

# John von Neumann: precursor del Cálculo Científico

Por J. I. DÍAZ \*

## 1. Introducción.

Ilustrar la figura y la obra de un matemático del presente siglo, tan excepcionalmente brillante como John von Neumann, no debería ser una tarea ardua, especialmente después de que su obra haya sido casi íntegramente recogida en una serie de volúmenes (Taub [1963]<sup>1</sup>) asequibles a la consulta en cualquier biblioteca científica minimamente dotada, y que su persona y sus líneas de investigación hayan sido glosadas por distinguidos especialistas en un número especial de una revista de la calidad y difusión como el *Bulletin of the American Mathematical Society* (Ulam [1958]). La dificultad de esa tarea, sin embargo, es más que obvia si se matiza que los volúmenes antes mencionados son seis, con una media de más de 700 páginas cada uno y que sus títulos, aludiendo a los principales campos cultivados por él, involucran áreas tan dispares como las siguientes:

*Volumen 1: Lógica, Teoría de Conjuntos y Mecánica Cuántica.*

*Volumen 2: Operadores, Teoría Ergódica y Funciones casi-periódicas.*

*Volumen 3: Anillos de Operadores.*

*Volumen 4: Geometría Continua y Estadística.*

*Volumen 5: Diseño de Computadoras, Teoría de Automatas y Análisis Numérico.*

*Volumen 6: Teoría de Juegos, Astrofísica, Hidrodinámica y Meteorología.*

La importante huella de von Neumann en la Ciencia actual ha sido analizada en las múltiples biografías escritas por sus discípulos y contemporáneos (Ulam [1958], Halmos [1973] y Dieudonné [1976]), algunas de ellas plasmadas en libros analizando su obra (Goldstine [1972], Ulam [1976], Heims [1982], Aspray [1990], Poundstone [1992] y Brody y Vamos [1995]), siendo también digno de señalar el libro escrito por su hermano Vonneuman [1987].

Ilustrar con detalle su gigantesca figura escapa claramente de las posibilidades de este conferenciante. En esta breve nota nos limitaremos a una mera incursión en esa tarea, tomando sólo un aspecto parcial para describir el trascendental papel de von Neumann como uno de los creadores de una amplia disciplina que hoy se conoce bajo distintos nombres: *Le Calcul Scientifique*, *Scientific Computing*, etcétera y que en castellano podríamos denominar Cálculo Científico.

Tres titulares de prensa del mes en que se imparte esta conferencia (Febrero de 1996), extraídos del diario EL PAÍS, permiten ver la relevancia y actualidad de esta disciplina: *Francia suspende sus pruebas nucleares y las reemplaza por simulaciones en grandes computadores* (miércoles 7 de Febrero)<sup>2</sup>, *Gari Kasparov vence al programa Deep Blue por 4-2* (lunes 19 de Febrero), *El ENIAC, primer ordenador electrónico y programable, cumple 50 años* (miércoles 21 de Febrero)<sup>3</sup>.

En lo que sigue, abordaremos primeramente su vida familiar y profesional (Sección 2), haremos una rápida alusión a sus investigaciones en Matemática Pura, Teoría de Juegos y Mecánica Cuántica (Sección 3) para centrarnos más tarde en su visión del Cálculo Científico (Sección 4). Por último se incluye un listado de los trabajos de John von Neumann (Sección 5).

## 2. Su vida familiar y profesional.

John von Neumann nació en Budapest (Hungría) el 28 de Diciembre de 1903 en el seno de una familia acomodada de origen judío. Su padre, Max, era banquero. Su madre, Margaret,

\* Académico Numerario electo

representó para él un apoyo fundamental muriendo sólo unos meses antes que él. Era el menor de tres hermanos y quizás por esto le gustaba ser denominado por el diminutivo de su nombre de pila (Jansci, derivado de János y más tarde Johny, desde que occidentalizó su nombre sustituyéndolo por John). En 1913 su padre *adquirió* el título nobiliario de *margittai*, siendo denominado desde entonces como Margittai Max Neumann. Hacia 1921 su hijo János firma durante su estancia en Alemania como Johann Neumann von Margitta y años más tarde adopta el nombre definitivo de John von Neumann. Es de notar que no todos sus hermanos siguieron su ejemplo y así su hermano Nicholas cuando se afincó en Estados Unidos varió su apellido original al de Vonneuman.

El alto nivel económico de su familia permitía que su educación familiar estuviese auxiliada por *institutrices* francesas y alemanas, lo que quizás pudo influir en su pasión y facilidad para los idiomas. Son numerosas las leyendas que se pueden encontrar en sus biografías sobre su precocidad, su memoria excepcional y su rapidez de cálculo mental y escrito. Se dice de él, a título de ejemplo, que a los doce años ya había leído el libro *Théorie des Fonctions* de E. Borel.

Entre 1911 y 1921 asistió al *Gymnasium Luterano* de Budapest en el que coincidió con otra mente privilegiada: E. Wigner, Premio Nobel de Física de 1963 y con el que mantendría una estrecha amistad y colaboración científica hasta el final de sus días<sup>4</sup>. Durante este periodo, debido a su excepcionales dotes para las ciencias, le fue asignado un tutor, el joven matemático M. Fekete. Juntos mejoraron resultados de uno de los matemáticos húngaros de mayor renombre: L. Fejer.

Al finalizar sus estudios secundarios se planteó en la familia un gran interrogante sobre el futuro profesional de Jansci: banquero (como su padre), o matemático (como él anhelaba). Su padre pidió consejo a Th. von Karmán, amigo distinguido de la familia, quien propuso una solución alternativa: químico<sup>5</sup>. De esta manera comenzaron sus estudios universitarios que llevaría a cabo en tres países distintos: Ciencias Químicas en Berlín, de 1921 a 1923 (donde siguió cursos de A. Einstein y E. Schmidt), Ingeniería Química en Zurich, entre 1923 y 1925 (asistiendo a las clases de Weyl, Pólya y Schrödinger) y doctorándose en Matemáticas en 1926 por la Universidad de Budapest (donde, de hecho, estuvo matriculado oficialmente en esos años universitarios, superando los exámenes durante los veranos).

Su primer artículo de matemáticas, escrito a los 18 años, lo constituyó el trabajo antes citado con Fekete (en lo que sigue utilizaremos la notación  $vN$  [1922] para referirnos al trabajo que aparece en el listado del sección 5 correspondiente a esa cita, en este caso publicación única del año 1922). En su producción científica pueden distinguirse dos periodos no separados de manera nítida. El periodo europeo se puede situar entre 1921 y 1930. Tras su doctorado, obtiene una Beca Rockefeller para el curso 1926/27 desplazándose a la Universidad de Göttingen (Alemania) para trabajar con D. Hilbert (a quien luego visitaría en Heidelberg) y donde coincidiría también con el físico J.R. Oppenheimer. Posteriormente, entre 1927 y 1929 obtuvo la plaza de Privatdozent en Berlín<sup>6</sup>, realizando numerosos viajes en tren a Göttingen, y, finalmente, en el curso 1929/1930 ocupó el cargo de Privatdozent esta vez en la Universidad de Hamburgo.

Una etapa distinta se refiere al resto de sus años en Estados Unidos. Su primera invitación a visitar este país se produjo en 1930 donde fue invitado por el geómetra O. Veblen a visitar la Universidad de Princeton. Antes de realizar este viaje, en Diciembre de 1929, se casó con Marietta Kövesi<sup>7</sup>.

Entre 1930 y 1933 fue contratado como Profesor Visitante en la Universidad de Princeton simultaneando este nombramiento con la condición de Profesor de la Universidad de Berlín hasta la llegada del partido nazi al poder en 1933.

En 1933 se crea en Princeton el Institut for Advanced Study (IAS), institución sin docencia regular independiente de la Universidad. Los seis profesores iniciales del IAS fueron los siguientes: J.W. Alexander, A. Einstein, M. Morse, O. Veblen, H. Weyl y J. von Neumann, que

con apenas 29 años era el más joven de todos.

Su adscripción al IAS perduraría hasta su muerte en 1957, sin embargo hay constancia de fallidos intentos para acomodarse en otros centros. Así, por ejemplo, en 1945, N. Wiener promovió sin éxito su nombramiento en el MIT de Massachusetts<sup>8</sup>. En Marzo de 1956, ya enfermo, aceptó una oferta de la UCLA (California) que él tomaba como una temprana jubilación y en cuyo contrato, que no llegó a disfrutar, se hacía alusión a un cuantioso seguro de vida y numerosas facilidades para su instalación.

Durante su vida profesional disfrutó de numerosos contratos de investigación para un elevado número de organismos oficiales, la mayor parte relacionados con Defensa, y que más tarde se tradujeron en nombramientos para desempeñar cargos de alta responsabilidad en dichos organismos. Entre estos centros se pueden citar al Scientific Laboratory de Los Alamos (New Mexico) entre 1943 y 1955, el Ballistic Research Laboratory de Alberden (1940-1957) y el centro de Silver Spring (1947-1955), ambos en Maryland y sus múltiples nombramientos en Washington: Navy Bureau of Ordnance (1941-1955), Research and Development Board (1948-1953), Armed Forces (1950-1955) y el que él más estimaba (pese a que acarrearía incompatibilidades que se traducían en importantes mermas salariales): la Atomic Energy Commission (1954-1957).

En el capítulo de su vida familiar es también de señalar el nacimiento en 1935 de su única hija Marina (que más tarde sería Consejera para Asuntos Económicos del Presidente R. Nixon en 1972), el divorcio, en 1937, de Marietta<sup>9</sup>, su nacionalización como ciudadano norteamericano ese mismo año y su segundo matrimonio, en 1938, con Klára Dán<sup>10</sup>.

La muerte le sobrevino el 8 de Febrero de 1957 tras más de dos años de una penosa enfermedad (cáncer de huesos) detectada en 1955 por motivo de una caída con rotura de clavícula. En Junio de 1956 los médicos le advirtieron de su grave enfermedad y le aconsejaron que intentara acabar los trabajos más importantes en curso. Fue entonces cuando culminó su libro *The computer and the brain* (von Neumann [1956]). Su última aparición en público data de Febrero de 1956 cuando le fue entregada la Medal of Freedom por el Presidente Eisenhower. Aun después, celebró reuniones con Secretarios de Estado en el Hospital Walter Reed de Washington en el que estaba internado. Las personas que le visitaron mencionan sus sufrimientos, su declive físico, sus depresiones acrecentadas por la muerte, en 1956, de su madre (quien vivía con él desde su instalación definitiva en Estados Unidos en 1933) y un sinfín de otras anécdotas que protagonizaba hasta los últimos días de su vida (por ejemplo, cuando ya no podía leer se dedicaba a recitar de memoria largos versos de Goethe, etcétera). Los últimos años de su vida fueron de una fervorosa práctica religiosa.

John von Neumann recibió numerosos honores. Era miembro de las Academias de Lima, Roma, American Academy of Arts and Sciences, Milán, National Academy of Sciences y Amsterdam. Fue nombrado Doctor Honoris Causa por las Universidades de Princeton (1947), Pennsylvania y Harvard (1950) y Estambul y Maryland (1951). Entre los muchos premios recibidos son de resaltar algunos que llevaban los nombres de contemporáneos suyos (A. Einstein en 1956 y E. Fermi también en 1956). Fue Editor de *Annals of Mathematics* (de 1933 a 1957) y *Compositio Mathematica* (de 1935 a 1957), entre otras revistas. Fue también Presidente electo de la American Mathematical Society de 1951 a 1953. Entre los muchos reconocimientos póstumos destaca la célebre John von Neumann Lecture (premio anual de la sociedad americana SIAM que desde su instauración en 1957 ha recaído en matemáticos del prestigio de P. Lax, P. Henrici, J.L. Lions, J. Keller, S. Smale, R.T. Rockafellar y A. Majda, entre otros)<sup>11</sup>.

### **3. Investigaciones en Matemática Pura, Teoría de Juegos y Mecánica Cuántica.**

Las contribuciones de von Neumann en los campos aludidos ocupan cuatro volúmenes de sus *Collected Works* (Taub [1963]) con más de 4.000 páginas por lo que aquí nos limitaremos a unos comentarios muy breves. Algunas alusiones indirectas las podrá encontrar el lector en el

glosario de otras figuras del siglo XX de otras exposiciones de este volumen (véanse los textos de las conferencias de S. Ríos García y S. Ríos Insua sobre La Teoría de la Decisión, de P. Jiménez Guerra sobre Lebesgue, Borel y Baire, de B. Rodríguez Salinas sobre Hilbert y de D. Maravall sobre Einstein). Una excelente y obligada referencia es el volumen especial del *Bulletin of the AMS* (véase Ulam [1958]) en el que primeras figuras de esos campos analizan las profundas contribuciones de von Neumann.

Pero, ¿que valoración tenía el propio von Neumann de sus contribuciones?. A buen seguro que su mentalidad fue cambiando a lo largo de su vida<sup>12</sup>. Un testimonio escrito sobre este tema se produjo en 1954 cuando la National Academy le pasó un cuestionario, con motivo de su elección como Académico, en el que tenía que indicar cuales habían sido sus tres principales contribuciones a la Matemática. Su respuesta fue: *Fundamentos matemáticos de la Mecánica Cuántica, Teoría de Operadores y el Teorema Ergódico*<sup>13</sup>. Como veremos, la necesidad imperiosa de reducir a tres los temas invocados le llevó a silenciar contribuciones que por sí solas merecen estar en la Historia de las Matemáticas.

Una frase de la semblanza de von Neumann llevada a cabo por Dieudonné [1976] me parece especialmente certera: “*Poseía una habilidad excepcional para organizar y axiomatizar situaciones complejas que a priori no parecían encauzables a un tratamiento matemático*”. Pero centrémonos en el tema de esta sección. Durante los primeros años de su producción científica, entre 1922 y 1930, bajo la poderosa influencia de David Hilbert, John von Neumann se ocupó de la Lógica Matemática y la Teoría de Conjuntos. Entre los muchos temas abordados figuran los siguientes: Los números ordinales (vN [1923], [1925b],[1928b].), Teoría de Conjuntos (sobre la que versó su tesis doctoral en la Universidad de Budapest (vN [1926]) y que luego desarrolló en vN [1927d],[1928g].), Teoría de Prüfer de números algebraicos ideales (vN [1926a],...), descomposición de la esfera según Hausdorff, Banach and Tarski (vN [1928a]).

Su incursión en los fundamentos de la Mecánica Cuántica arranca con un artículo en colaboración con Hilbert y Nordheim (vN [1927]). Su propósito era dar respuesta al 6º Problema de la lista propuesta por Hilbert en 1900: restablecer el papel de las Matemáticas, a nivel conceptual, en la Física Teórica. Esto le llevó a sistematizar rigurosamente las ideas de Dirac y al estudio de la Teoría de Operadores para el tratamiento de la reversibilidad y el indeterminismo de Heisenberg, Schrödinger y Born. Sus posteriores trabajos vN [1928a], [1928d] y siguientes se plasmaron en su importante libro *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (vN [1932b])<sup>14</sup>. En Van Hove [1958] el lector podrá encontrar una revisión especializada sobre las aportaciones de von Neumann en esta dirección.

Probablemente, fue la inicial influencia de E. Schmidt (popularizado más tarde por el proceso de Gram-Schmidt), la que le llevó al estudio de la Teoría de Operadores y en la que realizó importantes contribuciones (veanse los comentarios expertos de Murray [1958]). Motivado por sus estudios sobre Mecánica Cuántica, desarrolló la Teoría Espectral de Operadores Hermíticos no Acotados mejorando trabajos previos de H. Weyl y T. Carleman. Estableció la reducción a operadores unitarios en la línea de los trabajos de Cayley (resultados que fueron simultáneamente establecidos por M.H. Stone). Analizó los “defectos” de los operadores de dominio denso de gran aplicabilidad a la teoría de problemas de contorno en ecuaciones en derivadas parciales y en los que las condiciones de contorno han de ser incluidas en la definición del dominio del operador. Sus trabajos en esta dirección fueron primordialmente elaborados en el periodo de 1928 a 1932 aunque nunca dejó de publicar en ese campo hasta 1950.

Otra parcela de la Teoría de Operadores de la que se ocupó con gran dedicación es la Teoría de Álgebras (término anteriormente sustituido por el de Anillos) de Operadores. Analizó las  $W^*$ -Álgebras o Álgebras de von Neumann según fueron denotadas más tarde, por Dixmier en 1957. Desarrolló la teoría de Álgebras no conmutativas a la luz de los trabajos de E. Noether y E. Artin, haciendo especial incapié en su aplicación a la Teoría de Matrices. Estudió los

operadores acotados en espacios de Hilbert separables, etcétera. Estas líneas de investigación las comenzó en 1929 y las continuó, ya en Princeton y en gran parte con la colaboración de F. Murray en una serie de trabajos (vN [1931e], [1936], [1937], [1943] y [1949a] entre otros). Véase también la exposición realizada en Kadison [1958].

Ya en Princeton, en la primera década de su estancia, además de la Teoría de Anillos de Operadores, von Neumann investiga sobre muchos otros temas. Cultiva la Geometría Continua que descubre con la lectura del libro de Dirac sobre Mecánica Cuántica (Dirac [1930]). Es lo que él llamó, con ironía, “la Geometría sin puntos”. Su agudizado sentido del humor lo plasmó también en su vida científica y así más tarde cuando su interés se centraba en la construcción de un gran ordenador, ideó un sofisticado nombre cuyas iniciales conducían a MANIAC. Sus colegas le desanimaron de este empeño pero devolviéndole la broma solían denominar más tarde a ese ordenador como JOHNIAC. Volviendo a la Geometría Continua, otra de sus motivaciones era que la dimensión del espacio de operadores venía determinada por su grupo de rotaciones con lo que se obtenían dimensiones tales como  $4/3$  y otros números racionales. Era el periodo entre 1935 y 1937.

También se ocupó de los Grupos de Lie y así, en vN [1933b], resuelve el 5º problema de Hilbert para grupos compactos mostrando que admiten una estructura de Lie si son homeomorfos a un espacio Euclideo. En vN [1934b] muestra la unicidad de la medida de Haar sobre estas estructuras, trabajos que luego serían desarrollados por E. Cartan.

Respecto a la Teoría Ergódica, extendió, en sólo unos meses, un artículo previo de 1932 de B.O. Koopman sobre la formulación en las funciones de cuadrado sumable al caso de la formulación en casi todo punto (vN [1932b] y vN [1932]). G. Birkhoff amplió más tarde estos resultados en una serie de trabajos (véanse los artículos Birkhoff [1958] y Halmos [1958]).

La sistematización que llevó a cabo de la Teoría de Juegos se puede considerar como una de las mayores contribuciones científicas del siglo XX. Según Dieudonné, “*von Neumann logra algo casi imposible: ofrece un modelo cuantitativo para los juegos de azar con libertad de acción de los jugadores*”. Esta fundamentación la llevó a cabo en 1928 (vN [1928f]), “*annus mirabilis*” según Ulam. Extendió los resultados de Borel de 1921, probando su famoso Teorema del min-max y considerando juegos con dos o más jugadores. Sus trabajos culminaron con el libro *Theory of Games and Economic Behaviour* que publicó con Oscar Morgenstern en 1944 (vN [1944]). Antes ya se había interesado por distintos modelos sobre Equilibrio Económico (vN [1937d]) innovando este área ya que hasta entonces la mayoría de los modelos matemáticos se basaban en analogías mecánicas. Posteriores trabajos en esta dirección fueron vN [1945a], varios manuscritos no publicados datando de 1947 y 1948, vN [1950] (en el que utiliza ecuaciones diferenciales), [1953a] y [1954a] (exposiciones especializadas pueden encontrarse en Khun y Tucker [1958] y Poundstone [1992]).

#### **4. John von Neumann y el Cálculo Científico.**

Para comenzar, quizás convenga ser más preciso por lo que hoy día se entiende por Cálculo Científico. Acudiendo a fuentes francesas (Dautray [1992], Benardy [1994]) podemos decir que el Cálculo Científico no es más que la utilización del ordenador como herramienta de trabajo en cualquier disciplina científica. Pese a esta definición tan sencilla, dos matizaciones se hacen poco menos que necesarias. En primer lugar, el término Cálculo se debe entender como una sucesión de operaciones automáticas basadas en operaciones elementales, trigonometría, logaritmos y exponenciales. Desde la máquina de Pascal (1623-1632) hemos asistido a una progresión asombrosa en la escala de los problemas abordados y así, por ejemplo, en la resolución de sistemas algebraicos lineales hemos pasado de la resolución de los de orden 10 en 1930 a los de más de 10 elevado a seis en 1990<sup>15</sup>. La segunda matización es que el término Científico sirve para distinguirlo de otros cálculos no científicos como son los que puedan realizar las empresas

o las Oficinas de Recaudación de Impuestos con fines contables. En nuestro caso nos referiremos exclusivamente a aquellos cálculos cuya finalidad sea la elaboración de una teoría y/o su confrontación con la realidad. En este sentido, son de mencionar, entre otros, los siguientes objetivos del Calculo Científico: elaboración y validación de modelos, interpretación en *tiempo real* de experiencias, realización y optimización de productos, enunciado y verificación de conjeturas (recuérdese el problema de los cuatro colores en el que ha sido sólo gracias a los ordenadores que se ha podido obtener su resolución), etcétera.

Ocupándonos de nuevo de la figura de von Neumann, parece que fue en 1940 cuando su trayectoria científica tuvo una importante inflexión. En ese año tuvo un primer contacto con el Ballistic Research Laboratory de Aberdeen, escribiendo su primer artículo (vN [1940]) sobre Análisis Numérico con el oficial Robert Kent<sup>16</sup>. Años más tarde, en 1955, en un homenaje a R. Kent reconocería lo siguiente: *“Antes era, aparte de algunas infidelidades, un matemático puro. Gracias a Kent me introduje en las ciencias aplicadas. He tenido éxito al perder mi pureza”*. Y según Halmos [1973] *“..hasta 1940 von Neumann era un matemático puro excepcional que comprendía Física; después fue un matemático aplicado que recordaba su trabajo como matemático puro”*.

En 1942 comienza una serie de trabajos sobre el análisis numérico de la inversión de matrices y su aplicación a la resolución de ecuaciones lineales de orden elevado<sup>17</sup>, algunos de ellos en colaboración con Bargmann y Montgomery (vN [1946]) y más tarde en varios trabajos con Goldstein, (vN [1948a] y [1951]) y finalmente con este último y con Murray en un artículo póstumo (vN [1958]). Investigaciones más aplicadas de esta década son las que realizó sobre Astrofísica junto al Premio Nobel S. Chandrasekar (vN [1942] y [1943]), así como sus estudios sobre *ondas de choque* para flujos compresibles que desarrolló en forma de informes: Informe al Secretario de Estado de Defensa (vN [1941c]), informe sobre detonación (vN [1942d]), sobre choques oblicuos (vN [1943a]), y el estudio numérico de las ondas de choque (vN [1944b]).

Pero su aportación más innovadora, en la década de los años cuarenta, se refiere a la planificación de la “creación” de un ordenador para la investigación científica. El comienzo de esa aventura parece datar de una visita a Inglaterra en 1943. Así, en una carta a Veblen, fechada el 29 de Mayo de 1943, declara *“He desarrollado un interés obscuro por las técnicas de computación”*. Ya en los Alamos, desarrolló técnicas de programación criticando las limitaciones de los ordenadores existentes, comenzando así su importante obra en Ingeniería de Ordenadores, Sistemas de Calculo, Teoría de Autómatas, etcétera. Dar cuenta de sus aportaciones en esta dirección se escapa del alcance de esta presentación. El lector podrá encontrar en exposiciones más especializadas, como por ejemplo las de Aspray [1985] y [1990], detalles sobre su participación en el diseño del gran ordenador EDVAC en 1947 posterior a la del ENIAC en 1946 lo que originó la famosa controversia con los ingenieros de Pensilvania J.P. Eckert y J.W. Mauchly, creadores de este último. Más tarde también diseñaría otros grandes computadores para el IAS de Princeton.

Un texto inédito de Mayo de 1946, en colaboración con H. Goldstein (vN [1946]), puede considerarse de importancia histórica pese a que por su carácter de informe técnico apenas pudo ser libremente consultado hasta que apareció en sus *Collected Works* (Taub [1963]). En este trabajo, de título *Large Scale Computing Machines*, se analiza el interés de los grandes ordenadores desde el punto de vista del matemático, del ingeniero y del programador. Casi nada más comenzar ya se preguntan sobre los fines de estas máquinas: *“Where lie the main mathematical needs for high speed automatic computing and what characteristics of a computing device are effective in the various pertinent phases of mathematics?”*. A modo de respuesta comentan *“our present analytical methods seem unsuitable for the solution of the important problems arising in connection with nonlinear partial differential equations and, in fact, with virtually all types of nonlinear problems in pure mathematics”*, ocupándose también

de su posible aplicabilidad en Mecánica de Fluidos *“only the most elementary problems of Fluid Mechanics have been solved analytically.....the main mathematical difficulties have been known since the time of Riemann and Reynolds..”*, y con respecto a la relación de estos problemas con la Física se pronuncian de esta manera: *“One may be tempted to qualify these problems as problems in Physics, rather than in Applied Mathematics, or even Pure Mathematics.....such an interpretation is wholly erroneous..That the first, and occasionally the most important, heuristic pointer for new mathematics advances should originate in Physics is not a new or a surprising occurrence..”*. Más tarde mencionan problemas de ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico aun sin respuesta (en Teoría del Potencial, aplicaciones conformes, superficies mínimas, etcétera) así como los ligados a la turbulencia. Finalmente, es de resaltar su premonición sobre el papel de los grandes computadores en relación con la experimentación: *“..wind tunnels are used at present as computing devices of the so called analogy type...Digital devices have more flexibility and more accuracy and could be made much faster under present conditions...They may provide us with those heuristic hints which are needed in all parts of mathematics for genuine progress”*.

John von Neumann escogió la Meteorología Numérica como futuro banco de pruebas del ordenador del IAS. Al parecer su interés en el tema le fue suscitado por V. Zworykin (ingeniero eléctrico de RCA) en 1945 así como por C.G. Rossby quien en una carta fechada el 23 de Abril de 1946 le hablaba de la necesidad de investigar sobre las fluctuaciones y modificaciones climáticas<sup>18</sup>. En un informe a L. Straus, director del IAS, en 1947, von Neumann presenta una larga lista de temas que el ordenador, en aquella fecha aun en diseño, debería abordar. Entre los temas están los siguientes: ecuaciones en derivadas parciales no lineales en Hidrodinámica, Elasticidad y otros campos, experimentos estadísticos, Astrofísica, Física Atómica, Cristalografía, etcétera. Más tarde, en 1956 Goldstein afirma que un tercio del tiempo del ordenador es para la Meteorología *“ejemplo primordial de fenómenos no lineales complejos, anteriormente inaccesibles a la investigación matemática”*. Efectivamente, hasta ese tiempo la predicción meteorológica tenía mucho de arte, las líneas de isobaras e isotermas se dibujaban a mano sobre los mapas que eran almacenados en *mapotecas* de obligada consulta y la experiencia personal en memorizar situaciones pasadas era de vital importancia. El nuevo enfoque que von Neumann proponía costaba de cuatro etapas (véase vN [1947c]). La primera de ellas era la *Modelización Física* en la que las distintas simplificaciones habían marcados los progresos en el área gracias a los trabajos iniciales de Euler, Navier y Stokes, Kelvin, Rayleigh, Helmholtz y otros, hasta llegar a V. Bjerknes en 1904 y especialmente L. Richardson con su libro de 1922. Uno de sus distinguidos continuadores, C.G. Rossby, entabló contacto con von Neumann ya en 1942. Una segunda etapa se refería a las *Técnicas numéricas y gráficas* que basadas en procesos de aproximación deberían suplir la imposibilidad de obtener soluciones explícitas. La *Toma y almacenamiento de datos* sería de una capital importancia para representar adecuadamente las condiciones de contorno e iniciales de los modelos. Finalmente, la cuarta etapa consistiría en la *Computación en grandes ordenadores* que permitiesen un pronóstico diario, en *tiempo real*<sup>19</sup>.

Este programa se vio impulsado enormemente por las necesidades derivadas de la Segunda Guerra Mundial. En 1946 von Neumann elevó a la Navy una propuesta (rápidamente aceptada) con un plan temporal muy detallado en el que las experiencias numéricas no comenzarían hasta 1949. Se pedía la contratación de un equipo formado por cinco o seis meteorólogos jóvenes que se adscribirían al IAS de Princeton. Uno de ellos fue J. Charney que en muy poco tiempo se convirtió en un reputado especialista y que permaneció en el IAS hasta 1956. Entre la larga lista de asesores estaban E. N. Lorenz y J. Smagorinsky entre otros.

El equipo comenzó con unas experiencias previas en el ENIAC sobre un modelo barotrópico (bidimensional) propuesto en Charney [1949]. John von Neumann cuidaba personalmente de los aspectos ligados al tratamiento numérico de los modelos, en particular

proponía los algoritmos de aproximación de las ecuaciones en derivadas parciales y de las condiciones de contorno y la propagación de perturbaciones desde la frontera. Ello le llevó a elaborar un criterio de estabilidad computacional que mejoraba el famoso criterio de Courant, Friedrichs y Lewy [1928] (vN [1948a], [1948c]). Al ENIAC le costaba 36 horas llevar a cabo un pronóstico de 24 horas. En particular, el pronóstico realizado para el 31 de Enero de 1949 fue muy bueno constituyendo un hecho histórico en la Meteorología con el que se abría una nueva era.

Una vez construido el ordenador del IAS, el equipo trabajó con un modelo baroclínico, propuesto por N. Phillips (véase Phillips [1951]), que por su carácter tridimensional permitía la predicción de posibles tormentas. El gran computador del IAS elaboraba ya un pronóstico de 24 horas en 10 minutos de Cálculo (que equivalían a 8 años de cálculo para una pequeña computadora de la época). Los resultados fueron aplicados con éxito prediciendo una gran tormenta para el día de Acción de Gracias de 1950. Por cierto que para la fundamentación teórica, von Neumann utilizó el método que hoy día se conoce como de *viscosidad evanescente* que ya había aplicado, junto a Richmeyer en el estudio de ondas de choque (vN [1947a]).

En 1953, el pronóstico a corto plazo estaba tan redondeado que dejó de tener un interés prioritario entre las experiencias del ordenador del IAS. El reto se desplazaba al diagnóstico a más largo plazo, Phillips propuso, en 1955, los modelos de Circulación General de la Atmósfera y el protagonismo de von Neumann cesó (entre otras cosas por la instalación de von Neumann en Washington como miembro de la Comisión de Energía Atómica). El IAS suspendía su programa sobre Meteorología Numérica y Charney y Phillips se establecían en el MIT de Massachusetts.

Sin embargo, el programa de von Neumann había abierto una nueva época en la Ciencia. El Cálculo Científico permite tratar, hoy día, fenómenos de una gran complejidad, como es el caso de la mayoría de las aplicaciones, revolucionando el proceso de simulación y validación de los modelos. Sólo una mente privilegiada como la de von Neumann podía haber tenido la capacidad y confianza en hacer realidad algo inimaginable hace unas décadas.

## Notas

1. Véase también la recopilación de sus trabajos sobre Computación hecha por Aspray y Burks [1987].
2. Algunos modelos y resultados en esta dirección son de libre acceso desde hace ya algún tiempo. Véase, por ejemplo, el informe Tobin, Choate y Beller [1993]. El autor agradece a C. Alejaldre (del CIEMAT) por haberle suministrado esta información.
3. Obviamente esta noticia ha sido también objeto de reflexión en revistas de divulgación científica (véase, por ejemplo, el artículo de Davis [1996] en SIAM News).
4. Quien a diferencia de von Neumann tuvo una larga vida, falleciendo el 5 de Enero de 1996.
5. Ambos científicos coincidirían más tarde en Estados Unidos y en particular como asesores, junto a otros colegas suyos, del Proyecto Manhattan que con sede central en los Alamos tuvo como objetivo producir la primera bomba atómica norteamericana. La explosión experimental tuvo lugar el 16 de Julio de 1945. El director del proyecto fue J.R. Oppenheimer con quien von Neumann también coincidió en sus años de juventud en Europa.
6. El más joven de la historia de la Universidad de Berlin.

7. Para llevar a cabo este matrimonio von Neumann se convertiría al catolicismo previamente.
8. Las cambiantes relaciones entre estas dos monumentales figuras matemáticas de nuestro siglo fueron pormenorizadamente analizadas en Heims [1982]. Agradezco al Profesor Jesús Hernández por facilitarme tan interesante cita.
9. Parece ser que Marietta le abandonó para casarse con el físico J.B. Kupper. Que en los documentos de su divorcio se indique que su hija Marina pasaría a estar bajo la custodia de von Neumann cuando esta cumpliera los 12 años es altamente significativo.
10. Antigua novia de juventud, también divorciada y notable programadora de los primeros computadores.
11. Agradezco a Allison Bogardo (de los servicios administrativos de SIAM) por haberme facilitado la lista completa de todos los receptores de este premio desde su instauración y de la que sólo he extraído unos cuantos nombres significativos por razones obvias de extensión.
12. En un artículo de divulgación (vN [1947a]) alude a que su sentido del rigor, para dar por probado un resultado, cambió tres veces a lo largo de su vida. Existe una traducción española de este interesante artículo en la enciclopedia editada por Newman [1956] (véase el volumen 5, páginas 443-445).
13. El profesor Jacques-Louis Lions me ha informado recientemente (fax de 19 de Marzo de 1996) que en un artículo escrito por su hija Marina ésta atestigua que en una ocasión von Neumann se pronunció claramente por la Teoría de Juegos como la aportación más relevante de toda su obra.
14. La versión española se adelantó a las versiones inglesa y francesa. El libro fue traducido al castellano en 1949 con el título *Fundamentos matemáticos de la Mecánica Cuántica*, y publicado por el Instituto de Matemáticas "Jorge Juan" del CSIC. La traducción se debió al Dr. R. Ortiz e incluía un prólogo de E. Terradas describiendo su impacto en la Universidad Central de Madrid. Se cuenta también con una reimpresión del CSIC que data de 1991.
15. Véase la exposición panorámica realizada en Lions [1991].
16. Este artículo no aparece recogido en sus *Collected Works* por lo que ha pasado desapercibido para algunos estudiosos de su obra.
17. Uno de ellos (vN [1942b]) lo publicó en *Portugaliae Mathematica*.
18. La idea de *controlar* el clima fue algo que le preocupó en los últimos años de su vida (véase vN [1955a]). Algunas de sus geniales ideas no han tenido una formulación matemática rigurosa más que hasta hace sólo unos años (véase, por ejemplo, Lions [1993] y su bibliografía así como Díaz [1994]).
19. Hoy día esa estructuración en etapas es típica de la Matemática Aplicada (véase, por ejemplo, Lions [1990]).

## 5. Trabajos de John von Neumann.

El listado que sigue está tomado de Aspray [1990]. Al igual que en dicho texto se indica al final de cada referencia en que recopilación aparece recogida, indicanose por [T] cuando se refiere a Taub [1963] o por [AB] cuando es el caso de Aspray y Burks [1987].

1922. Michael Fekete y v. N., "Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimumpolynome", *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* 31, págs. 125-138 [T,I, 10-23].

1923. "Zur Einführung der transfiniten Zahlen", *Acta literarum ac scientiarum Requiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Sectio scintiarum mathematicarum* 1, págs. 199-208 [T,I, 24-33].

1925a. "Egyenletesen suru szamsorozatok", *Mathematikai Fizikai Lapok* 32, págs. 32-40 [T,I, 58-66].

1925b. "Eine Axiomatisierung der Mengenlehre", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 154, págs. 219-240 [T,I, 34-56].

1926a. "Zur Pruferschen Theorie der idealen Zahlen", *Acta Universitatis Szegediensis* 2, págs. 193-227 [T,I, 68-103].

1926b. "Az altalanos nalmazelmelet axiomatikus folepitses", Tesis, Universidad de Budapest.

1927a. "Mathematische Begründung der Quantenmechanik", en *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, págs. 1-57 [T,I, 150-207].

1927b. "Thermodynamik quantenmechanischer Gesamtheiten", *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, págs. 273-291 [T,I, 236-254].

1927c. "Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik", *Nachrichten der Gesellschaften der Wissenschaften zu Göttingen*, págs. 245-272 [T,I, 208-235].

1927d. "Zur Hilbertschen Beweistheorie", *Mathematische Zeitschrift* 26, págs. 1-46 [T,I, 256-300].

1927e. "Zur Theorie der Darstellungen kontinuierlicher Gruppen", *Sitzunberichte der Preussischen Akademie*, págs. 76-90 [T,I, 134-148].

1927. David Hilbert, v. N. y Lothar Nordheim, "Über die Grundlagen der Quantenmechanik", *Mathematische Annalen* 98, págs. 1-30 [T,I, 104-133].

1928a. "Die Axiomatisierung der Mengenlehre", *Matematische Zeitschrift* 27, págs. 669-752 [T,I, 339-422].

1928b. "Die Zerlegung eines Intervalles in abzählbar viele kongruente Teilmengen", *Fundamenta Mathematicae* 11, págs. 230-238 [T,I, 302-311].

1928c. "Eigenwertproblem symmetrischer Functionaloperatoren", *Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung* 37, págs. 11-14.

1928d. "Einige Bemerkungen zur Diracschen Theorie des Drehelektrons", *Zeitschrift für Physik*, 48, págs. 868-881 [T,I, 423-436].

- 1928e. "Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen", *Mathematische Annalen* 99, págs. 134-141 [T,I, 312-319].
- 1928f. "Sur la théorie des jeux", *Comptes Rendus des Séances. Académie des sciences. Paris* 186, págs. 1698-1791.
- 1928g. "Über die Definition durch transfinite Induktion, und verwandte Fragen der Allgemeinen Mengenlehre", *Mathematische Annalen* 99, págs. 373-391 [T,I, 320-338].
- 1928h. "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele", *Mathematischen Annalen* 100, págs. 295-320, traducido por S. Bargmann como "On the Theory of Games of Strategy", *Annals of Mathematics Studies* 40, págs. 13-42 [T,VI, 1-26].
- 1928a. v. N. y Eugene Wigner, "Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons I", *Zeitschrift für Physik* 47, págs. 203-220 [T,I, 438-456].
- 1928b. v. N. y Eugene Wigner, "Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons II", *Zeitschrift für Physik* 49, págs. 73-94 [T,I, 457-493].
- 1928c. v. N. y Eugene Wigner, "Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons III", *Zeitschrift für Physik* 51, págs. 844-858.
- 1929a. "Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren", *Mathematische Annalen* 102, págs. 49-131 [T,II, 3-85].
- 1929b. "Beweis des Ergodensatzes und des h-Theorems in der neuen Mechanik", *Zeitschrift für Physik* 57, págs. 30-70 [T,I, 558-598].
- 1929c. "Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen", *Mathematische Zeitschrift* 30, págs. 3-42 [T,I, 509-548].
- 1929d. "Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage der axiomatischen Mengenlehre", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 160, págs. 227-241 [T,I, 494-508].
- 1929e. "Zur algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren", *Mathematische Annalen* 102, págs. 370-427 [T,II, 86-143].
- 1929f. "Zur allgemeinen Theorie des Masses", *Fundamenta Mathematicae* 13, págs. 73-116 [T,I, 599-642].
- 1929g. "Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen", *Journal für reine und angewandte Mathematik* 161, págs. 208-236 [T,II, 144-172].
- 1929h. "Zusatz zur Arbeit 'Zur allgemeinen Theorie des Masses'", *Fundamenta Mathematicae* 13, págs. 333 [T,I,543].
- 1929a. v. N. y Eugene Wigner. "Über das Verhalten von Eigenwerten bei adiabatischen Prozessen." *Physikalische Zeitschrift* 30, págs. 467-470. [T,I, 553-556]
- 1929b. v. N. y Eugene Wigner, "Über merkwürdige diskrete Eigenwerte", *Physikalische Zeitschrift* 30, págs. 465-467 [T,I,550-552].
1930. "Über einen Hilfssatz der Variationsrechnung", *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 3, págs. 28-31 [T,II, 173-176].

- 1931a. "Algebraische Repräsentanten der Funktionen 'bis auf eine Menge vom Masse Null'", *Journal für reine und angewandte Mathematik* 165, págs. 109-115 [T,II, 213-219].
- 1931b. "Bermerkungen zu den Ausführungen von Herrn St. Lesniewski über meine Arbeit 'Zur Hilbertschen Beweistheorie'", *Fundamenta Mathematicae* 17, pág. 331-334 [T,II, 230-233].
- 1931c. "Die Eindeutigkeit der Schrodingerschen Operatoren", *Mathematische Annalen* 104, págs. 570-578 [T,II, 220-229].
- 1931d. "Die formalistische Grundlegung der Mathematik", *Erkenntniss* 2, págs. 116-121 [T,II, 234-239].
- 1931e. "Über Funktionen von Funktionaloperatoren", *Annals of Mathematics* 32, págs. 191-226 [T,II, 177-212].
- 1932a. "Einige Satze über messbare Abbildungen", *Annals of Mathematics* 33, págs. 574-586 [T,II, 294-306].
- 1932b. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlín, Springer, Nueva York, Dover Publications, 1943; Presses Universitaires de France, 1947; Madrid, Instituto de Matemáticas "Jorge Juan", 1949, traducido por Robert T. Beyer, Princeton University Press, 1955.
- 1932c. "Physical Applications of the Ergodic Hypothesis", *Proceedings of the National Academy of Sciences* 18, págs. 263-266 [T,II, 274-277].
- 1932d. "Proof of the Quasi-Ergodic Hypothesis", *Proceedings of the National Academy of Sciences* 18, págs. 70-82 [T,II, 260-273].
- 1932e. "Über adjungierte Funktionaloperatoren", *Annals of Mathematics* 33, págs. 294-310 [T,II, 242-258].
- 1932f. "Über einen Satz von Herrn M.H. Stone", *Annals of Mathematics* 33, págs. 567-573 [T,II, 287-293].
- 1932g. "Zum Beweise des Minkowskischen Satze über Linearformen", *Mathematische Zeitschrift* 30, págs. 1-2. [T,II, 240-241].
- 1932h. "Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik." *Annals of Mathematics* 33, págs. 587-642 [T,II, 307-362].
- 1932i. "Zusatze zur Arbeit 'Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik'." *Annals of Mathematics* 33, págs. 789-791 [T,II, 363-365].
1932. Bernard O. Koopman y v. N., "Dynamical Systems of Continuous Spectra", *Proceedings of the National Academy of Science* 18, págs. 255-263 [T,II, 278-286].
- 1933a. "A koordinata-meres pontossaganak hatarai az elektron Dirac-fele elmeleteben (Über die Grenzen der Koordinatenmessungs-Genauigkeit in der Diracschen Theorie des Elektrons)", *Mathematikai es Termesztudományi ertesito, a M.Tud. akademia III. esztalganak folyoirata. Mathematischer und naturwissenschaftlicher anzeiger der Ungarnischen akademie der wissensschaft* 50, págs. 366-385 [T,II, 387-406].
- 1933b. "Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen", *Annals of Mathematics* 34, págs. 170-190 [T,II, 366-386].
- 1934a. "Almost Periodic Functions in a Group I", *Transactions of the American Mathematical Society* 36, págs. 445-492 [T,II, 454-502].

- 1934b. "Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen." *Compositio Mathematica* 1, págs. 106-114 [T,II,445-453].
1934. Pascual Jordan, v. N. y Eugene Wigner, "On an Algebraic Generalization of the Quantum Mechanical Formalism." *Annals of Mathematics* 35, págs. 29-64 [T,II, 409-444].
1934. Abraham H. Taub, Oswald Veblen y v. N., "The Dirac Equation in Projective Relativity." *National Academy of Sciences: Proceedings* 20, págs. 383-388 [T, II, 502-507].
- 1935a. "Charakterisierung des Spektrums eines Integraloperators", *Actualités Scientifique et Industrielles* 229. "Exposés Math., publiés à la mémoire de J. Herbrand, No. 13 (Paris) [T,IV, 38-55].
- 1935b. "On Complete Topological Spaces", *Transactions of the American Mathematical Society* 37, págs. 1-20 [T,II, 508-527].
- 1935c. "On Normal Operators", *Proceedings of the National Academy of Sciences* 21, págs. 366-369 [T,IV, 56-59].
- 1935a. Salomon Bochner y v. N., "Almost Periodic Functions in Groups II", *Transactions of the American Mathematical Society* 37, págs. 21-50 [T,II, 528-557].
- 1935b. Salomon Bochner y v.N. "On Compact Solutions of Operational-Differential Equations I", *Annals of Mathematics* 36, págs. 255-291 [T,IV, 1-37].
1935. Pascual Jordan y v. N., "On Inner Products in Linear, Metric Spaces", *Annals of Mathematics* 36, págs. 719-723 [T,IV, 60-64].
1935. Con Marshall H. Stone, "The Determination of Representative Elements in the Residual Classes of a Boolean Algebra", *Fundamenta Mathematicae* 25, págs. 353-378 [T,IV, 65-90]
- 1936a. "Continuous Geometry", *Proceedings of the National Academy of Sciences* 22, págs. 92-100 [T,IV, 126-142].
- 1936b. "Examples of Continuous Geometries", *Proceedings of the National Academy of Sciences* 22, págs. 101-108.
- 1936c. "On a Certain Topology for Rings of Operators", *Annals of Mathematics* 37, págs. 111-115 [T,III, 1-5].
- 1936d. "On an Algebraic Generalization of the Quantum Mechanical Formalism (Part I)", *Matematicheskije Sbornik* 1, págs. 415-484 [T,III, 492-559].
- 1936e. "On Regular Rings", *Proceedings of the National Academy of Sciences* 22, págs. 707-713 [T,IV, 143-149].
- 1936f. "The Uniqueness of Haar's Measure", *Matematicheskije Sbornik* 1, págs. 721-734 [T,IV, 91-104].
1936. Garrett Birkhoff y v.N. "The Logic of Quantum Mechanics", *Annals of Mathematics* 37, págs. 823-843 [T,IV, 105-125].
1936. Francis J. Murray y v. N., "On Rings of Operators", *Annals of Mathematics* 37, págs. 116-229 [T,III, 6-119].
- 1937a. "Algebraic Theory of Continuous Geometries", *Proceedings of the National Academy of Sciences* 23, págs. 16-22 [T, IV, 150-156].
- 1937b. "Continuous Rings and Their Arithmetics", *Proceedings of the National Academy of Sciences* 23, págs. 341-349 [T,IV, 158-167].
- 1937c. "Some Matrix-Inequalities and Metrization of Matrix-Space", *Tomskii University Review* 1, págs. 286-300 [T,IV, 205-219].

1937d. "Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes", *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* 3, págs. 73-83.

1937. K. Kuratowski y v. N., "On Some Analytic Sets Defined by Transfinite Induction", *Annals of Mathematics* 38, págs. 521-525 [T,IV, 200-204].

1937. Francis J. Murray y v. N., "On Rings of Operators II", *Transactions of the American Mathematical Society* 41, págs. 208-248 [T,III, 120-160].

1938. "On Infinite Direct Products", *Compositio Mathematica* 6, págs. 1-77 [T,III, 322-399].

1940. "On Rings of Operators III", *Annals of Mathematics* 41, págs. 94-161 [T,III, 161-228].

1940. v. N. e Israel Halperin, "On the Transitivity of Perspective Mappings", *Annals of Mathematics* 41, págs. 87-93 [T,IV, 168-174]

1940. Con Robert H. Kent, "The Estimation of the Probable Error from Successive Differences", Informe 175 del Laboratorio de Investigaciones Balísticas, 14 de febrero.

1940. Eugene Wigner y v. N., "Minimally Almost Periodic Groups", *Annals of Mathematics* 41, págs. 746-750 [T,IV, 220-224].

1941a. "Distributions of the Ratio of the Mean Square Successive Difference to the Variance", *Annals of Mathematical Statistics* 12, págs. 367-395 [T,IV, 452-480].

1941b. "Optimum Aiming at an Imperfectly Located Target", Apéndice de *Optimum Spacing of Bombs of Shots in the Presence of Systematic Errors*, de Louis S. Dederick y Robert H. Kent. Informe 241 del Laboratorio de Investigaciones Balísticas, 3 de julio [T,IV, 492-506].

1941c. "Shock Waves Started by an Infinitesimally Short Detonation of Given (Positive and Finite) Energy", Concejo de Investigaciones de Defensa Nacional, Div. 8, 30 de junio, Documento AM-9 del Gobierno de los Estados Unidos.

1941. v. N. e Isaac J. Schoenberg, "Fourier Integrals and Metric Geometry", *Transactions of American Mathematical Society* 50, págs. 226-251 [T,IV, 225-250].

1941. v. N., Robert H. Kent, H. R. Bellinson y Bertha I. Hart. "The Mean Square Successive Difference", *Annals of Mathematical Statistics* 12, págs. 153-162 [T,IV, 442-452].

1942a. "A Further Remark Concerning the Distribution of the Ratio of the Mean Square Successive Difference to the Variance", *Annals of Mathematical Statistics* 13, págs. 86-88 [T,IV, 481-483].

1942b. "Approximate Properties of Matrices of High Finite Order", *Portugaliae Mathematica* 3, págs. 1-62 [T,IV, 270-331].

1942c. Nota de "Tabulation of the Probabilities for the Ratio of the Mean Square Successive Difference to the Variance" de Bertha I. Hart, *Annals of Mathematical Statistics* 13, págs. 207-214 [T,IV, 484-491].

- 1942d. "Theory of Detonation Waves", Informe de progreso al 1º de abril de 1942, Documento PB 31090 del Gobierno de los Estados Unidos, 4 de mayo, [T,VI, 203-218].
1942. Subrahmanyan Chandrasekhar y v. N., "The Statistics of the Gravitational Field Arising from a Random Distribution of Stars I", *Astrophysical Journal* 95, págs. 489-531 [T,VI, 102-144].
1942. Paul R. Halmos y v. N., "Operator Methods in Classical Mechanics II", *Annals of Mathematics* 43, págs. 332-350 [T,IV, 251-269].
- 1943a. *Oblique Reflection of Shocks*, Documento PB 37079 del Gobierno de los Estados Unidos, 12 de octubre [T,VI, 238-299].
- 1943b. "On Some Algebraical Properties of Operator Rings", *Annals of Mathematics* 44, págs. 709-715.
- 1943c. "Theory of Shock Waves", Informe de progreso al 31 de agosto de 1942 Documento PB.32719 del Gobierno de los Estados Unidos, 29 de enero [T,VI, 178-202].
- 1943d (?) Informe de Progreso sobre "Theory of Shock Waves", Informe No.1140 (informe final bajo contrato OEMsr-218), enero.
- 1943e (?) "Shadowgraph determination of shock-wave strength", Informes de Investigaciones Explosivas de la Oficina de Pertrechos, No.11, 25 de octubre.
1943. Subrahmanyan Chandrasekhar y v. N., "The Statistics of the Gravitational Field Arising from a Random Distribution of Stars II. The Speed of Fluctuations; Dynamical Friction; Spatial Correlations", *Astrophysical Journal* 97, págs. 1-27 [T,VI, 145-171]
1943. Francis J. Murray y v. N., "On Rings of Operators IV", *Annals of Mathematics* 44, págs. 716-808 [T,III, 229-321].
1943. Con Raymond J. Seeger, "On Oblique Reflection and Collision of Shock Waves", Documento PB 31918 del Gobierno de los Estados Unidos. 20 de septiembre.
- 1944a. "Introductory Remarks"(ap. I), "Theory of the Spinning Detonation" (ap. XII), "Theory of the Intermediate Product" (ap. XIII), en *Report of Informal Technical Conference on the Mechanism of Detonation*. Documento AM-570 del Gobierno de los Estados Unidos, 10 de abril.
- 1944b. "Proposal and Analysis of a Numerical Method for the Treatment of Hydrodynamical Shock Problems", Informe 108, 1R AMG-IAS No.1, entregado por el Grupo de Matemática Aplicada, Instituto de Estudios Avanzados al Comité de Investigaciones de Defensa Nacional del Panel de Matemática Aplicada, 20 de marzo. Documento OSRD-3617 del Gobierno de los Estados Unidos [T,VI, 361-379].
- 1944c. "Riemann Method; Shock Waves and Discontinuities (One-Dimensional), Two-Dimensional Hydrodynamics", Conferencias en *Shock Hydrodynamics and Blast Waves*, por H.A. Bethe, K. Fuchs, J. von Neumann, R. Peierls y W.G. Penney. Notas de J. O. Hirschfelder. Documento AECD-2860 del Gobierno de los Estados Unidos. 28 de octubre.

1944d (?). "Surface Water Waves Excited by an Underwater Explosion", Memo a J. Robert Oppenheimer., LASL, LAMS-128 28 de agosto. Información secreta, restringida.

1944e (?). Observaciones sobre el Informe de R. R. Halverson, The Effect of Air Burst on the Blast from Bombs and Small Charges, Part II., Memo a J. Robert Oppenheimer (AM-863) C. 23 de octubre.

1944. v. N. y Oskar Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, Princeton University Press.

1944. Resumen de la conferencia de J. von Neumann en la reunión sobre alturas óptimas el 22 de septiembre de 1944. Memo a N. F. Ramsey de B. Waldman. Laboratorio Científico de Los Alamos (LAMD-46), 7 de diciembre. Información secreta, restringida.

1944. (Por Harry Polachek y Raymond J. Seeger.) "Regular Reflection of Shocks in an Ideal Gas", Informes de Investigaciones Explosivas de la Oficina de Pertrechos, No. 13, 12 de febrero.

1944. (Por Harry Polachek y Raymond J. Seeger.) "Interaction of Shock-Waves in Water-like Substances", Informes de Investigaciones Explosivas de la Oficina de Pertrechos, No. 14, 16 de agosto.

1944. (Por P. C. Keenan y Raymond J. Seeger.) "Analysis of Data on Shock Intersections", Informe de Progreso I. Oficina de Pertrechos, Informe de Investigaciones Explosivas No. 15. "This analysis was made with J. von Neumann." (AM-496). C. 3 de febrero.

1945a. "A Model of General Economic Equilibrium." *Review of Economic Studies* 13, págs. 1-9. [T,VI,29-37]

1945b. Primer Borrador de un Informe del EDVAC. Informe preparado para el Departamento de Pertrechos del Ejército de los Estados Unidos bajo el Contrato W-670-ORD-4926. Publicado nuevamente en Nancy Stern, *From ENIAC to UNIVAC*, págs. 177-246 Bedford, MA, Digital Press, 1981 [AB, 17-82].

1945c. "Refraction, Intersection and Reflection of Shock Waves", en *Conference on Supersonic Flow and Shock Waves*, Documento AM-1663 del Gobierno de los Estados Unidos, 16 de julio, págs. 4-12 [T,VI, 300-308].

1945d. *Some Considerations on Shaped Charge Assembly*. Resultado de discusiones en el Laboratorio de Investigaciones Balísticas, Bruceton, con MacDougall, Paul y Messerly. Laboratorio Científico de Los Alamos, LAMS-196, 23 de enero. Información secreta, restringida.

1945. John W. Calkin, v. N., y R. Peierls. *The Similarity Solution for a Collapsing Spherical Cavity Near Zero Radius*, LASL, LA-210 S. 31 de enero.

1945. (Por Hans A. Bethe.) "Radiation Hydrodynamics, Part I", trabajo realizado por J. von Neumann y otros, Laboratorio Científico de Los Alamos, LA-322, 3 de julio. Información secreta, restringida.

1945. Con Abraham H. Taub, "Flying Wind Tunnel Experiments", Documento PB 33263 del Gobierno de los Estados Unidos, 5 de noviembre.

- 1946a. Informe sobre Instrumentation Program of Technical Staff, vol.2. Operación Crossroads. Anexo Q. Comentarios concernientes al Informe del Dr. W.G. Penney, Depth for Prueba C. Grupo de Instrumentación de la Oficina de Barcos. Fuerza de Tareas Conjunta Uno. XRD-210 (XR-156, v.2) 1º de diciembre. Información secreta, restringida.
- 1946b. Declaración, 31 de enero. Audiencias ante el Comité Especial de Energía Atómica, Senado de los Estados Unidos. 77º Congreso, 2ª sesión, sobre S.1717, Proyecto para el Desarrollo y Control de la Energía Atómica.
1946. Egon Bretscher, D. F. Frankel, Darol K. Froman, Nicholas Metropolis, Philip Morrison, Lothar W. Nordheim, Edward Teller, A. Turkevich y v. N., *Report on the Conference on the Super*, Laboratorio Científico de Los Alamos, LA-575 12 de junio. Información secreta, restringida.
1946. Herman H. Goldstine y v. N., "On the Principles of Large Scale Computing Machines", (inédito) [T,V, 1-32; AB, 315-348].
1946. Robert Schatten y v. N., "The Cross-Space of Linear Transformations II", *Annals of Mathematics* 47, págs. 608-630 [T,IV,386-408].
1946. v. N. y Maurice M. Shapiro, *Underwater Explosion of a Nuclear Bomb*, LASL, LA-545. También fue publicado como el Capítulo 14 en el volumen 7, punto III de las Series Técnicas de Los Alamos (LA-1022), 8 de abril. Información secreta, restringida.
1946. Valentine Bargmann, Deane Montgomery y v. N., "Solution of Linear Systems of High Order", Informe preparado por la Oficina Naval de Pertrechos bajo el contrato Nord-9596 [T,V, 421-477].
1946. Arthur W. Burks, Herman H. Goldstine y v. N., "Preliminary Discussion of the Logical Design of an Electronic Computing Instrument. Part I, Vol I", Informe preparado por el Departamento de Pertrechos del Ejército de los Estados Unidos bajo el contrato W-36-034-ORD-7481 [T,V, 34-79; AB, 97-142].
- 1947a. "The Mathematician", En *The Works of the Mind*, págs. 180-196. Preparado por Robert B. Heywood, Chicago, University of Chicago Press [T,I, 1-9].
- 1947b. "The Point Source Solution", en *Blast Wave*, Documento LA-2000 del Gobierno de los Estados Unidos, 13 de agosto, págs. 27-55 [T,VI, 219-237].
- 1947c. "The Future Role of Rapid Computing in Meteorology", *Aeronautical Engineering Review* 6, 4 (abril), pág. 30.
- 1947d. "Discussion of a Maximum Problem", manuscrito inédito fechado 15-16 de noviembre de 1947. Preparado por A. W. Tucker y H. W. Kuhn [T,VI, 89-95].
- 1947a. v. N. y Herman H. Goldstine "Numerical Inverting of Matrices of High Order", *Bulletin of the American Mathematical Society* 53, págs. 1021-1099 [T, V, 478-557].
- 1947b. Herman H. Goldstine J. v. N., "Planning and Cocting of Problems for an Electronic Computing Instrument. Br II, Vol. I",

Informe procesado para el Departamento de Pertrechos del ejército de los Estados Unidos bajo el contrato W-36-034-ORD-7481 [T,V, 80-151; AB, 151-222].

1947. Frederick Reines y v. N., "The Mach Effect and the Height of Burst", en *Blast Wave*, Documento LA-2000 del Gobierno de los Estados Unidos, 13 de agosto, X-11-X-84 [T,VI, 309-347].

1947a. v. N. y Robert D. Richtmyer, "On the Numerical Solution of Partial Differential Equations of Parabolic Type", Documento LA-657 del Gobierno de los Estados Unidos, 25 de diciembre [T,V, 652-663].

1947b. Robert D. Richtmyer y v. N., "Statistical Methods in Neutron Diffusion", Documento LAMS-551 del Gobierno de los Estados Unidos, 9 de abril [T,V, 751-764].

1948a. Primer Informe sobre el Cálculo Numérico de Problemas de Flujo 22 de junio - 6 de julio (inédito) [T,V, 664-712].

1948b. "On the Theory of Stationary Detonation Waves", Archivo No. X122, BRL, Campo de Pruebas de Aberdeen, MD, 20 de septiembre.

1948c. Segundo Informe sobre el Cálculo Numérico de Problemas de Flujo, 25 de julio-22 de agosto (inédito) [T,V, 713-750].

1948a. Herman H. Goldstine y v. N., "Planning and Coding of Problems for an Electronic Computing Instrument. Part II, Vol. II." Informe preparado para el Departamento de Pertrechos del Ejército de los Estados Unidos bajo el contrato W-36-034-ORD-7481 [T,V, 152-214; AB, 223-285].

1948b. Herman H. Goldstine y v. N., "Planning and Coding of Problems for an Electronic Computing Instrument. Part II, Vol. III", Informe preparado para el Departamento de Pertrechos del Ejército de los Estados Unidos bajo el contrato W-36-034-ORD-7481 [T,V, 215-235; AB, 286-306].

1948. Robert Schatten y v. N., "The Cross-Space of Linear Transformations III", *Annals of Mathematics* 49, págs. 557-582 [T,IV, 409-434].

1949a. "On Rings of Operators: Reduction Theory", *Annals of Mathematics* 50, págs. 401-485 [T,III, 400-491].

1949b. "Recent Theories of Turbulence", Informe hecho para la Oficina de Investigaciones Navales (inédito) [T,VI, 437-472].

1949c. Reseña de *Cybernetics. Physics Today* 2, págs. 33-34, de Norbert Wiener.

1949. G. Foster Evans, v. N. y Stanislaw M. Ulam, *Outline of a Method for the Calculation of the Progress of Thermonuclear Reactions*, LASL, LAMS-831 7 de enero. Información secreta, restringida.

1950. *Functional Operators*. 2 vol., *Annals of Mathematics Studies* no. 21,22 Princeton, Princeton University Press.

1950. George W. Brown y v. N., "Solutions of Games by Differential Equations", *Annals of Mathematics Studies* (Princeton University Press), 24, págs. 73-79 [T,VI, 38-43].

1950. v. N. y Robert D. Richtmyer. "A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks", *Journal of Applied Physics* 21, págs. 232-237 [T,VI, 380-385].

1950. Irving E. Segal y v. N., "A Theorem on Unitary Representations of Semisimple Lie Groups", *Annals of Mathematics* 52, págs. 509-517 [T,IV, 332-340].
1950. Jule G. Charney, Ragnar Fjortoft y v. N., "Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation", *Tellus* 2, págs. 237-254 [T,VI, 413].
1950. Nicholas C. Metropolis, George Reitwiesner y v. N., "Statistical Treatment of Values of First 2000 Decimal Digits of e and of pi Calculated on the ENIAC", *Mathematical Tables and Other Aids to Computation* 4, págs. 109-111 [T,V, 765-767].
- 1951a. "Discussion on the Existence and Uniqueness or Multiplicity of Solutions of the Aerodynamical Equations", en *Problems of Cosmical Aerodynamics*, págs. 75-84 Oficina Central de Documentos Aéreos.
- 1951b. "Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes", *Mathematische Nachrichten* 4, págs. 258-281 [T,IV, 341-364].
- 1951c. "The Future of High-Speed Computing", en *Proceedings. Computation Seminar*, 5-9 de diciembre de 1949, pág. 13 Nueva York, IBM Corporation [T,V, 236; AB, 349].
- 1951d. "The General and Logical Theory of Automata", en *Cerebral Mechanisms in Behavior-The Hixon Symposium*, págs. 1-31. Preparado por L. A. Jeffrees Nueva York, Wiley [T,V, 288-328; AB, 391-431].
- 1951e. "Various Techniques Used in Connection with Random Digits", *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Series de Matemática Aplicada, 12, págs. 36-38 [T,V, 768-770].
- 1951f. "Description of the Conformal Mapping Method for the Integration of Partial Differential Equation Systems with 1 plus 2 Independent Variables", trabajo inédito, escrito en el período comprendido entre el 16 de diciembre de 1950 y el 8 de enero de 1951. revisado por A. H. Taub... [T,VI, 473-476].
1951. John W. Calkin, Cerda Evans, Foster Evans, v. N. y Klari von Neumann, *The Burning of D-T Mixtures in a Spherical Geometry*. Laboratorio Científico de Los Alamos, LA-1233, 23 de abril. Información secreta, restringida.
1951. John W. Calkin, Cerda Evans, Foster Evans, v. N., y Klari von Neumann. Suplemento de *The Burning of D-T Mixtures in a Spherical Geometry*, Laboratorio Científico de Los Alamos, LA-1237, 23 de abril. Información secreta, restringida.
- 1951, Herman H. Goldstine y v. N., "Numerical Inverting of matrices of High Order II", *Proceedings of the American Mathematical Society* 2, págs. 188-202 [T,V, 558-572].
1951. (Por Robert D. Richtmyer.) Proyecto Hippo. ("Mechanized Calculation of Efficiencies and of Other Features of a Fission Bomb Explosion.") Informe final sobre el proyecto Hippo original y resultados para problemas I y II. (Trabajo realizado por J. von Neumann y otros.) Laboratorio Científico de Los Alamos, LA-1282 10 de agosto. Información secreta, restringida.

1951. (Por Arturo W. Rosenblueth.) "Aberdeen Calculation on the Cylinder." (Trabajo realizado por J. von Neumann y otros.) Laboratorio Científico de Los Alamos, LA-1288 31 de enero. Información secreta, restringida.

1951. Observación de Debate Referida al Trabajo de C. S. Smith, "Grain Shapes and Other Metallurgical Applications of Topology." En *Metal Interfaces*, págs. 108-110, Cleveland, American Society for Metals.

1953a. "A Certain Zero-Sum Two-Person Game Equivalent to the Optimal Assignment Problem", *Annals of Mathematics Studies* (Princeton University Press), 28, págs. 5-12 [T,VI, 44-49].

1953b. "Communication on the Borel Notes", *Econometrica* 21, págs. 124-125 [T,VI, 27-28].

1953. Enrico Fermi y v. N. *Taylor Instability at the Boundary of Two Incompressible Liquids*, Documento AECU-2979 del Gobierno de los Estados Unidos, punto 2, págs. 7-13 [T,VI, 431-434].

1953. v. N. y Herman H. Goldstine, "A Numerical Study of a Conjecture of Kummer", *Mathematical Tables and Other Aids to Computation* 7 (42), págs. 133-134 [T,V, 771-772].

1953. Con Donald B. Gillies y J. P. Mayberry, "Two Variants of Poker", *Annals of Mathematics Studies* (Princeton University Press), 28, págs. 13-50 [T,VI, 50-81].

1954a. "A Numerical Method to Determine Optimum Strategy", *Naval Research Logistics Quarterly* 1, págs. 109-115. [T,VI, 82-88]

1954b. "Entwicklung und Ausnutzung neuerer mathematischer Maschinen", *Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen*, vol.45 [T,V, 148-187].

1954c. "Non-linear Capacitance or Inductance Switching, Amplifying and Memory Devices", Trabajo básico para la patente 2.815.488, archivado el 28 de abril de 1954 (inérito), [T,V, 379-419]

1954d. "The NORC and Problems in High Speed Computing", discurso en la primera demostración pública del Calculador IBM de Investigaciones de Pertrechos Navales, 2 de diciembre de 1954 [T,V, 238-247; AB, 350-359].

1954e. "The role of Mathematics in the Sciences and in Society", discurso en la Cuarta Conferencia de la Asociación de Alumni Graduados de Princeton, junio de 1954 [T,VI, 477-490].

1954. v. N. y Edward Teller, *Applications of the Hot Sphere Generated by an A-Bomb*, Laboratorio de Radiaciones de la Universidad de California, Livermore UCRL-4412 noviembre. Información secreta, restringida.

1954. Eugene P. Wigner y v. N., "Significance of Loewner's Theorem in the Quantum Theory of Collisions", *Annals of Mathematics* 59, págs. 418-433 [T,IV, 365-380].

1955a. "Can We Survive Technology?", *Fortune* (junio), págs. 106-108, 151-152 [T,VI, 504-519].

1955b. "Defense in Atomic War", *The Scientific Bases of Weapons*, págs. 21-23 [T,VI, 523-525].

1955c. "Impact of Atomic Energy on the Physical and Chemical Sciences", *Technical Review* (noviembre), págs. 15-17 [T,VI, 520-522].

1955d. "Method in the Physical Sciences", en *The Unity of Knowledge*, págs. 157-164. Preparado por L. Leary, Nueva York, Doubleday [T,VI, 491-498].

1955e. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, traducido del alemán por Robert T. Beyer, Princeton, Princeton University Press.

1955. Herman H. Goldstine y v. N., "Blast Wave Calculation", *Communications on Pure and Applied Mathematics* 8, págs. 327-353 [T,VI, 386-412]. 1955. v. N. y Bryant Tuckerman. "Continued Fraction Expansion of  $2^{1/3}$ ", *Mathematical Tables and Other Aids to Computation* 9, págs. 23-24. [T,V, 773]

1955. Allen Devinatz, Adolf E. Nussbaum y v. N. "On the Permutability of Self-Adjoint Operators." *Annals Mathematics* 62, págs. 199-203 [T,IV, 381-385].

1956a. "Probabilistic Logics and the Synthesis of Reliable Organisms from Unreliable Components", en *Automata Studies*, págs. 43-98. Preparado por Claude E. Shannon y John McCarthy. Princeton, Princeton University Press [T,V, 329-378; AB, 553-602].

1956b. "The Impact of Recent Developments in Science on the Economy and on Economics", *Looking Ahead* 4, pág. 11 [T,VI, 100-101].

1958a. *The Computer and the Brain*, New Haven, Yale University Press.

1958b. "Non-isomorphism of Certain Continuous Rings." *Annals of Mathematics* 67, págs. 485-496 [T,IV, 176-188].

1959. Herman H. Goldstine, Francis J. Murray y v. N. "The Jacobi Method for Real Symmetric Matrices", *Association for Computing Machinery. Journal* 6, págs. 59-96 [T,V, 573-610].

1959. A. Blair, Nicholas Metropolis, v. N., Abraham H. Taub y M. Tsingou. "A Study of a Numerical Solution to a Two-Dimensional Hydrodynamical Problem.", *Mathematical Tables and Other Aids to Computation* 13, págs. 145-184 [T,V, 611-651].

1960. *Continuous Geometry*, Princeton, Princeton University Press.

1966. *Theory of Self-Reproducing Automata*. Preparado y completado por Arthur W. Burks, Urbana, University of Illinois Press. [AB 432-552].

## Referencias

- Aspray, W. [1985]: The Scientific Conceptualization of Information: A Survey, *Annals of the History of Computing*, **7**, 117-140.
- Aspray, W. [1987]: The Mathematical Reception of the modern Computer: John von Neumann and the Institute for Advanced Study Computer, en *Studies in the History of Mathematics* (ed. E. R. Phillips), MAA, 166-194.
- Aspray, W. [1990]: *John von Neumann and the origins of modern computing*, The MIT Press, Cambridge, MA. Traducción española de E. Alterman en Gedisa, Barcelona, 1993.
- Aspray, W. y Burks, A. [1987] (eds.): *Papers of John von Neumann on Computing and Computer Science*, The MIT Press, Cambridge, MA y Tomash Publishers, Los Angeles.
- Benardy, C. et al. [1994]: Rapport sur le calcul scientifique, *Matapli*, SMAI, **38**, 23-44.
- Birkhoff, G. [1958]: Von Neumann and Lattice Theory, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **64**, 50-56.
- Brody F. y Vamos, T. [1995]: *The Neumann Compendium*, World Scientific.
- Charney, J. [1949]: On a Physical Basis for Numerical Prediction of large-Scale Motions in the Atmosphere, *Journal of Meteorology*, **6**, 371-385.
- Courant, R., Friedrichs, K. y Lewy, H. [1928]: Uber die partiellen Diffenzengleichungen der Matematischen Physik, *Matematische Annalen*, **100**, 32-74.
- Dautray, R. et al. [1992]: Le calcul scientifique, La vie des Sciences, *Comptes Rendus Ac. Sc. Paris*, **9**, 63-83.
- Davis, P. [1996]: Numerical Life at the Dawn of the Digital Computer Era, *SIAM News*, **29**, 1 y 7.
- Díaz, J.I. [1994]: On the controllability of some simple climate models, en el libro *Environment, Economics and their Mathematical Models*, (eds. J.I.Díaz y J.-L. Lions ), Masson, Paris, 29-44.
- Dieudonné, J. [1976]: Von Neumann, Johan (or John), *Dictionary of Scientific Biography*, **14**, 88-92.
- Dirac, P.A.M. [1930]: *The Principles of Quantum Mechanics*, Clarendon, Oxford.
- Goldstine, H. [1972]: *The Computer from Pascal to von Neumann*, Princeton Univ. Press.
- Halmos, P.R. [1958]: Von Neumann on Measure and Ergodic Theory, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **64**, 86-94.
- Halmos, P.R. [1973]: The legend of John von Neumann, *American Mathematical Monthly*, **80**, 382-394.
- Heims, S.J. [1982]: *John von Neumann and Norbert Wiener*, The MIT Press, Cambridge, MA.
- Kadison, R.V. [1958]: Theory of Operators, Part II. Operator Algebras, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **64**, 61-85.
- Murray, F.J. [1958]: Theory of Operators, Part I. Single Operators, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **64**, 57-60.
- Newman, J.R. [1956] (ed.): *The world of Mathematics*, Simon and Schuster, Inc., New York. Traducción española de M. Sacristan et al. bajo el título *Sigma*, Ediciones Grijalbo, S.A., Barcelona, 1968.
- Lions, J.-L. [1990]: *El Planeta Tierra: El papel de la Matemáticas y los super-ordenadores*, Série del Instituto de España nº 2, Espasa Calpe, Madrid.
- Lions, J.-L. [1991]: De la machine à calculer de Pascal aux ordinateurs, La Vie des Sciences, *Comptes Rendus Ac. Sc. Paris*, **8**, 221-240.
- Lions, J.-L. [1993]: Le temps du contrôle, La Vie des Sciences, *Comptes Rendus Ac. Sc. Paris*, **10**, 305-328.
- Phillips, N.A. [1951]: A Simple Three-Dimensional Model for the Study of Large-Scale

- Extratropical Flow Patterns, *Journal of Meteorology*, **8**, 381-394.
- Poundstone, W. [1992]: *Prisoner's dilemma: John von Neumann, Game theory and the Puzzle of the Bomb*, Dover. Traducción española de D. Manzanares, Alianza Editorial, Madrid, 1995
- Taub, A.H. [1963] (ed.): *John von Neumann: Collected Works*, seis volúmenes, Pergamon Press, New York.
- Tobin, M., Chocate, L. y Beller, D. [1993]: *Use of Inertial Confinement Fusion for Nuclear Weapons Effects Simulations*, Sandia National Laboratory Reports, Albuquerque, NM.
- Ulam, S. [1958]: John von Neumann 1903-1957, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **64**, 1-49.
- Ulam, S. [1976]: *Adventures of a Mathematician*, Scribner, New York.
- Van Hove, L. [1958]: Von Neumann's Contributions to Quantum Theory, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **64**, 95-99.
- Vonneuman, N.A. [1987]: *John von Neumann as seen by his brother*, Meadowbrook, PA.