

Conocer tras ver para actuar: una filosofía matemática

Jesús Ildefonso Díaz Díaz
Catedrático de Matemática Aplicada de la UCM,
Académico Numerario de la
Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

Más de dos mil años de constante fecundidad en el seno de todas las civilizaciones no han podido evitar la opinión generalizada sobre la matemática como terreno inaccesible a los no científicos. Incluso personas con estudios superiores están convencidos de que no son capaces de entender casi ningún razonamiento matemático. Ya desde la Antigüedad los avances matemáticos eran ininteligibles para un auditorio de cultura general. La literatura nos ofrece numerosos testimonios de ello. Por señalar uno sólo baste citar la irónica descripción del país de los matemáticos, la isla de Laputa, en el tercero de *Los viajes de Gulliver* del irlandés Jonathan Swift, en 1726.

Para muchos la matemática se reduce al cálculo con números aunque con frecuencia cuando conversan con un matemático se asombran al comprobar con placer que ellos mismos son más diestros en las cuentas. No es extraño. El cálculo con números forma parte de la Aritmética, una parte insignificante de la Teoría de Números y que a su vez, pese a su belleza y relevancia, no es más que uno de los muchos campos de la matemática. En la Clasificación Temática Matemática de 1991, la Teoría de Números aparece como una sección (la 11-XX) entre las noventa y cuatro que la configuran.

Por otra parte, por muy extraños que parezcan los símbolos matemáticos no hay que olvidar que son sólo eso, símbolos, y que al igual que no es necesario saber leer una partitura para recibir las emociones que pueden llegar a provocar con su música tampoco es imprescindible saber reconocer la grafía matemática para adentrarse en su apasionante mundo.

La matemática es mucho más que números: se refiere a orden, modelos y estructuras, relaciones lógicas y, en suma, ideas. A mi juicio, la matemática permite ver tramas casi invisibles, conocer a qué obedecen y por qué adoptan estructuras concretas y, finalmente, permite diseñar y actuar hacia el progreso. Todo ello valorando la economía de pensamiento, deshaciéndose de lo irrelevante de cada caso. Es esto lo que la hace profunda y bella a la vez.

Bajo ese punto de vista no es de extrañar que cuando se asocia la matemática a algunos objetos materiales estos se limitan a aparatos de observación y medición de la astronomía, las variadas e ingeniosas máquinas pioneras de calcular mediante sofisticados artificios analógicos, y a lo sumo generosas colecciones de superficies y poliedros moldeados

sobre yeso. Cada una de esas piezas, de manera individualizada poseen una innegable belleza. Man Ray quedó tan impresionado por esa materialización de las ecuaciones matemáticas tras una visita al Institut Henri Poincaré de París que le llevó a recoger en *Shakespearian Equation* (1935-1948) una colección de fotos de *Objets mathématiques*.

Pese a esa belleza individualizada, la exhaustividad de las típicas muestras de esos objetos las asemejan a esas colecciones interminables de insectos, y por ello temibles, de los museos de Ciencias Naturales tradicionales. Son presentaciones de carácter contemplativo, de gran valor para quienes ya poseen la formación adecuada, pero de escaso o ningún interés para el gran público. Por el contrario, desde la última mitad de este siglo, precedidos por experiencias aisladas como el *Science Museum* de Londres (1851) y el *Palais de la Découverte* de París (1937), el museo de ciencias se desnuda de colecciones para dar un auge casi exclusivo al concepto frente al objeto, a la interacción frente a la mera contemplación. Se prescinde de los aspectos meramente descriptivos de la ciencia y la tecnología. El visitante es invitado a participar manipulando, lo que le conduce a la reflexión ante lo experimentado y así, finalmente, al método científico. Todo ello de una manera informal, placentera y lúdica.

En esta segunda concepción las exposiciones suelen tener un carácter interdisciplinar, prescindiendo de presentar la ciencia en parcelas disjuntas. No obstante, las experiencias y manipulaciones suelen referirse en su mayoría a la física y las ciencias de la naturaleza.

Los que cultivamos la matemática tenemos el privilegio de experimentar ese tipo de emociones, sensaciones y percepciones en el desarrollo de nuestra profesión. Pensar que ese privilegio sea compartido por el gran público, por el visitante de un museo, es algo que nos motiva en la apasionante tarea de la divulgación de la ciencia.

No parece descabellado conectar la reflexión sobre las experiencias a llevar a cabo en un museo con los mecanismos de aprendizaje y creación en matemáticas. Podría permitir un mejor diseño de los experimentos para conseguir los fines de entretenimiento lúdico propio de estos nuevos museos.

Escalar tan alto hasta indagar sobre la creación en matemáticas podría verse como desproporcionado para nuestros fines. Nada más erróneo. La mejor manera de que un visitante del museo adquiriera el conocimiento científico, matemático en nuestro caso, es hacer que viva el mismo proceso, tal y como lo vivieron los que lo produjeron.

Dos de los primeros matemáticos que se interesaron por los mecanismos que intervienen en la investigación en matemáticas fueron los franceses Henri Poincaré (1854-1912) y Jacques Hadamard (1865-1963). Autores ambos de contribuciones fundamentales en ecuaciones diferenciales y otros muchos campos de la matemática indagaron sobre su

propia experiencia. Hadamard llevó cabo un cuestionario que distribuyó entre numerosos matemáticos cuyas respuestas aparecieron en *L'Enseignement Mathématique* entre 1902 y 1905. Más tarde publicaría su famoso libro sobre Psicología Matemática (*The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Princeton, 1945).

Las reflexiones de Hadamard se han revelado de gran importancia en educación matemática. A diferencia de lo que caracteriza a la Inteligencia Artificial, no le preocupaba producir generadores de demostraciones de teoremas, sino indagar sobre la creatividad inconsciente y la variedad de modos mentales involucrados en la creación matemática, las posibles diferencias entre el pensamiento en Álgebra frente a Geometría y otras cuestiones afines. Se hizo eco de la teoría del psicólogo G.E. Müller en el pasado siglo, de que el pensamiento sin el lenguaje es imposible. Resaltó también la enorme importancia de lo visual y lo estético en el pensamiento matemático.

La existencia de distintos mecanismos propios de cada una de las grandes ramas de la matemática fue desde entonces objeto de una rica polémica que pervive en nuestros días. Desde los puntos de vista pedagógico y divulgativo es importante clarificar el tema pues los métodos de enseñanza y de estimular la experiencia matemática podrían ser de muy distinta naturaleza.

La respuesta de Einstein al cuestionario de Hadamard se mostraba ya en disonancia con la teoría de Müller. Según Einstein

“Las palabras o el lenguaje, escritas o habladas, no parecen jugar ningún papel en el mecanismo de mi parte de mi pensamiento. Las entidades psíquicas que parecen servir como elementos en mi pensamiento son ciertos signos e imágenes, más o menos claras, que pueden ser voluntariamente reproducidas y combinadas. Las palabras u otros signos convencionales han de ser buscados con trabajo solamente en una segunda fase, cuando el juego asociativo mencionado está suficientemente establecido y puede ser reproducido a voluntad”.

Hasta hace tan solo unos años, la única fuente de información sobre las representaciones mentales usadas en matemáticas eran las introspecciones de los propios matemáticos. Una excelente muestra es el libro *Para pensar mejor* de M. de Guzmán (Pirámide, Madrid, 1994). Recientemente, un equipo franco-americano de neurocientíficos liderado por S. Dehaene ha llevado a cabo un estudio, con ayuda de las nuevas tecnologías, mostrando la incidencia cerebral de experiencias matemáticas en partes bien diferenciadas del cerebro (S. Dehaene et al. : Sources of Mathematical Thinking: Behavioral and Brain-Imaging Evidence, *Science*, vol. 248, 970-974, 1999). Si bien el cálculo aritmético exacto moviliza el lóbulo frontal izquierdo, zona relacionada con la asociación verbal, el cálculo aproximado (en el que sólo se manejan ordenes de magnitud,

relación de orden, etc.) afecta a áreas bilaterales de los lóbulos parietales características de representaciones visuales y espaciales.

No cabe duda de que estos estudios, el conocimiento de las bases neurobiológicas de las emociones, el desarrollo de la noción de “inteligencia emocional”, introducida por D. Goleman, y las experiencias acumuladas en la década de los noventa (para algunos la *década del cerebro*) facilitarán el diseño de entretenidas e imaginativas experiencias matemáticas en los museos que activen la curiosidad evitando el largo camino del adiestramiento previo, probablemente más característico de las experiencias matemáticas ligadas a la asociación verbal.

No es este lugar de referirse a las múltiples experiencias matemáticas concretas que se podrían proponer. Muchos de los juegos matemáticos y una buena parte de las experiencias de lo que podríamos denominar “matemática recreativa tradicional” podrían ser de gran utilidad configurados con las técnicas avanzadas de animación y entretenimiento de nuestros días. En su lugar me referiré en el resto del artículo a ilustrar algunos ejemplos de experiencias matemáticas en relación con un campo menos tradicional que el que ya viene encauzado por las leyes de la física y que por otra parte está muy unido a la tradición de los museos de ciencias: las ciencias de la naturaleza. Me limitaré a unos pocos ejemplos que ilustren esos tres grandes tipos de experiencias matemáticas que a mi juicio constituyen la esencia del quehacer matemático: ver, conocer y actuar.

Mirar no es ver. La matemática permite ver lo invisible al mirar la naturaleza. Fijémonos en uno cualquiera de esos girasoles que nos llaman la atención como elemento armoniosamente repetido en esas grandes extensiones de cultivo que bordean nuestras carreteras. Al mirarlo podemos apreciar la armonía de sus semillas o pipas, el perfecto contraste entre su vivo amarillo y el verde de su tallo nos puede sugerir bellos temas pictóricos que no le fueron ajenos a Van Gogh. Incluso, su avidez por buscar al Sol hasta nos puede llevar a preguntarnos si los paneles solares que divisamos en nuestras ciudades reposan sobre principios que imiten su comportamiento.

Sin embargo, si analizamos con más detenimiento la disposición de sus semillas podemos apreciar que no están anárquicamente distribuidas sino que configuran unas curvas que han cautivado siempre a los artistas y artesanos: las espirales. Unas van en el sentido de giro de las agujas del reloj y otras en sentido contrario. Si todavía intentamos ser más precisos y armándonos de paciencia contamos el número de estos pares de espirales encontraremos que no son parejas de números cualesquiera: las más frecuentes son 21 y 34, 34 y 55, 55 y 89, según sea su tamaño. ¿Existirá alguna relación oculta entre esos pares de números o por el contrario obedecerán a un código aleatorio o indescifrable?

La respuesta comienza a tener un carácter sorprendente cuando constatamos que esos números aparecían en uno de los libros más antiguos de la matemática occidental: el *Liber Abaci* de 1202 de Leonardo de Pisa (1175-1240) apodado, en el siglo XIX, como Fibonacci (hijo de la bondad). La importancia capital del libro reside en ser el primero en introducir la aritmética indo-arábica en Europa. En el margen de una de sus páginas, ilustrando un problema relacionado con la cría de conejos aparecían los números 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, .., en donde podemos apreciar los números que encontramos al contar las espirales del girasol. Pero además, otras selecciones de esos números aparecen en la naturaleza cuando contamos las espirales, en uno y otro sentido, que forman las semillas de las margaritas (21 y 33) o las que forman los piñones de una piña (5 y 8).

Esa sucesión de números obedece a una ley fácilmente detectable: cada número es la suma de los dos anteriores ($a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$). Entre las muchas propiedades que se pueden encontrar al estudiar esa sucesión de números sólo destacaremos aquí una de ellas señalada por el astrónomo Johannes Kepler (1571-1630): a medida que vamos dividiendo un término de la sucesión a_n por su anterior a_{n-1} encontramos unos valores que se van acercando cada vez más hacia el número 1,618033... Con la ayuda del concepto de límite veríamos que si repitiésemos infinitamente esa división los valores convergerían hacia la razón áurea $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ utilizada ya por el escultor griego Fidias (490-430 a.C.), en los estudios de la figura humana de Leonardo da Vinci y en numerosos contextos artísticos, incluida la música.

Encontramos así lo que el físico, premio Nobel, Eugene Wigner denominaría hace cuarenta años *la irrazonable efectividad de las matemáticas en las ciencias naturales* al preguntarse las razones de la gran aplicabilidad de las matemáticas. Encontrar números característicos de la matemática como ϕ , π y e en los más extraños y dispares contextos es una experiencia que puede invitar a la reflexión también al visitante de un museo.

Ver no es conocer. Advertir esa posible trama oculta que permite la matemática no colma los deseos de conocer las razones de su existencia. Uno de los matemáticos pioneros en esa difícil tarea de *ver* en la naturaleza allí donde se *mira*, D'Arcy Thompson, decía que su voluminoso ensayo (*On growth and form*, Cambridge University Press, 1917) no era más que un prefacio de principio a fin. De la misma manera, la presencia de los fractales en la naturaleza (B. Mandelbrot, *La geometría fractal en la naturaleza*, Clotet-Tusquets, Barcelona, 1997) nos describe también un mundo complejo y rico pero rara vez nos desvela las razones fenomenológicas de su formación.

Esa voluntad de conocer yendo más allá de la mera contemplación es un paso aún más arduo que el primero pero ha estado en el ánimo de los hombres desde los albores de los tiempos. En realidad, es justo recordar que hasta mediados de nuestro siglo los grandes constructores de la matemática no se dedicaban de manera exclusiva a ella. La inmensa mayoría cultivaba otras muchas ciencias y empleaban la matemática para fundamentar experiencias particulares. Pese a los numerosos interrogantes aún planteados se puede decir que la física ha sido la ciencia en la que la matemática ha aportado una fundamentación imprescindible.

En el caso de las ciencias de la naturaleza las aportaciones de la matemática han tenido un carácter menos fundamental pasando a ser herramientas de gran utilidad para consolidar teorías. Como ejemplo reciente y cercano podríamos referirnos a los argumentos matemáticos expuestos por Juan Luis Arsuaga en su libro *El collar del Neandertal* (Ediciones Temas de Hoy, Madrid, 1999) para intentar reconstruir las características humanas del portador de la pelvis *Elvis* encontrada en La Sima de los Huesos de Atapuerca.

Una matemática mucho más compleja y minuciosa ha servido para progresar en la comprensión de algo tan misterioso como la justificación de las manchas de ciertos animales, caparazones y conchas marinas que simultaneando lo regular e irregular atraen nuestra fascinación. Sofisticados modelos matemáticos han permitido simular la reacción y difusión de sustancias químicas produciendo modificaciones locales de la pigmentación en forma de manchas como las de los leopardos, cebras y peces tropicales (J.D. Murray, *Mathematical Biology*, Springer, Berlin, 1993) o las de conchas tropicales de gran belleza y diversidad (H. Meinhardt, *The algorithmic Beauty of Sea Shells*, Springer-Verlag, Berlin, 1995). Las simulaciones obtenidas vía modelos matemáticos son difícilmente distinguibles de fotografías originales pero lo más importante es que han sido obtenidas a través de la sistematización de unas leyes de comportamiento de gran generalidad ocultas hasta hace muy poco tiempo. Se está aún lejos de poder responder a todas las preguntas sobre este aspecto tan concreto pero el avance logrado gracias a las matemáticas habría sido insospechado hace menos de diez años.

Conocer no es actuar. El conocimiento científico de las razones por las que un fenómeno tiene lugar es una condición imprescindible para avanzar en el diseño de fenómenos de similar naturaleza que respondan a un fin concreto. Pese a ello, en muchos casos es altamente insuficiente. A modo de ejemplo podríamos referirnos a que el hombre no se posó en la Luna hasta la segunda mitad de nuestro siglo pese a que los movimientos de los planetas y sus satélites nos presentaban cada vez menos secretos desde la obra de Newton a finales del siglo XVII. Quizás este ejemplo no ilustre bien el caso en el que la única limitación viene del incompleto

conocimiento matemático del proceso en cuestión. Todos sabemos que aquél éxito histórico se debió también a los progresos en muchas otras parcelas de la ciencia y de la técnica pero no por ello no deja de ser punto de reflexión obligada.

El hombre ha multiplicado por más de dos su esperanza de vida desde comienzos de este siglo y esto ha sido posible, primordialmente, por los avances de la medicina. Los progresos propiciados por la matemática en las ciencias de la naturaleza no son ajenos a esos avances. Las aplicaciones de la mecánica de fluidos y de muchas otras teorías matemáticas nacidas exclusivamente en un ambiente matemático está siendo aplicadas en el diseño de prótesis, intervenciones quirúrgicas de alto riesgo, obstrucción de epidemias, etc. La evolución de la Arquitectura no ha sido tampoco ajena al progreso de la matemática. El reto de construir cada vez más alto es un buen ejemplo en el que Arquitectura y Matemáticas pueden y deben avanzar juntas.