"MINIMIZACION SOBRE UN CERRADO NO CONVEXO: MINIMO VALOR PROPIO GENERALIZADO" (*)

J. Ildefonso DIAZ DIAZ

(*) Comunicación presentada en las Jornadas Hispano-Lusas. Sevilla 1974.

MINIMIZACION SOBRE UN CERRADO NO CONVEXO: MINIMO VALOR PROPIO GENERALIZADO.

J. Ildefonso Díaz Díaz.

Dado un funcional J convexo y diferenciable sobre un espacio de Hilbert H, es conocido (véase p.e. Lions |1|) que todo elemento u realizando el mínimo de J sobre un convexo cerrado K de H viene caracterizado por la *inecuación variacional*.

$$(1) \qquad J'(u)(v-u) \geq 0 \qquad \forall v \in K$$

Con frecuencia se presentan situaciones en las que interesa minimizar tales funcionales J sobre conjuntos K cerrados pero no convexos. En dicha situación es sabido (véase p.e. - Lions |1|. Teorema 1.3.) que todo elemento realizando el mínimo de J sobre K debe satisfacer la condición

$$(2) \qquad J'(u) \circ w \geq 0 \qquad \forall w \in G(K, u),$$

siendo

$$(3) \qquad G(K, u) = \{w \in H \mid \exists u_n \in K, \ \exists \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \text{ tales que } u=\lim u_n \quad w=\lim \lambda_n(u_n-u) \}$$

(Obsérvese que la condición (3) se puede interpretar como una *inecuación variacional* en la que el conjunto de *restricciones* depende de la solución. Nótese también que $G(K, u)$ es un cono de vértice 0 y que si $u \in \overset{\circ}{K}$ entonces $G(K, u) = H$).

El proposito de la presente comunicación es el estudio de un tipo concreto de estos problemas que aparece en el tratamiento variacional -- del problema del mínimo valor propio. En concreto, dado un operador lineal

A de dominio $D(A)$ denso en H y definido positivo (e.d. tal que $\exists c > 0$ tal que $(Au, u)_H > c\|u\|_H \quad \forall u \in D(A)$), se define, como es habitual (véase Miklin |1|), el espacio de energía H_A $(H \supset H_A \supset D(A))$ asociado al operador A, resultando un espacio de Hilbert para el producto $[\ ,\ ]$ $([u, v] = (Au, v)_H$ si $u \in D(A)$ y $v \in H_A)$. En estas circunstancias, es conocido (véase Mikhlin |1|) que el *mínimo valor propio generalizado* viene caracterizado por el valor mínimo del funcional $J(v) = [v, v]$ sobre el conjunto $K = \{v \in H_A$ tales que $\|v\|_H\} = 1$.

Un resultado abstracto referente a estos problemas es el siguiente:

<u>TEOREMA</u>. *Sean* H_1 *y* H_2 *espacios de Hilbert de normas* $\|\cdot\|_i$ *y productos* $(\ ,\ )_i$ *con* $i = 1, 2$. *Supongamos* $H_1 \subset H_2$ *con inclusión continua. Sea* $K = \{v \in H_1$ tales que $\|v\|_2 = 1\}$. *Entonces*

i) Se tiene la caracterización.

$$G(K, u) = \{v \in H_1 \mid (v, u)_2 = 0\} \quad \textit{para} \quad u \in H_2.$$

ii) Si además la inclusión de H_1 *en* H_2 *es compacta y si* $\lim_{\|v\| \to \infty} J(v) = +\infty$ *entonces todo funcional* J *diferenciable y convexo sobre* H *alcanza su mínimo sobre* K.

<u>Esquema de la demostración</u>. (i) La inclusión $\subset$ se tiene observando que si $w \in G(K, u)$ y si $w_n = \lambda_n(u_n - u) \xrightarrow{H_1} w$ entonces $\lim_{n\to\infty} (w_n, u)_2 = 0$. La inclusión en el otro sentido se tiene tomando

$$u_n = (1 - \frac{1}{n})u + \frac{\sqrt{2n-1}}{n} \cdot w$$

y $\lambda_n = \dfrac{\sqrt{2n-1}}{2}$ para $w \in H$ tal que $(w, u)_2 = 0$.

(ii) Basta observar que K es débilmente cerrado y entonces razonar como en el T^a 1.1. de Lions |1|.

En el caso particular de $H = L^2(\Omega)$ (Ω abierto acotado de $\mathbb{R}^n$) $A = -\Delta$ y $D(A) = C_0^\infty(\Omega)$, es conocido que $H_A = H_0^1(\Omega)$, (espacio de funciones de $L^2(\Omega)$ con todas sus primeras derivadas (en sentido de distribuciones) en $L^2(\Omega)$ y anulándose en la frontera $\partial\Omega$) y el teorema anterior proporciona entonces:

CORQLARIO. Sea $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ la primera autofunción del operador $A = -\Delta$, entonces se tiene que $H_0^1(\Omega) = L_0 \oplus G(K^*, u_0)$ siendo L_0 el subespacio generado por u_0 y $K^* = \{v \in H_0^1(\Omega)$ tales que $\|v\|_{L^2} = 1\}$.

Tal tipo de resultados puede ser de interés en el análisis numérico de problemas variacionales de contorno.

Agradecimiento.

El problema aquí considerado me ha sido propuesto por mi compañero J.L. Andrés Yebra a quien agradezco la colaboración prestada.

BIBLIOGRAFIA.

Mikhlin |1| : "Mathematical Physics; and advanced course". North-Holland 1970.

Lions |1| : "Optimal Control of Sistems Gouverned by Partial Differential Equations". Springer-Verlag. 1971.