DE LA POMPA DE JABÓN AL SATÉLITE ARTIFICIAL: LO ÓPTIMO COMO ESTRATEGIA

JESÚS ILDEFONSO DÍAZ DÍAZ
Real Academia de Ciencias

ANTECEDENTES LEGENDARIOS

Cuenta Publio Virgilio Marón (70 - 19 a. C.) en su poema épico, la *Eneida,* que hacia el año 814 a. C., la princesa fenicia Dido, huyendo con su séquito de su hermano, el rey Pigmalión, que acababa de asesinar a su marido, llegó a Numidia, en el norte de África. Quedó encantada del lugar e intentó comprar unas tierras (lo que más tarde sería la ciudad de Cartago) al rey Jarbas con el fin de establecerse allí. Por alguna razón desconocida (recelos del rey al establecimiento de extraños, cicatería de Dido...), cerraron el trato con una curiosa condición: la princesa compraría únicamente lo que pudiera delimitar una piel de buey.

Lo que hace más creíble esta leyenda es que la estrategia de la princesa Dido no nos es desvelada por Virgilio sino que aparece mencionada por un autor dos siglos anterior a él. Nos referimos a Marcus Junianus Justinos (siglo III a. C.) y su *Historiae Philippicae.* Se nos cuenta allí que Dido dispuso que se cortara la piel en finísimas tiras y que éstas alcanzaron más de 1.000 metros de longitud. A partir de ahí, Dido se enfrentó a un problema que poseía interesantes ingredientes matemáticos: «entre todas las curvas de longitud dada hallar la que encierra una región de área máxima». La elección de Dido correspondió a una figura plana que por siempre ha estado asociada a la perfección: el círculo.

Este episodio ha dado lugar a ilustraciones pictóricas de gran belleza. La figura de la princesa y sus amoríos con Eneas serían también inmortalizados por Dante en la *Divina Comedia* y por Henry Purcell en su ópera *Dido y Eneas* en 1689. De manera natural, la sabia respuesta de Dido nos hace pensar en otras elecciones, igualmente acertadas, de naturaleza similar. Así, por ejemplo, los esquimales se han enfrentado constantemente al problema de cómo edificar su habitáculo de manera que la superficie exterior, donde inevitablemente la temperatura será menor, sea mínima, supuesto fijo el volumen. Sus iglúes seleccionan una vez más una figura geométrica, esta vez tridimensional, siempre tenida como modelo de perfección y equilibrio: la esfera.

Publio Virgilio Marón (70 - 19 a. C.), escribiendo la *Eneida.* Mosaico romano conservado en el Museo de El Bardo (Túnez).

Dido y la fundación de Cartago. Grabado de Mattähus Merian el *Viejo,* 1630. Frankfurt.

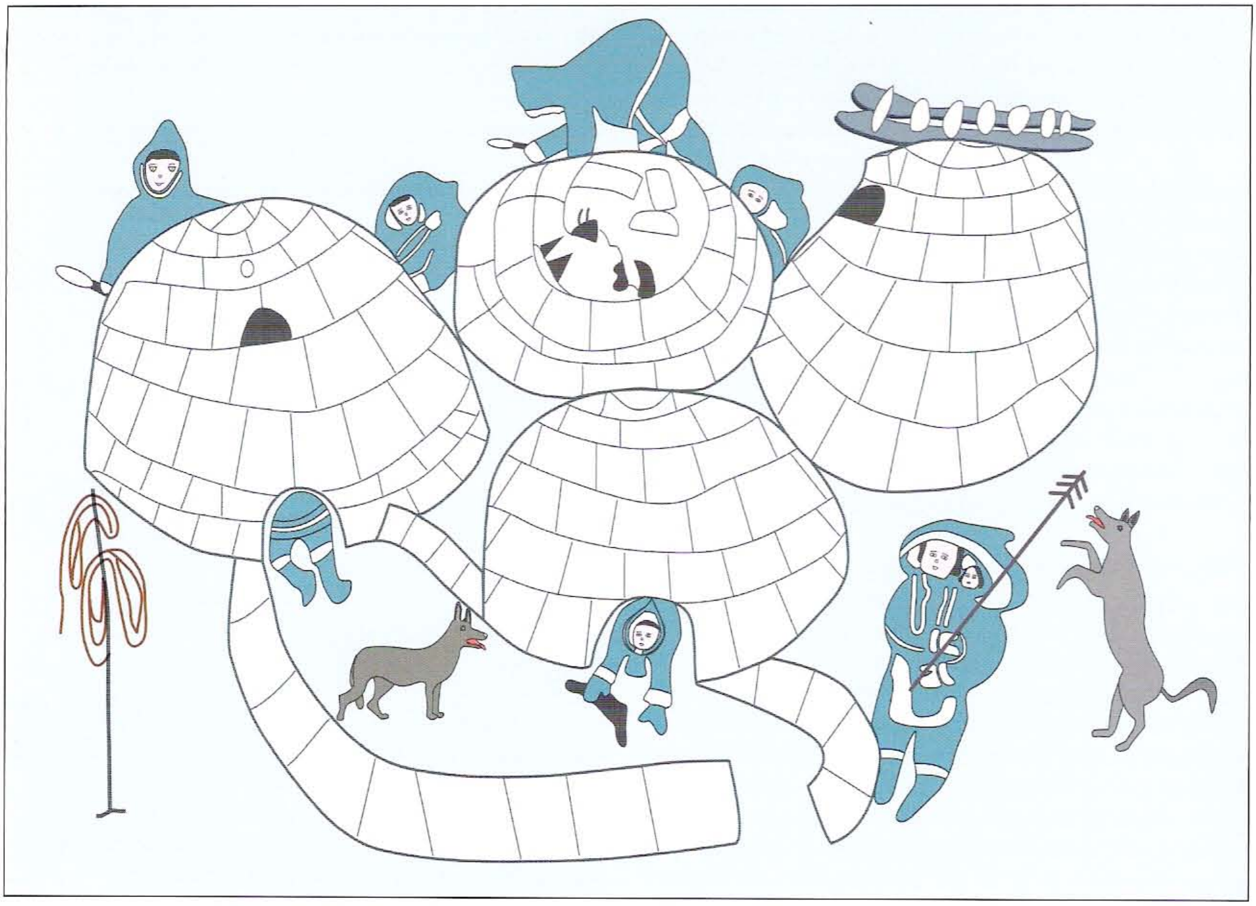


Fig. 1.– Composición artística sobre iglúes.

La respuesta puede ser enunciada equivalentemente, de nuevo en términos de que la esfera es la región del espacio que encierra un mayor volumen, entre todas las que poseen una superficie exterior de área fija. Es la perfección geométrica aludida por Pitágoras, Copérnico y tantos otros.

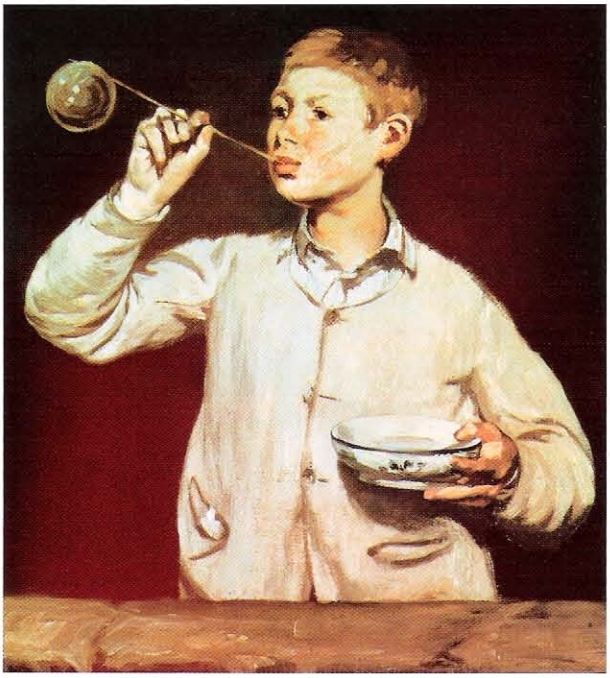
No es de extrañar que los dos problemas anteriores constituyan buenos ejemplos de una clase de problemas matemáticos denominados como *Problemas isoperimétricos*. Aristóteles (siglo IV a. C.) y Arquímedes (285 - 212 a. C.) hacen ya mención a ellos. Una demostración matemática de que la respuesta de Dido es la acertada se debe a Zenodoro (entre los siglos III y I a. C.), si bien él sólo indaga entre los polígonos regulares de longitud dada. Tampoco debe chocarnos que la respuesta más general, en el ámbito de todas las curvas, haya tenido que esperar hasta la segunda mitad del siglo XVIII para ser mostrada en toda su generalidad. El enunciado de la cuestión, inocente en apariencia, involucra nociones como la de longitud de una curva, área de una superficie (volumen de una región, en el caso de los iglúes) que no tendrían una adecuada interpretación hasta que los elementos de análisis infinitesimal y de geometría diferencial fueran aplicados a ese contexto por H. A. Schwarz (1843 - 1921), quien mostró dos desigualdades (entre el área A de la región encerrada por una curva y la longitud de ésta P, o entre el volumen V de una región delimitada por una superficie y su área A) que sólo alcanzan la igualdad en el caso del círculo y la esfera, respectivamente:

$$4\pi A \leq P^2,\ 36\pi V^2 \leq A^3.$$

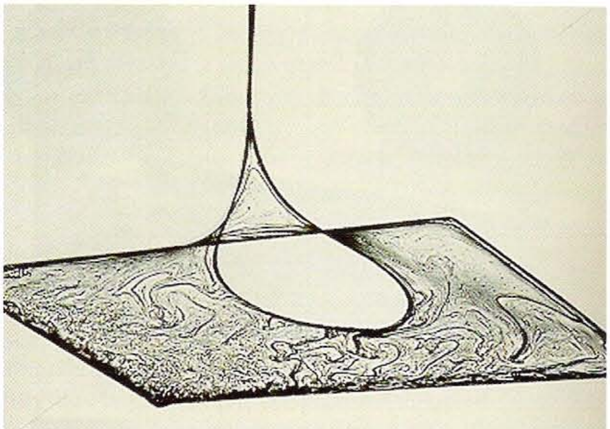
Quizá no haya mejor realización material de una superficie esférica que la que ofrecen las bellas pompas de jabón tan unidas al asombro infantil, plasmado por numerosos artistas, entre ellos E. Manet, a lo largo de la historia. También lo hizo B. E. Murillo (1617 - 1682). Dos obras suyas que en la actualidad se conservan en Glasgow así lo atestiguan. Finalmente, cómo no recordar las palabras de A. Machado: «yo amo los mundos sutiles / ingrávidos y gentiles / como pompas de jabón».

SUPERFICIES JABONOSAS, SUPERFICIES MINIMALES

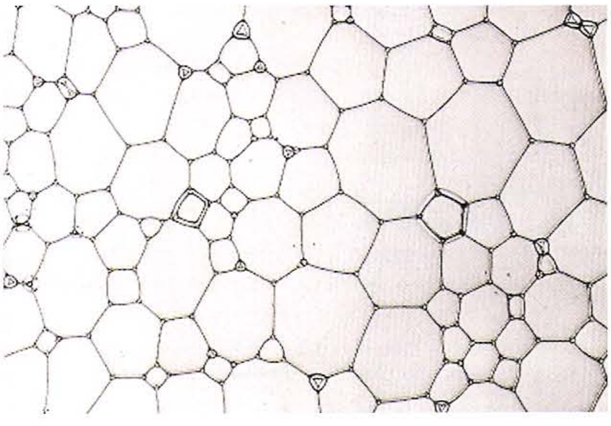
Si suponemos esféricas esas redondas pompas de jabón, poseerían, pues, la propiedad de presentar un área mínima entre todas las superficies que encierran una región arbitraria pero con el mismo volumen. Pero también podemos crear superficies muy distintas a las pompas su-



Edouard Manet (1832 - 1883).



Superficie jabonosa.



Vista frontal de superficies jabonosas entre dos placas de cristal muy cercanas.

mergiendo un alambre cerrado o bien una trama con dos alambres cerrados en una disolución jabonosa formada entre una trama rectangular y un alambre cerrado. Esto no es más que una ilustración de lo que matemáticamente se conoce como problema de J. A. F. Plateau (1801 - 1883). La superficie así formada vuelve a gozar de la propiedad de poseer un área mínima entre todas las superficies posibles que enlazan los dos entretramados de alambre. Por este motivo son denominadas *superficies minimales* o *superficies de área mínima*. También podemos interesarnos por las superficies jabonosas que se forman entre dos placas, por ejemplo, dos cristales muy cercanos. Se aprecia enseguida que ahora se forman multitud de superficies que intersectan entre ellas.

Vemos también que esas intersecciones guardan una cierta predisposición, pues se producen a lo largo de secciones planas (frontalmente vistas como segmentos rectilíneos) que no forman ángulos cualesquiera entre sí, sino tan sólo 90°, 120°, o 109° 28' 16". Esto tiene una explicación matemática, pero no nos adentraremos en ella. La sabia naturaleza no es ajena a las propiedades óptimas de la esferas y, así, numerosos organismos unicelulares, como los radiolarios y los flagelados, adoptan esta configuración.

La configuración de las superficies jabonosas entre cristales se asemeja poderosamente al entretramado de las alas de los mosquitos. Pero, además, no es difícil encontrar conexiones de todo esto con los paneles de abejas, o con los distintos sistemas cristalinos del mundo mineral, aunque profundizar en ello nos llevaría por otros derroteros. Tampoco insistiremos en cómo las bellas formas adoptadas por esas superficies jabonosas han sido fuente de inspiración de afamados arquitectos a lo largo de la historia.

El hombre se ha inspirado en la naturaleza, imitándola en su afán creador. Además, el hecho de que formen superficies de área mínima ha propiciado su utilización como modelos analógicos a la hora de buscar la conexión rectilínea a trozos que une unos puntos dados de manera que la longitud total sea mínima. Se trata de una estrategia ideada por el geómetra Jacob Steiner (1796 - 1863), quien observó que al reproducir la configuración relativa de los puntos a conectar entre dos placas paralelas, la superficie jabonosa formada debería tener una sección de longitud mínima dado que la altura era homogéneamente la misma.

La teoría de grafos plantea un gran número de problemas similares, pero tampoco entraremos en ello.

POMPAS, GOTAS Y SUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE

Nos podríamos preguntar si las numerosas y variadas superficies que se forman generadas por líquidos, como las gotas que penden o que reposan sobre superficies planas, deben tener área mínima.

La modelización matemática de este tipo de problemas fue impulsada por los trabajos de científicos de la talla de

P. S. de Laplace (1749 - 1827), Th. Young (1773 - 1829) y C. F. Gauss (1777 - 1855), quienes mostraron que realmente la superficie de separación entre un líquido y un gas, como es el aire que respiramos, obedece a una ecuación que alude a un concepto matemático muy rico y que fue introducido para este propósito concreto: *la curvatura media de una superficie.* No pretenderemos aquí dar una definición exacta de este concepto. Nos conformaremos con recordar que en el caso de una curva del plano, su curvatura es un atributo numérico puntual que nos indica «cómo de curvada está esa línea en ese punto». Así, si se trata de una parte rectilínea diremos que la curvatura es cero, pero en otra parte lo definiremos como el inverso del radio de curvatura, es decir, del radio de la circunferencia cuya tangente coincide con la tangente en ese punto a la curva y que «mejor se adapta a esa curva» en un cierto sentido.

Lo dicho sobre una curva es aplicable a cada una de las curvas que pasan por un punto dado de una superficie formadas por la intersección entre un plano arbitrario que pasa por la normal y la superficie. Afortunadamente, es posible mostrar que entre todas las curvas posibles hay dos que poseen una curvatura máxima y mínima, respectivamente, entre todas las curvaturas así obtenidas. Su promedio es lo que se denomina la *curvatura media, H,* de la superficie en ese punto. Si por el contrario nos fijamos en su producto, *K,* se obtiene lo que se denomina la *curvatura total* de la superficie en ese punto. Las distintas posibilidades que se presentan pueden catalogarse en términos de ambos parámetros.

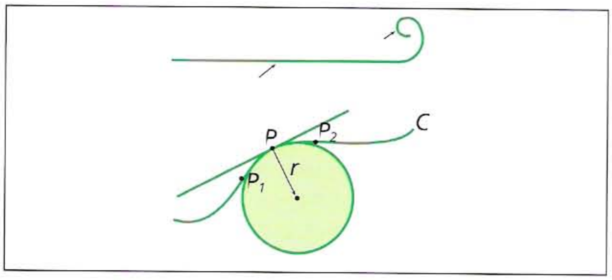


Fig. 2.– Puntos de curvatura nula y positiva de una curva.

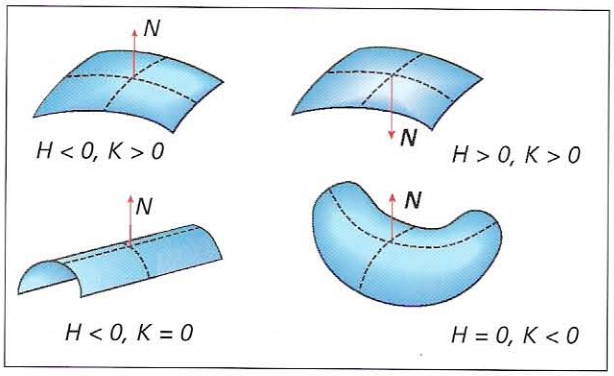
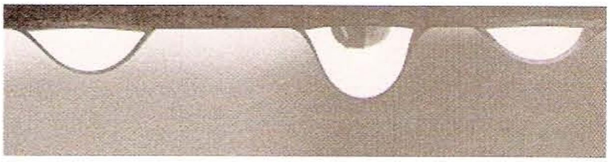


Fig. 3.– Superficies mostrando cuatro posibilidades distintas en atención a sus curvaturas media y total.



Gotas líquidas que penden sobre una superficie plana.

Laplace mostró que la superficie de separación líquida obedece a la fórmula:

$$p = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \sigma = 2H\sigma$$

en la que p representa la diferencia de presiones entre el gas y el fluido sobre esa superficie y σ es una constante, llamada *tensión superficial,* característica de cada par de fluidos (el líquido y el gas). Un teorema, debido a J. Lagrange (1736 - 1813) y a J. B. M. C. Meusnier (1754 - 1793), relaciona las nociones de área y curvatura, aparentemente disjuntas: si fijamos una curva cerrada sobre una superficie el área encerrada es mínima (entre todas las superficies con el mismo contorno) si y sólo si $H = 0$. Nótese que en el caso de una superficie esférica H es constante, por lo que, pese a gozar de una cierta propiedad de optimalidad debida a su forma esférica, no son superficies minimales (la diferencia de presiones en ese caso no es nula, aunque el valor de σ en las superficies jabonosas sea muy pequeño). Las pompas de jabón son superficies de curvatura media constante.

APARICIÓN DE LO ÓPTIMO EN DINÁMICA: LA BRAQUISTOCRONA

Pero hasta ahora sólo nos hemos referido a configuraciones estáticas. Las propiedades de optimalidad también están presentes en numerosos procesos de la dinámica. Un ejemplo muy representativo es el de la curva que viene a resolver un famoso problema propuesto, en 1696, por Jean Bernoulli (1667 - 1748): «dados dos puntos *A* y *B* en un plano vertical, hallar la curva que los enlaza por la que un cuerpo que caiga desde *A* hasta *B,* por la gravedad, lo haga en el menor tiempo». Tal curva fue denominada como *braquistocrona* (de más corto tiempo, en griego).

El reto lanzado a sus contemporáneos fue resuelto en 1697 por él mismo y por su hermano Jacques Bernoulli (1654 - 1705), recibiendo también la respuesta de G. Leibniz (1646 - 1716), G. F. A. l'Hôpital (1661 - 1704) e Isaac Newton (1642 - 1727); este último lo hizo bajo un sobrenombre pero la elegancia y simplicidad de sus argumentos le delataron. Se cuenta que, al recibir la respuesta anónima enviada por Newton, Jean Bernoulli exclamó: «al león se le reconoce por sus garras».

La curva hallada no era otra que la curva distinguida (aunque invertida) que había recibido la atención de Galileo y Blaise Pascal (1623 - 1662), entre otros muchos. Nos referimos a la *cicloide,* una curva que, por ejemplo, podemos apreciar fácilmente si nos fijamos en el movimiento de la válvula del aire de una rueda de bicicleta que pasa delante de nosotros.

Antes de avanzar en nuestro relato, viene bien que recordemos la existencia de otras curvas con nombre propio, esta vez provenientes de la elasto-estática. Éste es el caso de la curva *catenaria* por aparecer al hacer pender una cadena colgada de sus extremos. Esta curva, tan presente en nuestra vida cotidiana, fue descrita ya por Leonardo da Vinci en 1490, y estudiada matemáticamente por Leonhard Euler en 1743.

Otro ejemplo de curva distinguida es la *elástica,* que responde a la búsqueda la «mejor columna» que iniciaría M. Vitrubio (siglo I a. C.) en su obra *De Architectura* (25 a. C.), proseguiría con L. B. Alberti (1404 - 1472) en 1450 y alcanzaría un estudio matemático con los trabajos matemáticos de Euler de 1744 y de Lagrange de 1773.

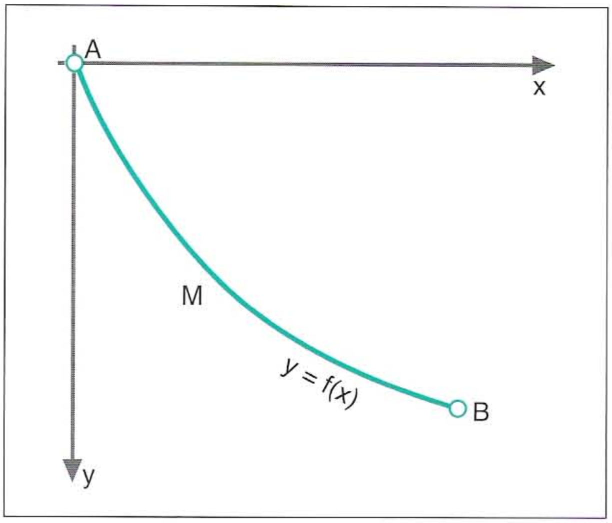


Fig. 4.– Braquistocrona entre A y B.

EL CONTROVERTIDO PRINCIPIO DE MAUPERTUIS

Pero retomemos nuestro relato en torno a la curiosidad por lo óptimo. En realidad, antes del episodio de la braquistocrona ya se habían producido importantes estudios pioneros en esa dirección, si bien centrados sobre otro tipo de problemas. Entre ellos destacaremos los de Pierre de Fermat (1601 - 1665) mostrando que la luz se propaga de la manera más rápida posible, y los de Newton, que datan de 1687, en los que considera el problema de hallar el cuerpo (por no decir proyectil) de revolución que presenta una menor resistencia al aire. Era la época en la que había un afán colectivo por la búsqueda de un esquema filosófico del mundo que encontraría su máximo

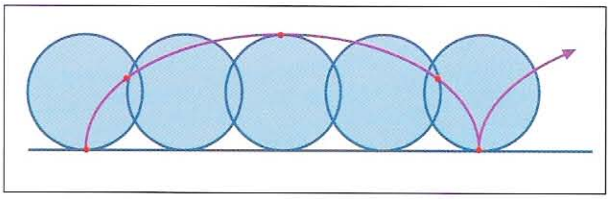


Fig. 5.– La cicloide.

reflejo en la propuesta del *principio de mínima acción* de P. L. M. de Maupertuis (1698 - 1759), formulado en su obra de 1746, *Las leyes del movimiento y el equilibrio deducidas de un principio metafísico*: «Si ocurre algún cambio en la naturaleza, la cantidad de acción necesaria para este cambio ha de ser lo más pequeña posible».

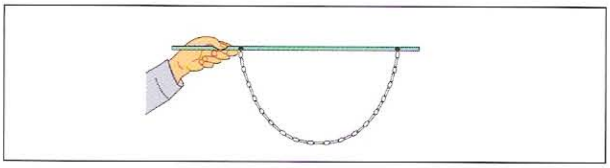


Fig. 6.– La catenaria.

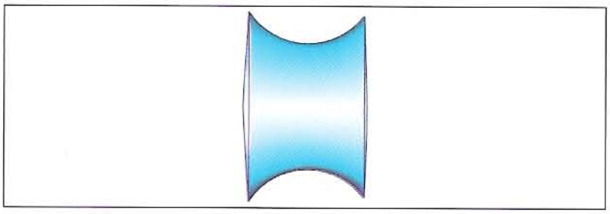


Fig. 7.– La catenaria como superficie jabonosa.

Maupertuis ya había ganado celebridad por encabezar la expedición al Círculo Ártico (1736-1738) con la pretensión de dar respuesta a la teoría de Descartes de que la Tierra era un elipsoide estrechado por el ecuador frente a la de Newton, que lo presuponía achatado por los polos. La propuesta de Maupertuis fue pronto controvertida. Por una parte, el científico holandés, J. S. Köning señaló en 1751 la existencia de una carta de Leibniz a Hermann,

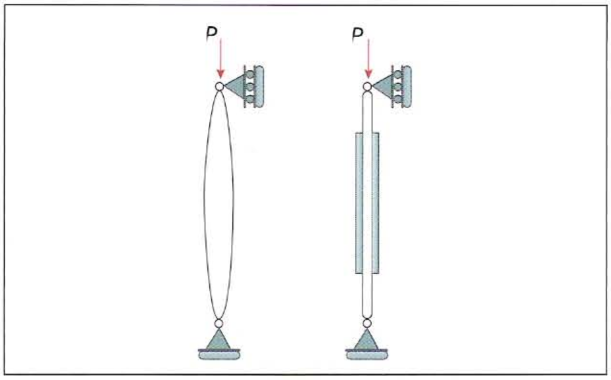


Fig. 8.– La elástica.

P. L. M. de Maupertuis (1698 - 1759).

Isaac Newton (1642 - 1727).

datada en 1707, en la que ya éste se pronunciaba en los mismos términos. De hecho, en su *Ensayo sobre la bondad de Dios, la libertad del hombre y el origen del mal* de 1710, Leibniz ya abogaba por su teoría sobre «El mejor de los mundos».

En alguna manera, ambos principios metafísicos venían a ser un retroceso en comparación con los progresos conseguidos por Newton en sus *Principia Mathematica* (1687), a la hora de configurar la ciencia experimental frente a su independencia de «causas finales». Tal filosofía acabaría triunfando contra viento y marea pero su triunfo no fue un paseo de rosas. A este respecto es muy elocuente la respuesta que Laplace ofreció a Napoleón cuando tras exponerle su teoría cosmológica éste le preguntara sobre el papel que él atribuía en ello a Dios: «Majestad, no he necesitado esa hipótesis», fue su respuesta.

Otro de los artífices de la polémica con Maupertuis fue François Marie Arouet, *Voltaire* (1694 - 1778). Ya se había mofado de ello en su *Historia del Doctor Akakia* (1752), y de hecho fue el tema central de su *Candide, ou l'Optimiste* (1758), obra que, publicada anónimamente, tuvo un gran éxito de ventas, pasando a engrosar, más tarde, en 1762, el Índice de Libros Prohibidos. Voltaire tenía además otras motivaciones. También él había recibido, en 1740, el encargo de Federico II de presidir la Academia de Ciencias de Prusia, Berlín, que ocuparía Maupertuis en 1746, y que contaría con la participación de Euler en la sección de Física y Matemáticas desde 1741. Voltaire salía en defensa de sus amigos J. S. Köning, A. C. Clairaut y de la marquesa de Châtelet. El tono irónico de Voltaire estaba siempre presente en sus reproches a Maupertuis: «Habéis confirmado con viajes y sufrimiento lo que Newton ya sabía sin salir de su aposento».

EL NACIMIENTO Y DESARROLLO DEL CÁLCULO DE VARIACIONES

Retomemos el tema central de la persecución de lo óptimo, esta vez, aludiendo a una disciplina matemática desarrollada a partir del problema de la braquistocrona. Nos referimos al *Cálculo de Variaciones* que tiene a Leonhard Euler como impulsor por excelencia.

De hecho, Euler ya había propuesto, tres años antes que Maupertuis, una definición más precisa que la de éste sobre el concepto de acción como diferencia entre las integrales temporales de la energía cinética y de la energía potencial. La otra gran figura pionera de esta rama de las matemáticas fue Joseph-Louis Lagrange. Parece ser que el nombre de Cálculo de Variaciones fue propuesto por Euler tras recibir una carta de Lagrange, el 12 de agosto de 1755. Estaríamos así ante uno de los pocos casos en los que una rama científica posee una fecha oficial de instauración. El Cálculo de Variaciones se ocupa del estudio de máximos, mínimos y puntos de inflexión (la clase de los llamados *puntos estacionarios),* pero no tanto de funciones dependientes de unas pocas variables (en el caso

Voltaire (1694 - 1778).

Leonhard Euler (1707 - 1783).

de dos variables podríamos acudir a los mapas de nivel para ilustrar el significado de estos tres tipos de puntos), sino de funcionales; es decir, funciones de funciones, dependiendo ahora de infinitas variables.

W. R. Hamilton (1805 - 1865) observaría, más tarde, que en los procesos de la naturaleza la acción es sólo un punto estacionario y a veces, incluso, un máximo, por lo que el principio de Maupertuis sería corregido desde entonces recibiendo el nombre de *Principio de acción estacionaria.*

La necesidad de establecer criterios de distinción entre los distintos puntos estacionarios sería abordada por A. Legendre (1752 - 1833) y C. Jacobi (1804 - 1851). Se llega así a una época de consolidación y rigor matemático que tendría a Karl Weierstrass (1815 - 1897) como uno de sus mejores exponentes, resaltando, entre otras muchas cosas, cómo puede haber problemas de enunciado aparentemente modestos pero que carecen de solución.

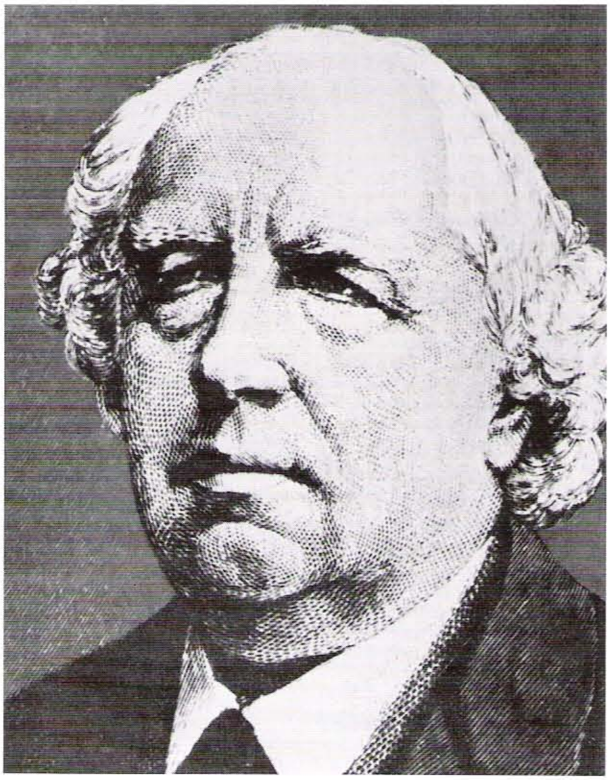
La cuestión de la adecuada resolución de problemas alcanzaría su máximo punto con David Hilbert (1862 - 1943), quien dedicó a esta cuestión uno de los problemas de su famosa lista propuesta en París en 1900. En concreto, su Problema 20 lo enunció así: ¿Admiten solución los problemas de contorno del Cálculo de Variaciones en algún sentido a precisar? La lista de los matemáticos que hicieron contribuciones fundamentales en este campo es impresionante: Gateâux, Lebesgue, Caratheodory, Fréchet, Hadamard, Tonnelli, Sobolev, Morrey, Bliss... Obviamente, éste no es lugar, ni esta la oportunidad, para describir sus resultados.

El Cálculo de Variaciones está también unido a los estudios sobre el comportamiento de los procesos naturales cuando el tiempo tiende a infinito. Es la teoría de la estabilidad. Recordemos brevemente que las nociones de estados estable e inestable pueden ser ilustradas mediante el comportamiento de una pequeña bola a la que se separa de su posición de equilibrio. En el caso de un mínimo, la bola tiende a recuperar su posición anterior (y decimos por ello que corresponde a una posición estable), mientras que esto no es así en los otros casos.

Se debe a P. G. L. Dirichlet (1805 - 1859) el teorema que afirma que los mínimos de la energía cinética corresponden a posiciones estables de equilibrio. Pero sería con H. Poincaré (1854 - 1912) y con A. M. Lyapunov (1857 - 1918) con los que la teoría de la estabilidad alcanzaría su madurez.

EL CÁLCULO DE VARIACIONES EN ESPAÑA

Se carece de un estudio histórico sobre la implantación y desarrollo del Cálculo de Variaciones en España. Tras la consulta de algunas obras generales sobre la Historia de la Ciencia Española y los fondos de la Real Academia, parece que esta importante disciplina llegó a nuestro país de la mano de Benito Bails (1730 - 1797), quien publicaría



Karl Weierstrass (1815 - 1897).

una enciclopedia en once tomos en 1772, dedicando una parte del tercero a este tipo de temas. Bails había estado varios años en Francia y a su regreso llegó a ocupar importantes cargos de responsabilidad científica. Pese a ello, y a las fechas a las que nos referimos, parece que tuvo algún problema con la Inquisición.

El primer tratado español sobre el Cálculo de Variaciones se debe a don José Echegaray Eizaguirre (1833 - 1915), quien publicó en 1858 los textos del curso que impartía sobre esa materia en la Escuela de Caminos.

Más tarde, el tema sería objeto de mención en los discursos de ingreso de los académicos, cercanos a Echegaray, Gumersindo Vicuña (en 1883) y Simón Arcilla (en 1888).

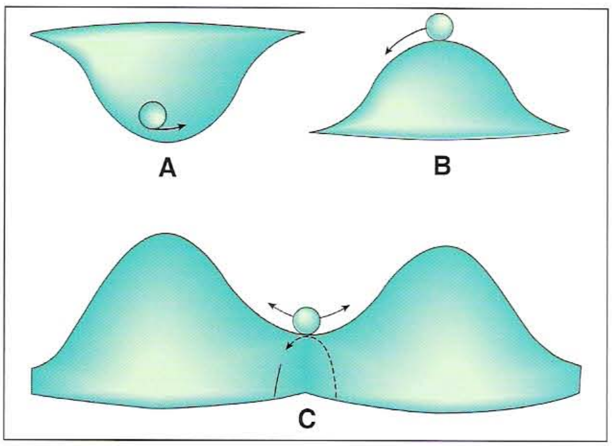


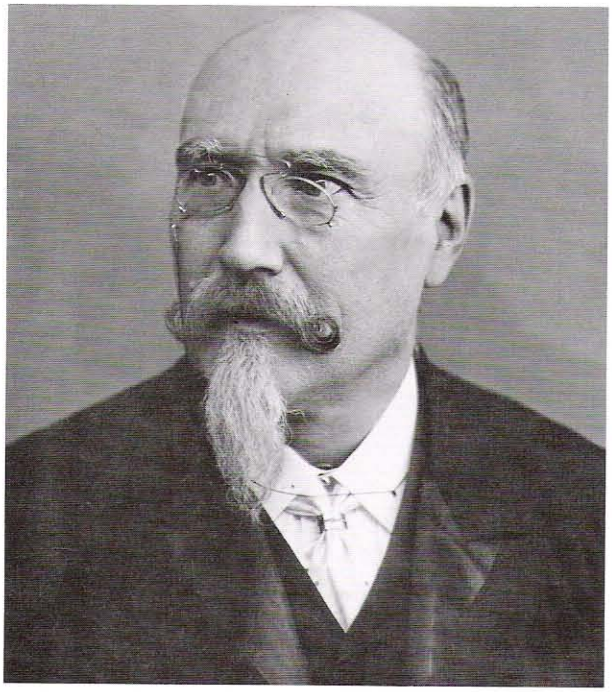
Fig. 9.– Posiciones estables e inestables.

Pero la primera contribución original, frente a las exposiciones genéricas antes señaladas, parece deberse a E. Terradas (1883 - 1950) en su comunicación «Sur le mouvement d'un fil», publicada en los *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, vol. 2, 1912, pp. 250-255.

Julio Rey Pastor (1888 - 1962) también dictó una serie de conferencias en el INTA sobre el Cálculo de Variaciones que aparecerían en el último capítulo de su libro *Los problemas lineales de la Física,* publicado en 1955.

Es de señalar que pese a la modestia de las contribuciones españolas, un buen número de los matemáticos españoles mantenían correspondencia con los más distinguidos matemáticos de su época. Así, recientemente hemos tenido acceso a distintos documentos de la Real Academia de Ciencias que no son bien conocidos, o, al menos, no han sido resaltados con la importancia que creemos merecen (y que pretendemos desarrollar en un futuro trabajo). En 1847, año de la fundación de la Real Academia de Ciencias, muchos de los científicos de la selecta elite, como Gauss y Jacobi, recibieron el nombramiento de Académicos Correspondientes Extranjeros. Curiosamente, por causas no bien aclaradas, otros, como Cauchy, no llegaron a recibir esta distinción pese a haber sido propuestos para ello.

Henri Poincaré (1854 - 1912).



José Echegaray Eizaguirre (1833 - 1915).

EL CÁLCULO DE VARIACIONES Y LA «NUEVA» FÍSICA

Para concluir nuestras alusiones directas al Cálculo de Variaciones, debemos mencionar que el principio de acción estacionaria también fue aplicado a la llamada «física moderna», más allá de la mecánica clásica y de la de medios continuos. Es el caso, por ejemplo, de la termodinámica (en relación a la ley de Gibbs), la mecánica cuántica (principio de Feynman de 1948) y la teoría de la relatividad general de 1915, donde la aplicación de un principio variacional por parte de Hilbert le permitió presentar, incluso antes que Einstein, los fundamentos de la teoría, respondiendo así a una pregunta que el propio Einstein le había dirigido. El episodio ha sido analizado con minuciosidad por algunos historiadores que parecen haber encontrado pruebas que permiten seguir atribuyendo la paternidad de la teoría a Einstein.

El Cálculo de Variaciones no ha cesado de ofrecer retos de enorme dificultad desde su creación: no es extraño que el primer premio matemático instaurado para suplir la ausencia de premio Nobel en Matemáticas, la medalla Fields, fuese otorgado a un destacado especialista, J. Douglas, por sus profundas contribuciones en esa parcela de las matemáticas. De la simulación analógica mediante maquetas hemos pasado a la simulación mediante el uso de modelos matemáticos y el ordenador. Superficies mínimales muy complicadas, desconocidas hasta hace poco, han sido generadas gracias al ordenador. El Cálculo de Variaciones ofrece en nuestros días nuevas aplicaciones como, por ejemplo, el tratamiento de imágenes o la concepción de nuevos materiales bajo la filosofía de los materiales compuestos.

TEORÍA DE CONTROL: UN EJEMPLO DE CONTROLES BANG-BANG

Lo que resta de esta exposición lo dedicaremos, aunque sea someramente, a la Teoría de Control como otra rama científica que se ocupa de lo óptimo y que puede ser presentada como una extensión natural del Cálculo de Variaciones.

Nada mejor que acudir a un sencillo ejemplo para ilustrar el tipo de problemas de los que se ocupa. Consideremos un móvil (por ejemplo, un tren o un convoy del metro) que pretende enlazar dos puntos A y B que supondremos unidos por un trazado meramente horizontal. El tren parte (en el instante inicial, $t = 0$), del punto A (que identificamos con el origen de coordenadas) en reposo. Es decir, su posición y su velocidad iniciales son nulas. El conductor pretende llegar a B con una velocidad final nula (para que puedan descender los pasajeros) y todo ello *en el menor de los tiempos posibles.*

Todo lo que está en su mano, el control, es la capacidad de acelerar y frenar a voluntad, si bien sometido a obvias limitaciones en ambos casos. *El control,* lo que él debe tomar de manera óptima, no es más que la fuerza exterior $u(t)$ (que coincide con la aceleración si presuponemos que la masa es la unidad) y que, como hemos dicho, puede manejar a su antojo salvo con las limitaciones de que

$$-\alpha \leq u(t) \leq \beta$$

para ciertos valores conocidos de α y β.

El problema llamado *de control óptimo* (hallar $u(t)$ para que T sea mínimo) recuerda enormemente al de la braquistocrona, pero hay una importante diferencia entre ellos: *el estado del sistema,* la trayectoria del móvil, ahora es conocida y la fuerza exterior, en este caso, no viene dada por la mera fuerza gravitatoria, sino que aquí es la incógnita directa del problema (una vez hallada ésta, se obtiene el estado correspondiente de manera única). El resultado final no es trivial y tiene mucho de ilustrativo de esta clase de problemas con restricciones sobre el control. Se puede demostrar que lo óptimo es que el conductor acelere al máximo inicialmente para pasar a frenar en medida máxima a partir de un tiempo crítico τ_c que puede ser determinado explícitamente. Son los controles denominados *bang-bang.*

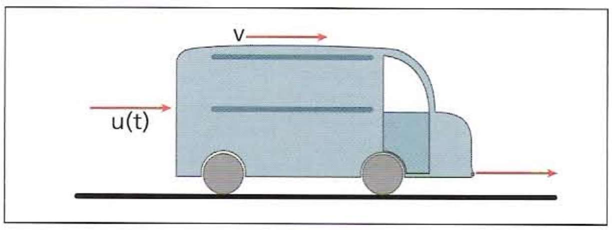


Fig. 10.– Problema del tiempo óptimo.

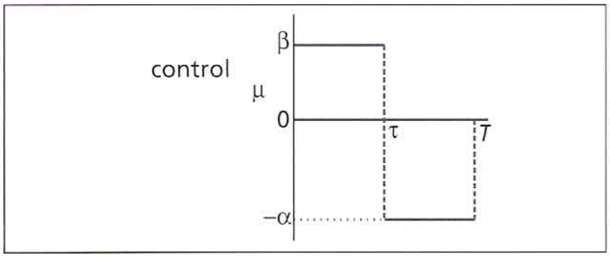


Fig. 11.– Controles bang-bang.

ANTECEDENTES DE LA TEORÍA DE CONTROL

De manera esquemática podemos decir que si el Cálculo de Variaciones se ocupaba de la comprensión de los fenómenos ocurridos por causas naturales, la Teoría de Control obedece a la intención de actuar artificialmente sobre los procesos para lograr unos fines deseados. Encontramos así una diferenciación a veces empleada para distinguir conceptualmente la ciencia de la tecnología.

El ejemplo anterior responde a los problemas de control denominados *de bucle abierto* en contraposición a otros *(de bucle cerrado)* en los que el control óptimo puede ser descrito en términos del propio estado del sistema. Es el control por realimentación *(feedback,* en inglés) en el que se diseña un sistema para que produzca por sí mismo, sin acción exterior ninguna, los fines deseados.

Uno de los ejemplos pioneros de control por realimentación es el *péndulo cicloide* estudiado y construido por Christian Huygens (1629 - 1695), en 1673, como medio para construir un reloj de péndulo insensible a los datos iniciales.

Una vez más nos encontramos con que una buena noción matemática aparece como solución para fines diversos. En este caso, la estrategia de Huygens consistió en desplazar el punto de apoyo del péndulo sobre una cicloide (la misma curva que describía la dinámica de la válvula de la bicicleta y que una vez invertida definía la braquistocrona).

La búsqueda de métodos precisos para medir el tiempo era un tema candente de la época de Huygens e incluso de tiempos posteriores. Ya en 1599, el rey Felipe III ofreció 10.000 ducados (aproximadamente dos veces el sueldo anual de un embajador) a quien idease un método para determinar la longitud de la posición en el mar (la cuestión estaba claramente relacionada con la medición precisa del tiempo, dado que una vez conocido éste, la orientación resultaba sencilla de obtener utilizando las sombras producidas por la luz solar). La solución tuvo que esperar al ingenio del británico John Harrison (1693 - 1776).

Otro mecanismo cuya modelización pasaba por lo que hoy día corresponde a un problema del control de realimentación era el llamado «regulador» para el control de la velocidad de rotación. Ideado inicialmente por Th. Mead, en 1787, para la regulación de molino de viento, fue el punto de partida del regulador propuesto por J. Watt (1736 - 1819) para el control de las revoluciones en la transmisión en energía de las máquinas de vapor y sería aplicado más tarde por G. B. Airy (1801 - 1892) para la regulación de telescopios astronómicos.

También se ocuparon de los reguladores de rotación J. B. L. Foucault (1819 - 1868) y J. C. Maxwell (1831 - 1879); este último propuso el *rotor magnético,* para lo que desarrolló la modelización y el tratamiento matemático correspondientes.

Un último ejemplo de mecanismo de realimentación es característico de nuestra vida cotidiana. Es el caso de la cisterna sanitaria ideada por el estadounidense P. Harvey en 1886, si bien se fundamenta sobre estudios de regulación de vasos comunicantes que se remontan a Ktesibious (285 - 247 a. C.).

DESARROLLO MATEMÁTICO DE LA TEORÍA DE CONTROL Y SU IMPLANTACIÓN EN ESPAÑA

La Teoría de Control gana en interés cuando lo que se propone roza lo imposible. Esa actitud no pretende ahora imitar a la naturaleza sino combatir sus leyes. Pensemos en nuestros juegos infantiles intentando mantener en equilibrio vertical, inestable, el palo de una escoba o cualquier otro objeto de forma alargada. Pues bien, es posible diseñar mecanismos autorreguladores que logran mantener no sólo uno de tales objetos, sino incluso varios gracias a la aplicación de los resultados matemáticos al respecto. La teoría matemática de control nació como tal a comienzos de los años sesenta del siglo XX teniendo entre sus principales actores a los rusos L. S. Pontryagin y V. G. Boltyanskii, los norteamericanos L. C. Young, E. J. Mc Shane, N. Wiener, R. Bellman y R. E. Kalman y los

Christian Huygens (1629 - 1695).

Felipe III.

europeos A. Blanquière y J. L. Lions por mencionar al menos los más significativos.

Las contribuciones españolas a la Teoría de Control han sido también tardías. No obstante, en un importante trabajo de uno de sus pioneros, H. Bateman («The control of an elastic fluid», *Bulletin of the AMS*, vol. 51, 1929, pp. 601-646), se hacen alusiones elogiosas a un trabajo publicado en la *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid*, en 1928. Se trata del artículo titulado «Nueva solución del problema de lord Kelvin sobre ecuaciones de coeficientes reales» (tomo XXII, pp. 25-31) que aparece firmado por un autor de apellidos de apariencia española, J. J. Corral, pero de nacionalidad cubana. Al parecer, las primeras contribuciones españolas se deben a Pedro Puig Adam (matemático, quien consideró, en 1952, un problema propuesto por N. Wiener durante su visita a Madrid el año anterior).

Hoy día, matemáticos e ingenieros españoles cultivan simultáneamente el campo. En nuestro país existe un buen número de matemáticos activos, especialistas en Teoría de Control formados en la escuela del profesor J. L. Lions, habiendo sido Antonio Valle el primero de sus discípulos españoles (tesis doctoral en 1965). Respecto a los ingenieros (y físicos) es de señalar que varios de ellos han alcanzado un reconocimiento internacional ocupando puestos de responsabilidad en comités altamente especializados.

LA CARRERA ESPACIAL Y OTROS RETOS DE LA TEORÍA DE CONTROL

Pero volvamos a la descripción de algunos de los logros de la Teoría de Control. Los avances aeronáuticos de los años cincuenta del siglo XX desembocarían en el éxito de las misiones espaciales en las que la trayectoria de las naves vencían la atracción gravitatoria terrestre en busca de unos objetivos concretos. Son de contrastar los distintos fines que animaban a los científicos involucrados en estas misiones frente a la contemplación indagadora pero pasiva de los astrónomos pioneros, como Copérnico, Kepler, Galileo y tantos otros. Ahora no era la naturaleza lo que había que desentrañar, sino que haciendo uso de la libertad de elección (aunque bajo unos límites plausibles para la acción) el hombre escogía el control y tomaba las decisiones que más se acercaban a sus fines, economizando a la vez su coste.

Como sucede habitualmente, la realización material de las estrategias matemáticas requiere con frecuencia sofisticadas tecnologías que no son accesibles en el momento en el que la teoría matemática está prácticamente culmi-

Gobernador de Watts.

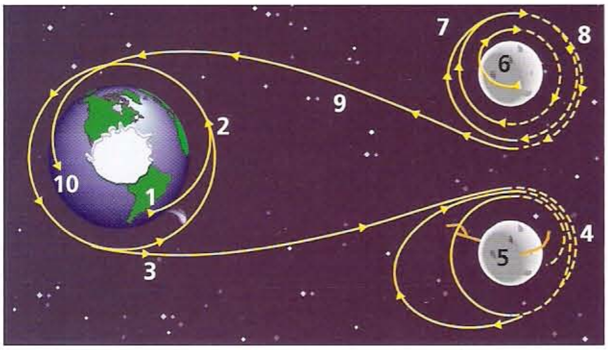


Fig. 12.– Órbitas de escape terrestre y lunar.

nada. Así, por ejemplo, el diseño de las órbitas para llegar a la Luna fue muy anterior a la construcción de las lanzadoras y astronaves adecuadas y, en suma, a que el *Apolo 11* culminara con éxito la meta, el 20 de julio de 1969. La ilusión había sido ya sembrada por Julio Verne en su libro *De la Tierra a la Luna,* de 1865, y soñada por los iniciadores Konstantin E. Tsiolkovski (1857 - 1935) y Robert H. Goddard (1882 - 1945).

Las contribuciones de la Teoría de Control Óptimo en esa y otras misiones espaciales fueron, y siguen siendo, de muy distinta naturaleza: desde el cálculo y optimización de trayectorias (no había una única sino infinitas maneras de llegar a la Luna) hasta el propio diseño de las naves atendiendo a las distintas fases del vuelo y a razones de economía. Matemáticos e ingenieros como D. F. Lawden, en 1955, A. Miele, en 1958, y G. Leitmann y A. I. Lurie, en 1959, entre otros, aplicaron a esos fines técnicas matemáticas muy cercanas a las introducidas por Euler y Lagrange casi doscientos años antes.

Los desafíos actuales de la Teoría de Control están motivados por su aplicación a sistemas complejos, tanto deterministas como estocásticos. Evitar la turbulencia o el caos allí donde se presente o, por el contrario, provocarlos en otros casos, son ejemplos de actuaciones deseadas en numerosas ocasiones. Un ejemplo de reciente aplicación lo constituye el diseño de las distintas máquinas *(Tokamaks y Stellarators)* de fusión termonuclear por confinamiento magnético en los que un plasma, a más de doscientos millones de grados centígrados de temperatura, girando en su interior debe ser confinado, es decir, controlado, para no impactar con las paredes de la cámara de vacío.

Otro ejemplo de gran actualidad lo constituyen las políticas que animan a los protocolos internacionales sobre vertido de gases de efecto invernadero y que responden a lo que se podría llamar «el control del clima», ideado por Von Neumann a mediados de los cincuenta.

Aunque de una naturaleza mucho más local y distinta de las actuaciones globales antes mencionadas, es bien conocido que las condiciones climatológicas pueden ser alteradas localmente mediante acciones adecuadas. Así, en 1946, se produjo un gran avance con respecto a la modificación del tiempo. Los estadounidenses Vincent Schaefer e Irving Langmuir, de la General Electric Company, descubrieron que sembrando las nubes con diminutos cristales de hielo seco se producían precipitaciones. Un colega suyo, Bernard Vonnegut, descubrió posteriormente que los cristales de yoduro de plata formaban excelentes núcleos de condensación, por lo que también podían emplearse para sembrar las nubes. El yoduro de plata, mucho más barato que el hielo seco, suele utilizarse en las operaciones de siembra actuales.

Curiosamente, en ocasiones lo que se desea es ahuyentar las nubes. De lo que se informaba en un pequeño recuadro de la página de Deportes de *El País* del 13 de mayo de 1999. La noticia respondía al siguiente título: «El alcalde de Moscú ordenó quitar las nubes». El texto hacía referencia a cómo el alcalde de esa capital, Y. Luzhkov, invocó al Servicio Meteorológico de su país para despejar las nubes de modo que la final de la Copa de la UEFA, que se celebraría horas después, en el estadio Luzhniki de su ciudad, llegara con brillantez a todas las pantallas de Europa. Dos horas antes del partido varios aviones y heli-

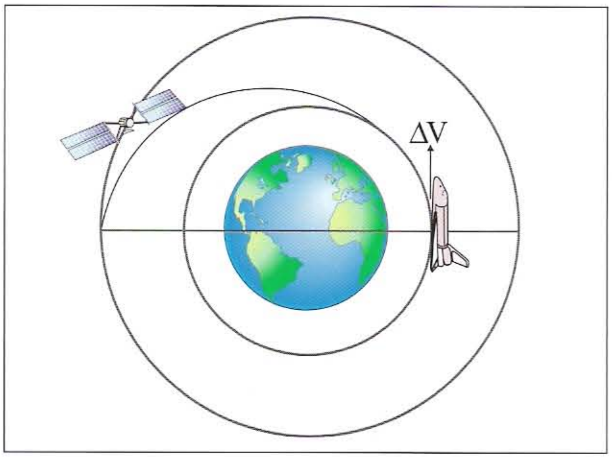
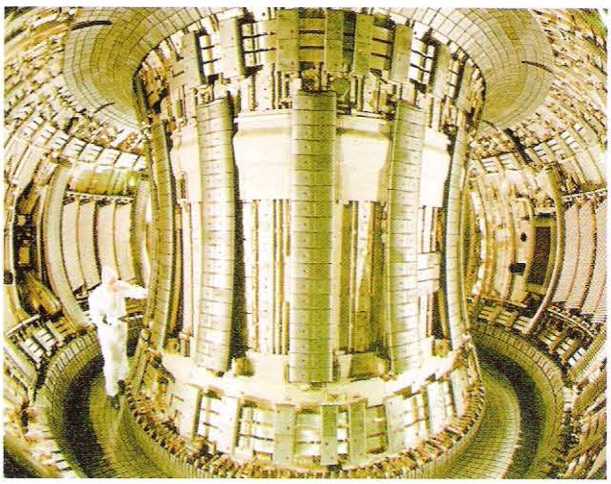


Fig. 13.– La Teoría de Control Óptimo interviene en el diseño de órbitas.



Tokomaks: dispositivos de control de un plasma por confinamiento magnético.

cópteros arrojaron reactivos especiales sobre las nubes logrando sus pretendidos fines.

MULTICRITERIOS: TEORÍA DE JUEGOS

Una ramificación importante de la Teoría de Control corresponde a la frecuente situación en la que se dispone de varios controles y no hay un único criterio final sino múltiples, pudiendo ser cooperativa o competitiva la acción de los controles. Éste es el caso frecuente de las aplicaciones en economía, en las que los controles son denominados agentes o jugadores. La modelización matemática tuvo sus inicios con A. Cournot *(Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses),* en 1838, V. Pareto *(Manuel d'économie politique),* en 1909, H. von Stackelberg, en 1934, alcanzándose su sistematización con los trabajos de J. von Neumann, desde 1928, que culminaría con su célebre texto, en colaboración con O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior,* en 1947. Recientes premios Nobel de Ciencias Económicas (como John Nash, Reinhard Selten) recibieron su galardón en atención a sus contribuciones cercanas a la optimización matemática.

Es muy significativo que en la justificación del premio a J. Nash se aludiese a su artículo de 1954, «Non-cooperative games», publicado en una de las mejores revistas matemáticas: *Annals of Mathematics.*

La lista de aplicaciones y retos, en los campos más diversos, es interminable.

EPÍLOGO

A modo de recapitulación, señalemos que objetos y procesos naturales y de la más sofisticada tecnología obedecen a un principio común: *la optimalidad de su diseño.* Se podría decir que se trata de un principio de *economía de medios* respondiendo al ideal de la anhelada *simplicidad* de los científicos e ingenieros, sin olvidar a muchos creadores de arte en su más amplia concepción. Teorías de las ciencias naturales y sociales, así como numerosos objetos

El Parma se corona sin rival

El **Marsella** se rinde al primer contratiempo y acaba goleado en la final de la **Copa de la UEFA**

MARSELLA	0
PARMA	3

Olimpique de Marsella: Porato; Blondeau, Issa, Blanc, Domoraud, Da Silva (Camara, m. 46); Brando, Bravo, Gourvennec, Pires; y Maurice.

Parma: Buffon; Thuram, Sensini, Cannavaro; Fuser, Dino Baggio, Boghossian, Vanoli; Verón (Fiore, m. 76); Chiesa (Balbo, m. 72) y Crespo.

Goles: 0-1. M. 26. Blanc cabecea pifiado hacia su portero, Hernán Crespo adivina la ocasión, se anticipa y bate a Porato por arriba.
0-2. M. 36. Vanoli ajusta un cabezazo al palo izquierdo tras un centro preciso de Fuser.
0-3. M. 55. Verón centra desde la derecha, Crespo deja pasar el balón y Chiesa fusila a la escuadra.

Árbitro: Dallas (Escocia). Mostró tarjeta amarilla a Blondeau.

65.000 espectadores en el estadio Luzhniki de Moscú. Final de la Copa de la UEFA. Campeón, el Parma.

JOSÉ MIGUÉLEZ

No es el Parma un equipo voraz, de esos que siempre quieren más y más. Por eso la final de Moscú concluyó en 3-0. Simplemente en 3-0. La superioridad italiana fue mucho más grande que el resultado. Pero se sintió tan seguro, tan dueño de

Los jugadores del Parma celebran el triunfo con la Copa de la UEFA.

El alcalde de Moscú ordenó quitar las nubes

Ejemplo de control local sobre las condiciones atmosféricas en Moscú (13/V/1999).

de nuestra vida cotidiana, están también inspirados en ese mismo principio*: lo óptimo como estrategia.*

BIBLIOGRAFÍA

1. Bennet, S. (1996) A Briev History of Automatic Control, *IEEE Control Systems,* **June**, 17-25.
2. Díaz, J. I. y Lions, J. L. (2002) *Matemáticas, superordenadores y control para el planeta Tierra.* Ed.: Editorial Complutense.
3. Giaquinta, M. y Hildebrandt, S. (1996) *Calculus of Variations* (dos volúmenes). Ed.: Springer-Verlag, Berlin.
4. Goldstine, H. H. (1980) *A history of the Calculus of Variations from the 17th trough the 19th century.* Ed.: Springer-Verlag, New York.
5. Hildebrandt, S. y Tromba, A. (1990) *Matemáticas y Formas óptimas.* Ed.: Prensa Científica, Barcelona.
6. Levine, W. S. (ed.) (1996) *The Control handbook.* Ed.: CRC Press, Boca Raton, Florida.