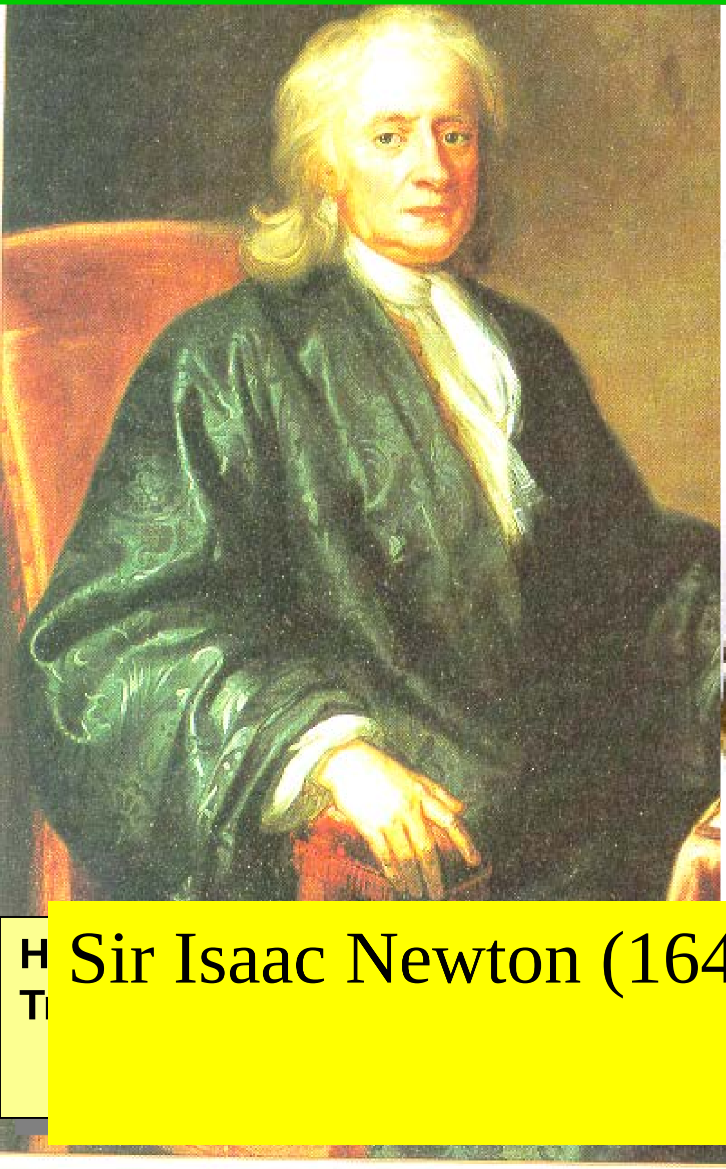
La cuerda vibrante: punto de encuentro entre las Mecánicas Clásica y de Medios Continuos

Jesús Ildefonso Díaz

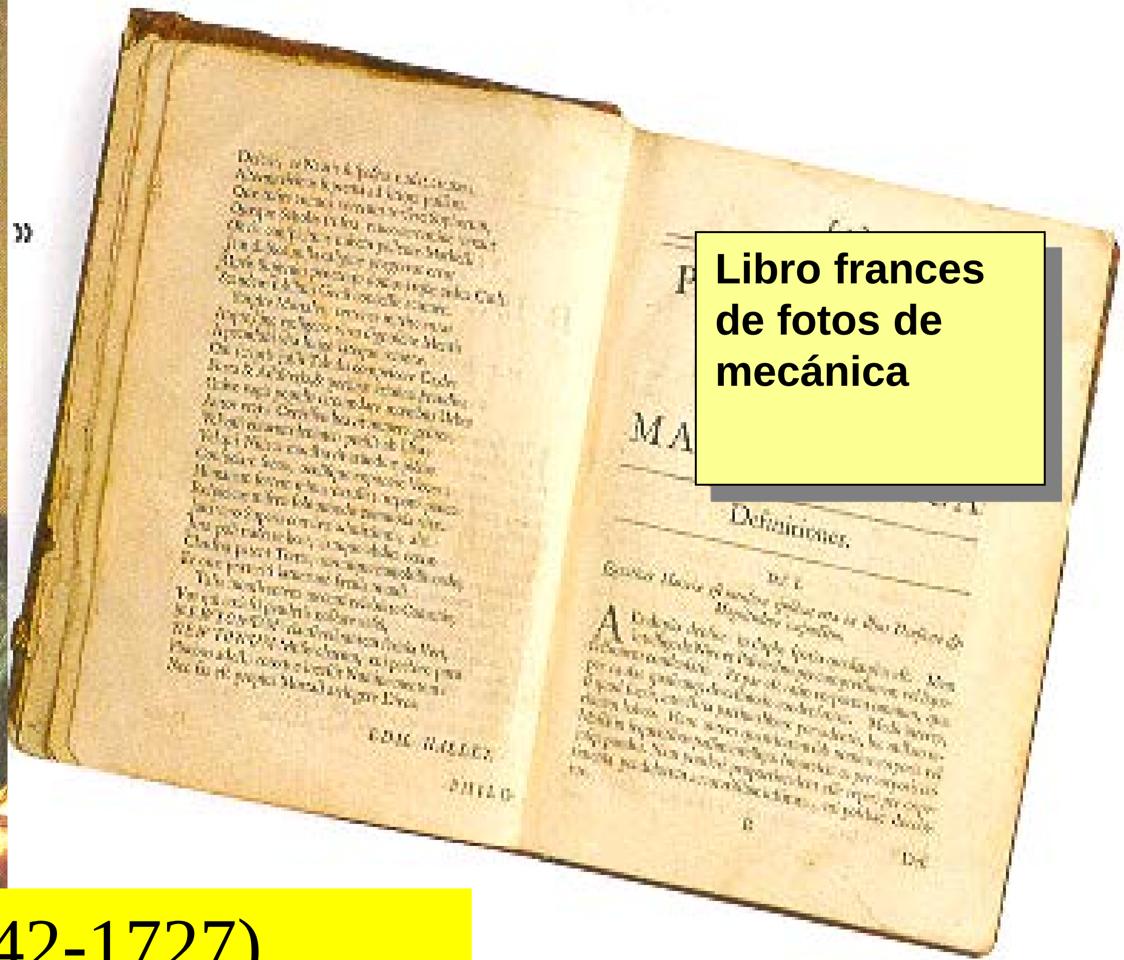
16 de febrero de 2000

Universidad Antonio de Nebrija

1. Mecánica Clásica



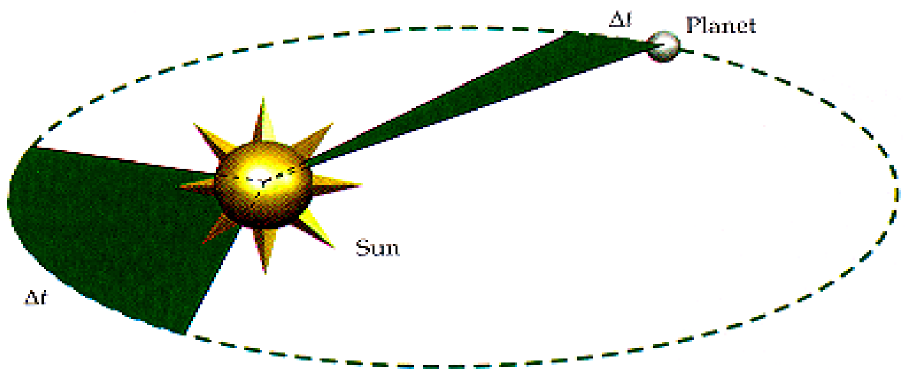
Sir Isaac Newton (1642-1727)



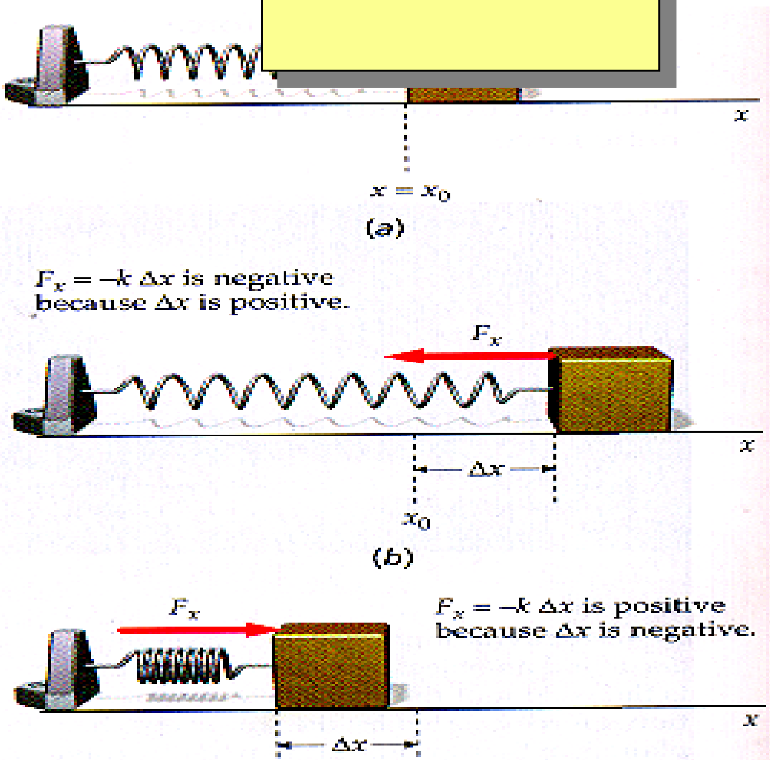
Libro frances de fotos de mecánica

1687

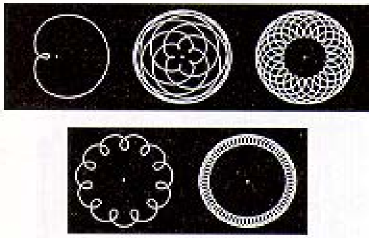
Tipos de problemas



Tipper

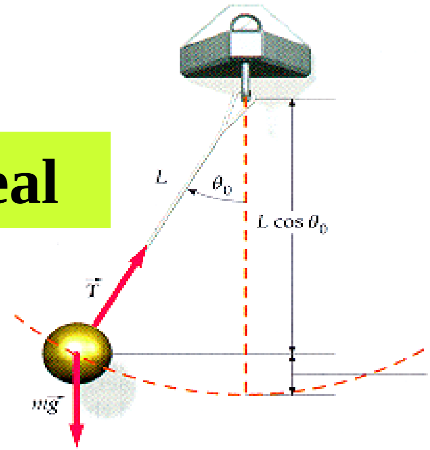


Hildebrandt-Tromba



The apparent motion of the planets.

Péndulo no lineal



Reloj de Galileo:

Libro frances de fotos de Mecanica

Sólidos Rígidos

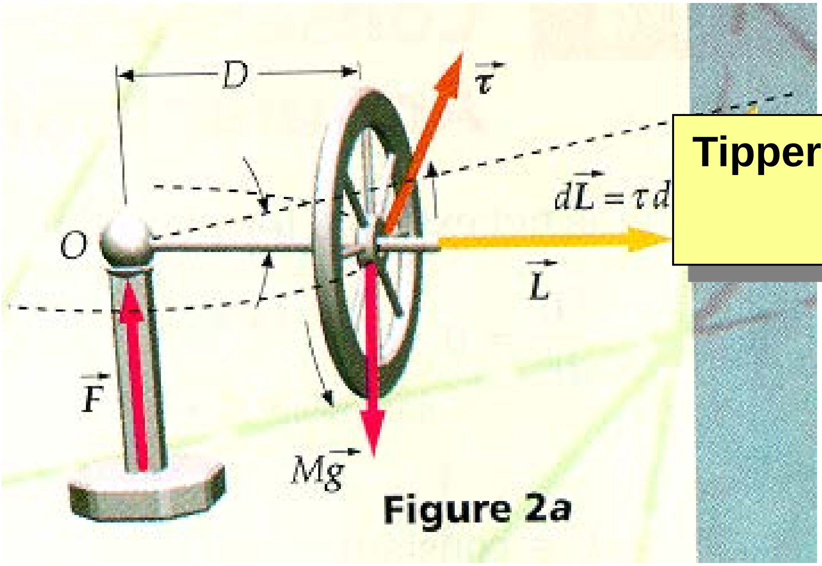
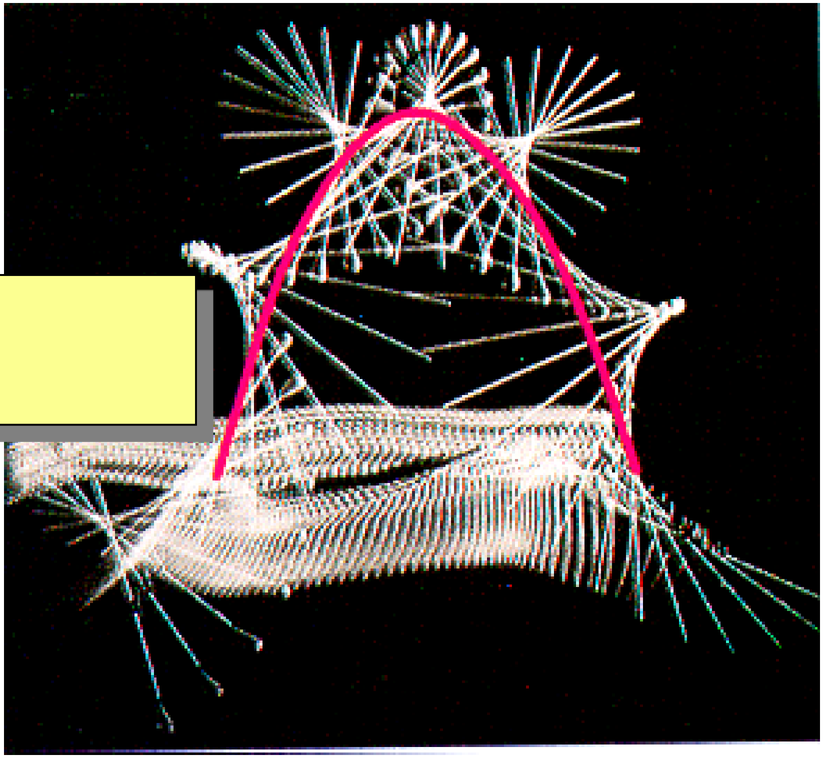


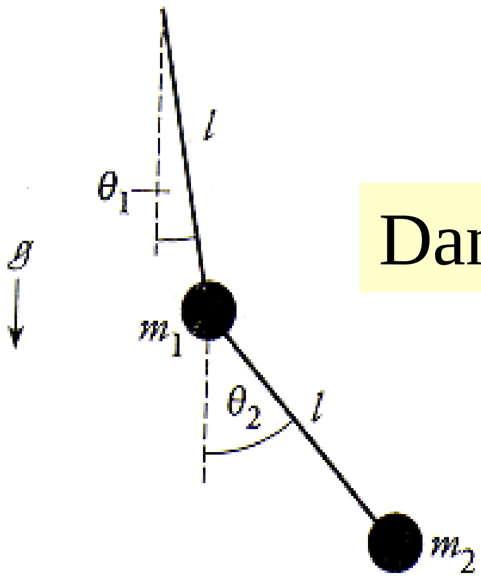
Figure 2a

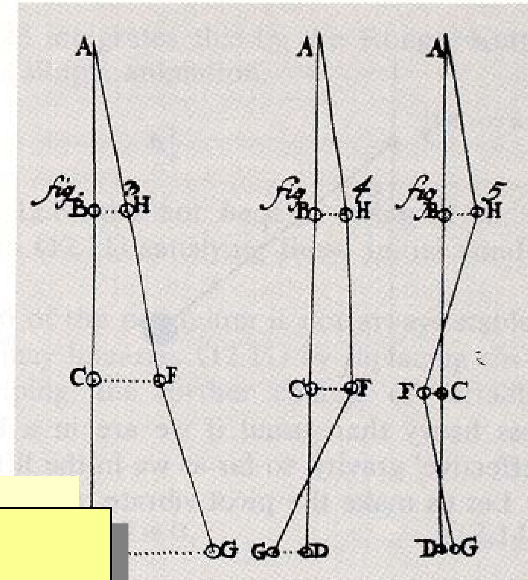
Tipper



Numerosos problemas pendientes

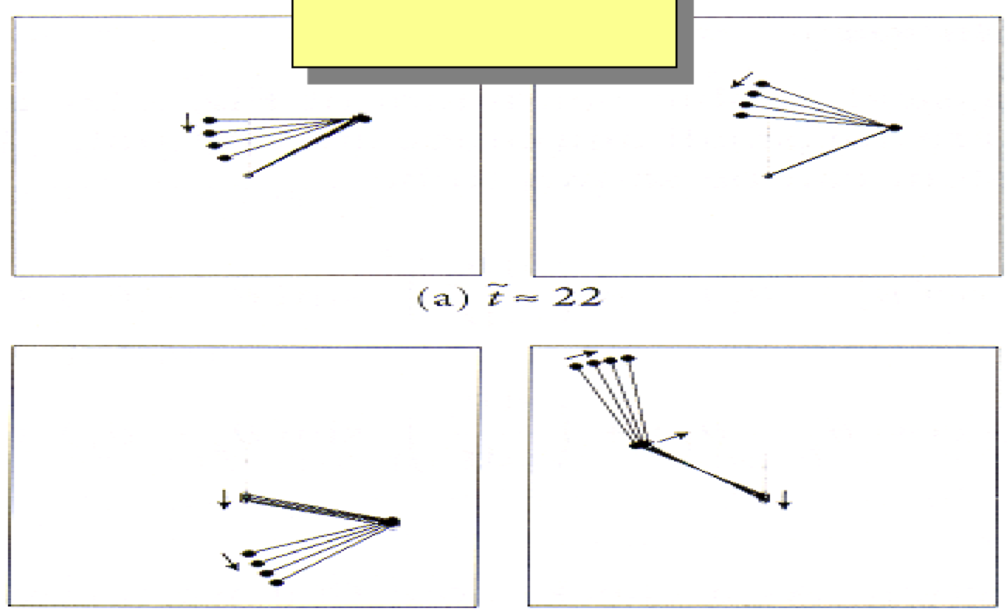
Caos: el péndulo múltiple





Daniel Bernoulli (

Achenson



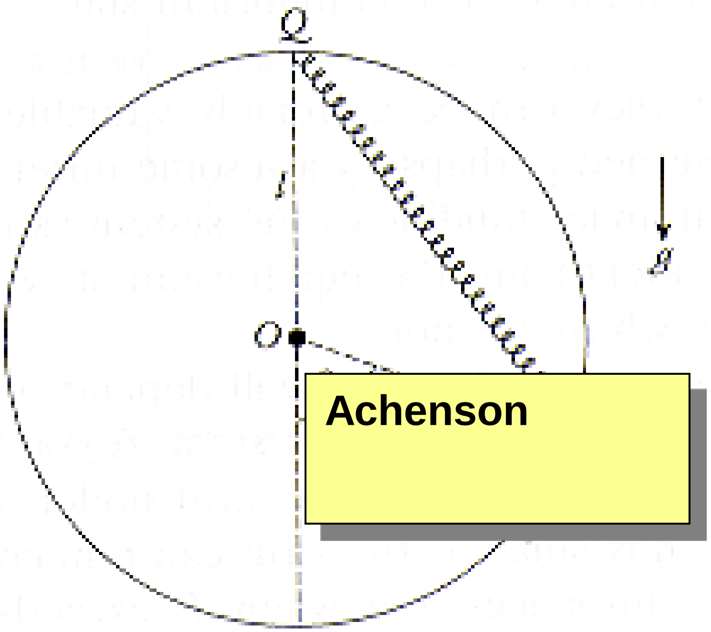
(a) $\tilde{t} \approx 22$

(b) $\tilde{t} \approx 31$

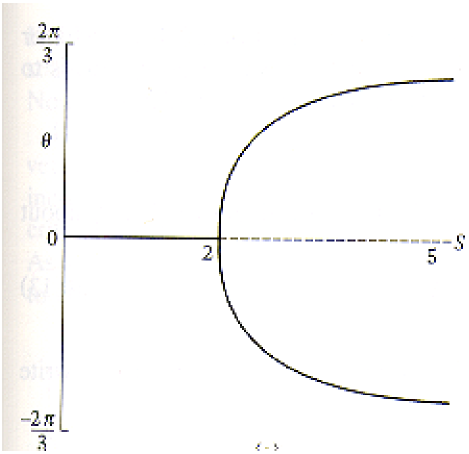
Problema de los

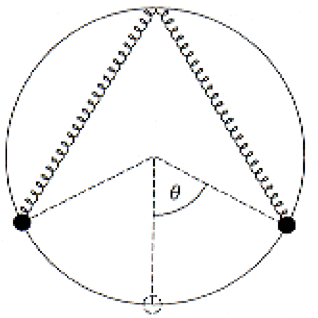
3 cuerpos, ...

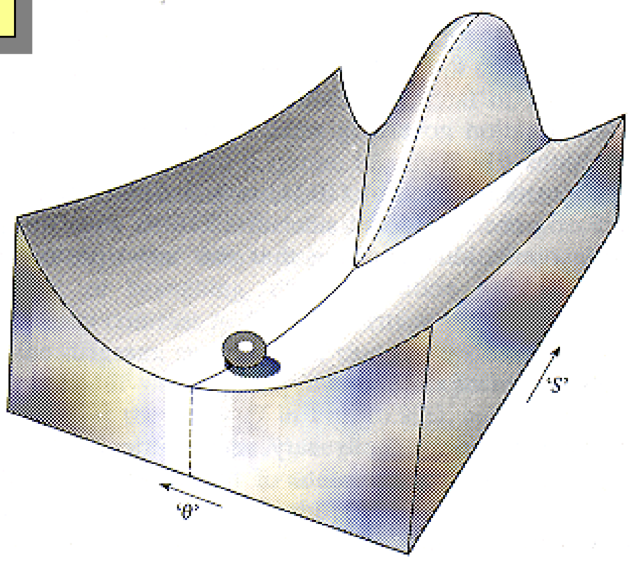
Bifurcación de equilibrios estacionarios



Achenson



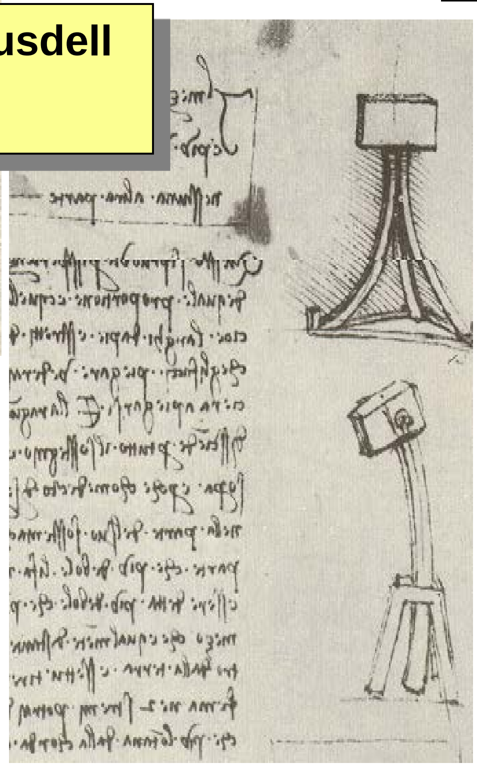


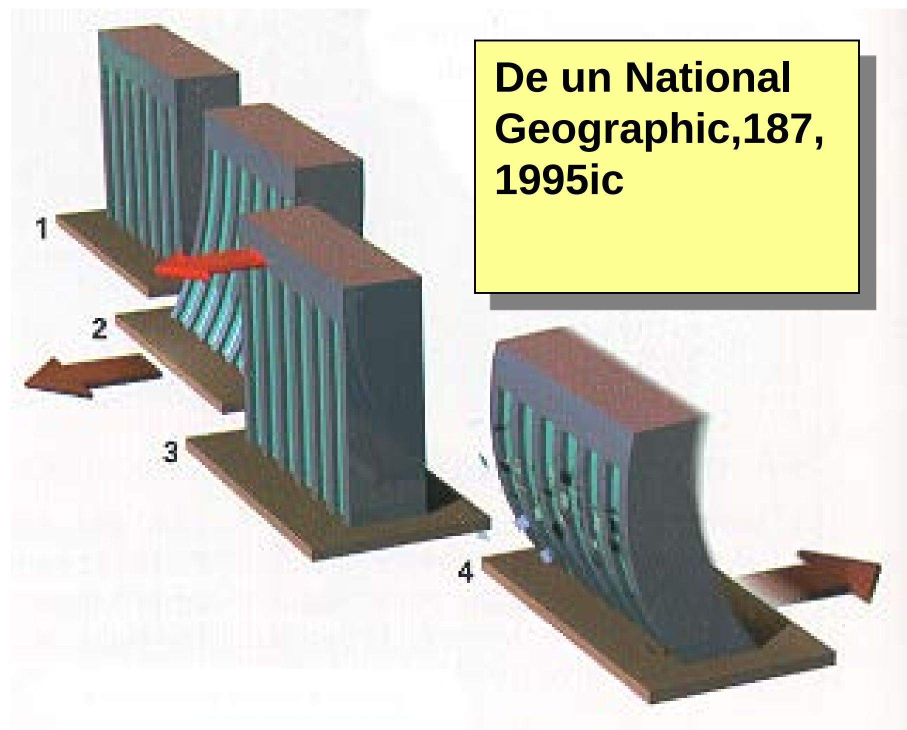


2. Mecánica de Medios Continuos

Del libro frances de fotos de Mecanica

J.I.Diaz:Trusdell





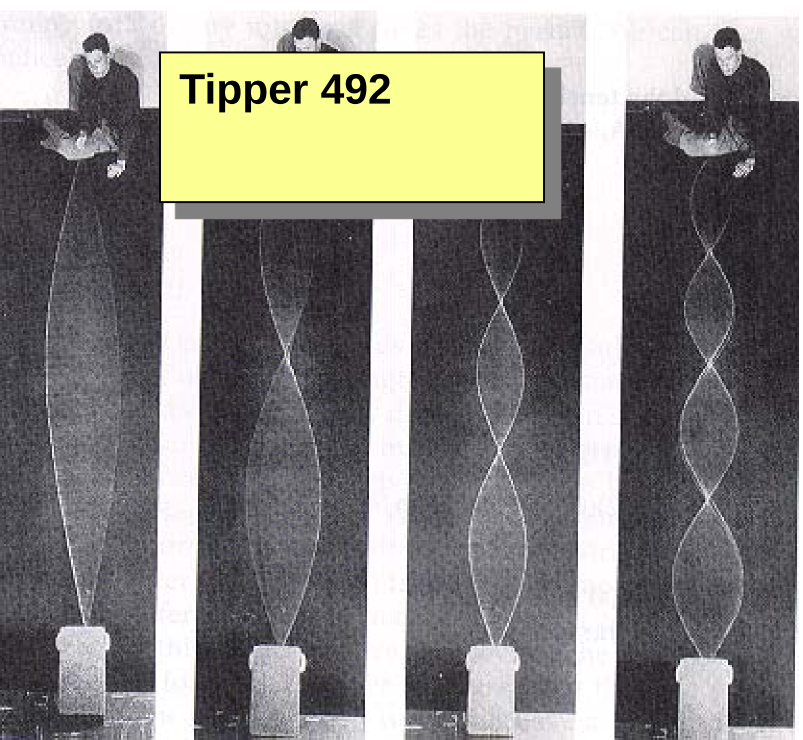
De un National Geographic,187, 1995ic

La cuerda vibrante

Sonidos musicales y Matemáticas

Pitágoras de Samos:580-500 a.C. (teoría de la armonía)

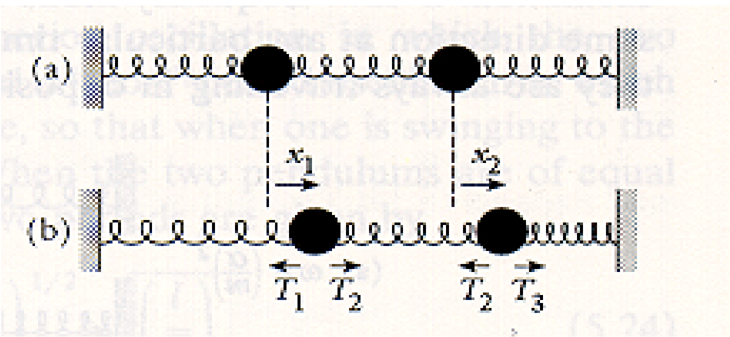
Experimentalmente: Vibraciones de una cuerda en modos (mitades, tercios,...): Bien conocido en 1700



Tipper 492

1714: Brook Taylor: Primer modo estacionario l/π

1727: Jean Bernoulli (carta a su hijo Daniel): la cuerda como n masas iguales e igualmente espaciadas

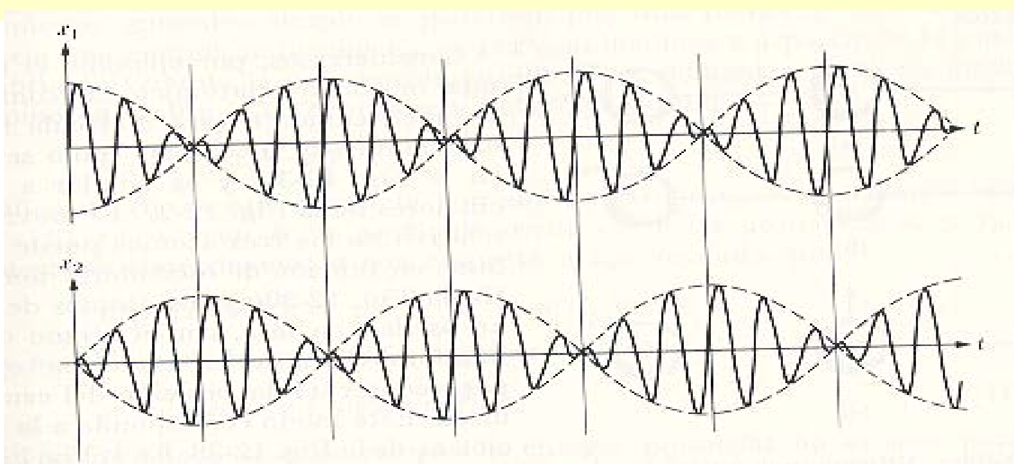


$$T_1 = kx_1, T_2 = k(x_2 - x_1), T_3 = -kx_2$$

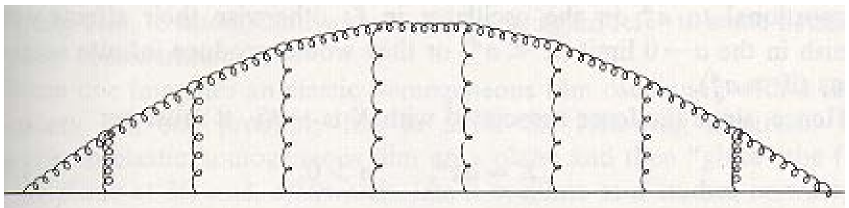
$$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - 2x_1)$$

$$m\ddot{x}_2 = k(x_1 - 2x_2)$$

Superposición de 2 “modos normales” de oscilación



1739:Daniel Bernoulli:*Investigación sobre una nueva teoría de la música,claramente expuesta a partir de incontestables principios de la armonía*



1747: Leonhard Euler: N-masas

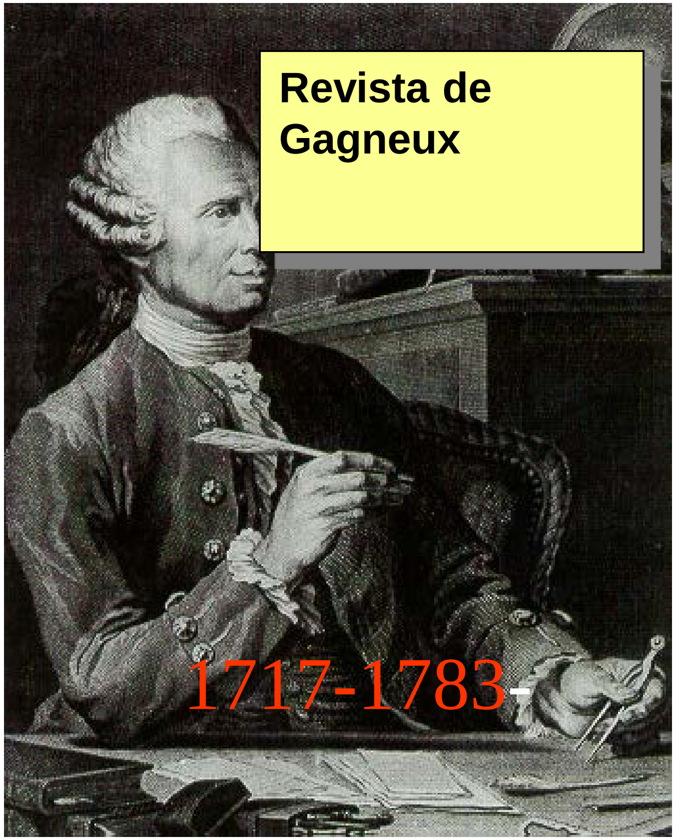
“transmisión de sonido en el aire”

(1707-1783)

$$m\ddot{x}_n = k(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}),$$
$$n = 1,\ldots,N$$

$$x_n(t) = \sum_{r=1}^{r=N} A_r sen\left(\frac{rn\pi}{N+1}\right)\cos\left(t2\sqrt{k/m}\,\frac{sen(r\pi/2)}{N+1}\right)$$
$$n = 1,\ldots,N$$

1746: Jean Le Rond D'Alembert: "Investigaciones sobre la curva que forma una cuerda tensa que se hace vibrar"



$$u(x,t) = x_n(t) \text{ si } x = \frac{nL}{N+1},\ x \in [0,L],$$

$$\Delta x = L/N$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left[\frac{u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}\right]$$

Convergencia de modelos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in (0,L), t > 0, \\ u(0,t) = u(L,0), & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = v_0(x). & \end{cases}$$

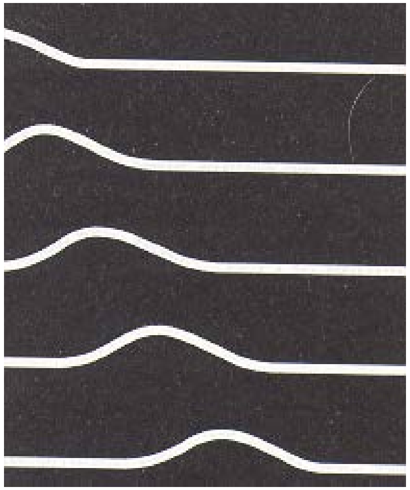
$$c^2 = \frac{\tau}{\rho}, \tau \equiv \text{tension}, \rho \equiv \text{densidad}$$

$$[c^2] = LT^{-1} \text{ velocidad de propagacion}$$

Primera ecuación en derivadas parciales:∞ grados de libertad

Aparece en muchos otros contextos:

oscilaciones longitudinales de una barra elástica, propagación unidireccional del sonido en gases,...

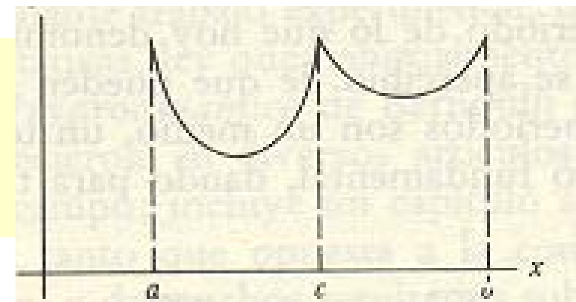


Fórmula de d'Alembert

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

f y g funciones analíticas

1748: Euler, f y g funciones C^1 a trozos
[llamadas por él "dicontinuas"]



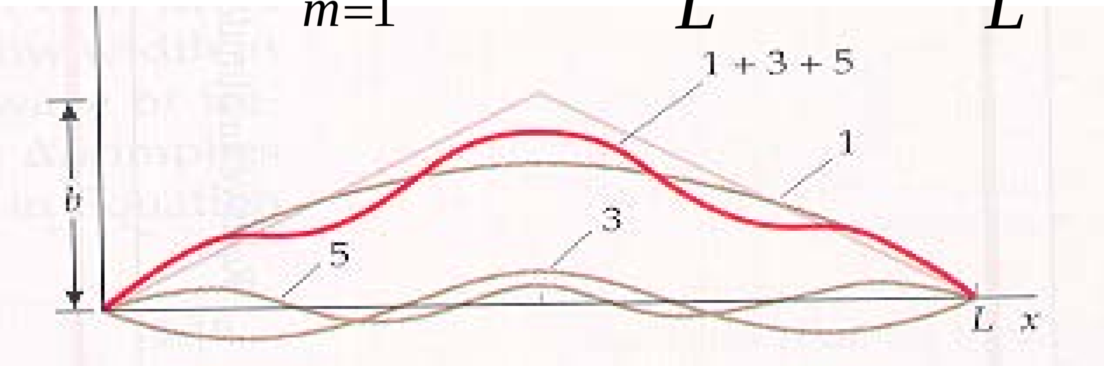
Primera noción de "solución débil"

1755: Euler da una nueva definición de función

Controversia: D'Alembert/Euler

1751:Daniel Bernoulli, “coexistencia formal de oscilaciones pequeñas”

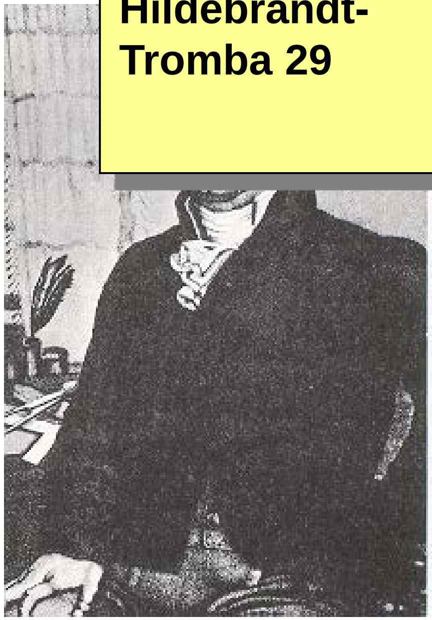
$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{m=\infty} a_m sen(\frac{m\pi x}{L})\cos(\frac{m\pi ct}{L})$$



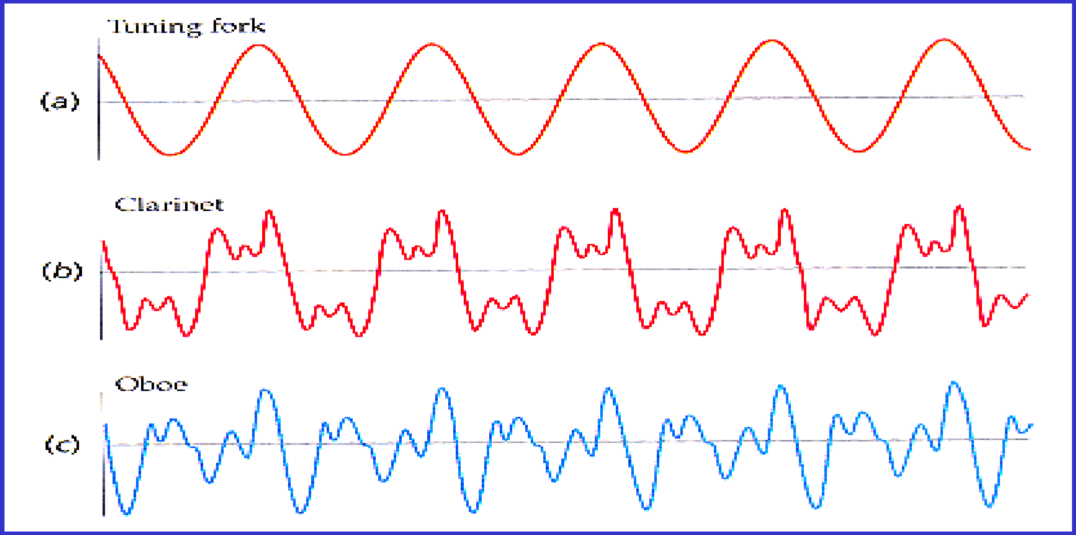
Euler (en 1753) y d’Alembert (1757) niegan la “afirmación” de D.Bernoulli

1759:Joseph Louis Lagrange, incorpora velocidad inicial no nula, pasa al límite $m\to\infty$

Hildebrandt-Tromba 29



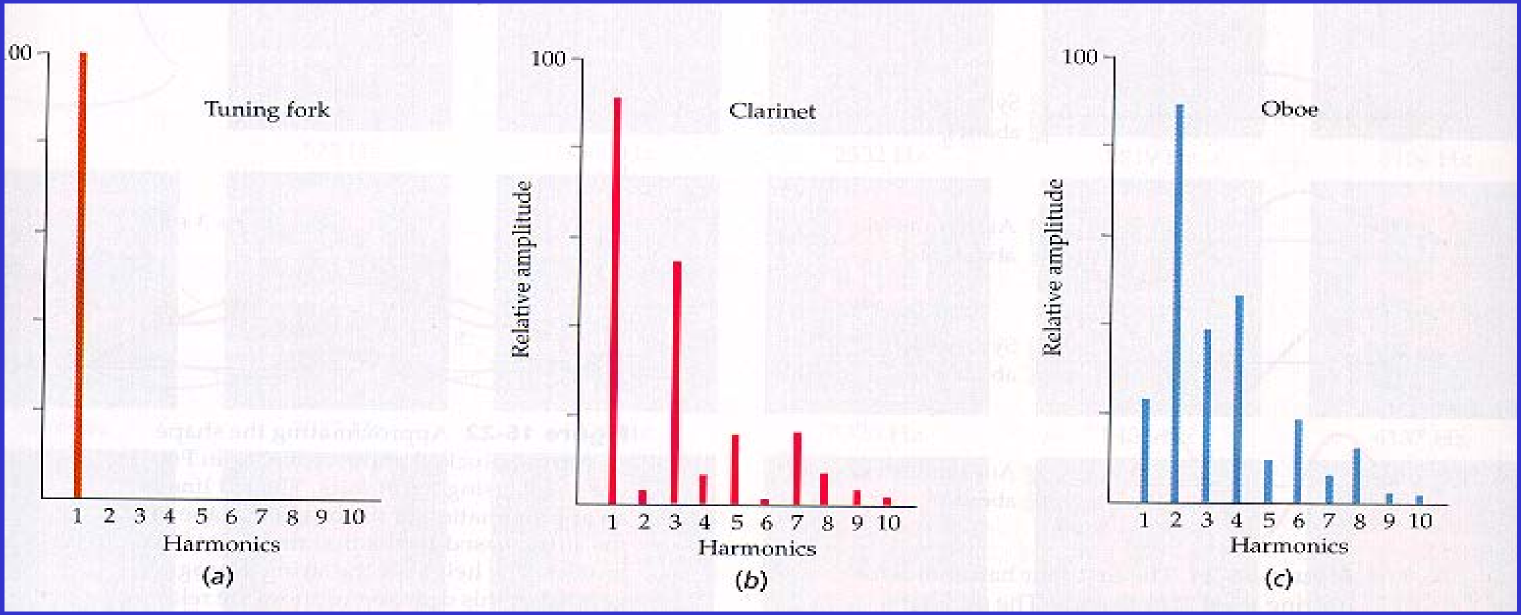
1736-1813



Diapasón

Clarinete

Oboe



Problema de intercambio de integral y suma infinita,

Problema de derivación de una serie (regularidad de la función limite)

1811:Joseph Fourier “Teoría analítica del calor”.

La cuerda vibrante: de Fourier al 2000

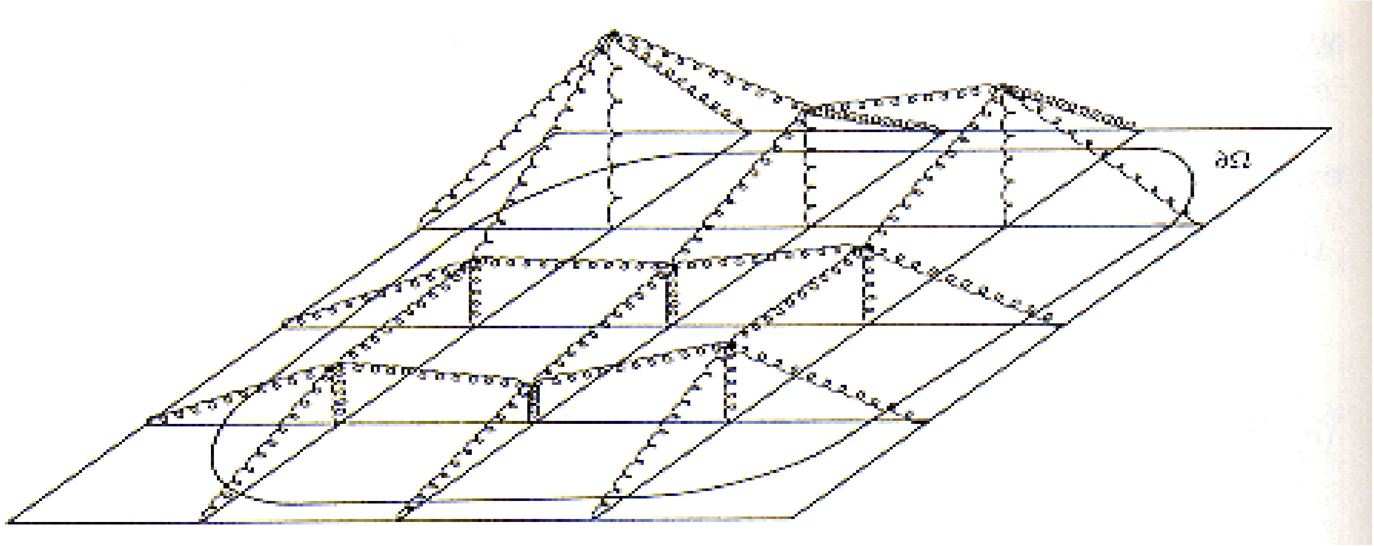
(buen título de una conferencia para matemáticos)

1768-1830

Análisis numérico: aproximación de la solución de la ecuación de la cuerda vibrante por una sucesión de muelles acoplados

Más difícil que la convergencia de d'Alembert (Modelización)

Valido para otros objetos elásticos de dimensiones superiores (p. e. membranas, cornisas,...



Métodos de aproximación:

- Diferencias finitas

    (Ejemplos con **Maple**)

- Elementos finitos

    (Un ejemplo con **Matlab**)

Convergencia rigurosa en espacios de Sobolev, método de Galerkin,...,

Matemática Aplicada

•Modelización

•Análisis matemático de los modelos

•Aproximación numérica.

(en honor del progreso y del espíritu humano)