, 295, 71-74.

Vazquez, J.L. (1982b): Symmetrization in nonlinear parabolic equations, Port. Math. 41, 339-346.

Veron, L. (1979): Coercivité et propertiétés regularisantes des semi-groups non lineaires dans les espaces de Banach, Ann. des Sci. Toulouse, 1, 171-200.