UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE MATEMATICAS

COMPORTAMIENTO HIPERBOLICO DE ALGUNOS PROBLEMAS NO LINEALES DEGENERADOS

POR

J. ILDEFONSO DÍAZ

departamento de

ecuaciones funcionales

serie: PRE-PUBLICACIONES

n.º 19

COMPORTAMIENTO HIPERBOLICO DE ALGUNOS PROBLEMAS NO LINEALES DEGENERADOS.

Comunicación presentada por

Jesús Ildefonso Díaz Díaz.
Depto. de Ecuaciones Funcionales.
Facultad de Matemáticas.
Universidad Complutense de Madrid.

I. INTRODUCCION.

Un gran número de problemas de la Mecánica conducen al estudio de ecuaciones "no lineales degeneradas" es decir ecuaciones que para ciertos valores de la función incognita cambian de tipo o de orden (Véase OLEINIK (1) para una exposición general sobre el tema).

Otros problemas de naturaleza distinta a la Mecánica, como por ejemplo el problema de STEFAN a dos fases y de una forma más abstracta, los obtenidos por la minimización de funcionales convexos no derivables, admiten una formulación semejante a las ecuaciones no lineales degeneradas en términos de "multiecuaciones" (Véase BREZIS (1)).

En trabajos anteriores (BREZIS (2), BENILAN-BREZIS - CRANDALL (1) DIAZ (1)) se ha obtenido que ciertos problemas no lineales degenerados "estacionarios" y sobre dominios no acotados admiten una velocidad finita de propagación en el sentido de que si los datos del problema tienen soporte compacto, entonces la solución tiene también soporte compacto.

En la presente comunicación se enuncian resultados análogos al anteriormente citado para el caso de evolución. En concreto algunos problemas no lineales de marcado interés (véase OLEINIK (1) y LIONS (1)) son:

$$(I.1)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta\beta(u(x, t)) + c\beta(u(x, t)) \ni f(x, t) & \text{sobre } \Omega\times(0, T) \\ \beta(u(x, t)) \ni 0 & \text{sobre } \partial\Omega\times[0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{sobre } \Omega \end{cases}$$

Siendo

Ω abierto <u>no acotado</u> de R^n.

β grafo creciente de R^2.

c constante , $c \geq 0$

Las demostraciones de estos resultados, ejemplos concretos y el estudio de otros diferentes problemas se podrán encontrar en un amplio trabajo en elaboración.

II. RESULTADOS GENERALES.

II.1. Una forma de dar sentido al problema (I.1) puede consistir en considerarlo como un problema de Cauchy abstracto sobre un cierto espacio de Hilbert H para un operador obtenido a partir de β y de $-\Delta + cI$. Gracias a la monotonía de β, este operador será también "monótono" por lo que las técnicas de monotonía sobre espacios de Hilbert (véase BREZIS [1]) son útiles para la resolución de (I.1).

En general, dado A función de un espacio de Hilbert H en sí mismo y eventualmente multivalorada (e.d. $\forall u \in H$, $Au \subset H$), se definen

$$D(A) = \{u \in H : Au \neq \emptyset\} \quad , \quad \mathbb{R}(A) = \bigcup_{u \in H} Au.$$

Se dice que A es un "<u>operador monótono</u>" si satisface

$$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geq 0 \qquad \forall x_1, x_2 \in D(A), \ \forall y_1 \in Ax_1, \ \forall y_2 \in Ax_2.$$

Tras identificar A con su grafo, se dice que A es "<u>maximal monótono</u>", si es maximal en el sentido de inclusión de grafos, e.d., si A no admite una extensión monótono propia.

Una importante clase de operadores maximales monótonos consiste en los gradientes de funciones convexas. En concreto, dada

$$\phi: H \to (-\infty, +\infty] \quad , \quad \text{convexa, semicontínua inferiormente y } \phi \not\equiv +\infty$$

$\forall u \in H$, se define el conjunto

$\partial\phi(u) = \{f \in H: \phi(v) - \phi(u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in D(\phi)\}$, $\quad (D(\phi) = \{v \in H: \phi(v) < \infty\})$.

que es llamado "subdiferencial de ϕ en u" (Nótese que si ϕ es diferenciable Gateaux en u entonces (y solo entonces) $\partial\phi(u)$ se reduce a un solo punto). Gracias a un resultado de MINTY (véase BREZIS [1]), es conocido que el operador

$$u \to \partial\phi(u)$$

es un operador maximal monótono sobre H.

Gracias a las técnicas de monotonía, KOMURA, CRANDALL, PAZY, BREZIS y otros autores, han obtenido una versión no lineal del teorema de generación de semigrupos de contracciones de HILLE-YOSIDA-PHILLIPS que asegura que una condición necesaria y suficiente para que un operador A (de H en H) sea generador infinitesimal de semigrupos de contracciones (no necesariamente lineales) sobre H es que A sea maximal monótono. Posteriores refinamientos de este resultado (obtenidos por KATO, BREZIS, BENILAN y otros) premiten resolver el Problema abstracto de Cauchy

$$\text{(II.1)} \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t) & \text{sobre } H, \quad 0 < t < T. \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

para f absolutamente continua de $[0, T]$ en H, $u_0 \in D(A)$ ($u_0 \in \overline{D(A)}$ si $A = \partial\phi(\cdot)$) (véase BREZIS [1]).

II.2 Resultados de existencia para el Problema (I.1) han sido obtenidos en BREZIS [1] para el caso: $c = 0$, Ω abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, $R(\beta) = \mathbb{R}$.

Mostrando como "la expresión" $-\Delta\beta$ representa la subdiferencial de una cierta función convexa sobre el dual de $H_0^1(\Omega)$.

$$(H_0^1(\Omega)) = \{u \in L^2(\Omega): \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \ \forall i = 1, \dots n \ \text{ y } \ u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

(donde la derivación se debe tomar en el sentido de distribuciones y la restricción en sentido de los teoremas de trazas. (Véase FRIEDMAN (1))).

En el caso $c > 0$, Ω abierto cualquiera de $\mathbb{R}^n$, $R(\beta) = \mathbb{R}$; de una forma semejante a BREZIS (1) se puede obtener

TEOREMA 1. Sea Ω abierto (cualquiera de $\mathbb{R}^n$). $c > 0$

Sea β operador maximal monótono de $\mathbb{R}$ tal que $R(\beta) = \mathbb{R}$

Sean $u_0 \in (H_0^1(\Omega))^*$

f absolutamente continua de $[0, T]$ en $(H_0^1(\Omega))^*$

Entonces existe una única función $u \in C(0, T : (H_0^1(\Omega))^*)$ solución de (I.1) en el sentido:

(i) $u(\cdot, t) \in L^1(\Omega) \quad \forall t \in (0, T]$

(ii) $\forall t \in [0, T] \ \exists \ W_t \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$W_t(x) \in \beta(u(x, t)) \text{ casi para todo } x \in \Omega$$

(iii) se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta W_t(x) + c\, W_t(x) = f(x, t) \text{ en } L^2(0, T: (H_0^1(\Omega))^*)$$

(iv) $u(0, x) = u_0(x)$ en $(H_0^1(\Omega))^*$.

III. COMPORTAMIENTO HIPERBOLICO DE (I.1).

Es bien conocido que una propiedad que caracteriza a los problemas lineales hiperbólicos es la de tener una velocidad finita de propagación. Como consecuencia de esto, si los datos del problema tienen soporte compacto, las soluciones también lo tendrán para cada valor de tiempo.

Esta propiedad, que tiene unas motivaciones de tipo físico (véase OLEINIK), puede ser también obtenida para algunos problemas de evolución degenerados. En concreto

TEOREMA 2.

Sean Ω abierto no acotado de $\mathbb{R}^n$ y c constante $c > 0$

Sea $\beta(r) = |r|^{\alpha}$ sign$r$ $\quad \alpha \geq 1$

Sean $u_0 \in L^{\infty}(\Omega)$ y soporte de u_0 compacto de Ω

f absolutamente continua de $[0, T]$ en $(H_0^1(\Omega))^* \cap L^{\infty}(\Omega)$ verificando

$$\bigcup_{t \in [0,T]} \text{sop } f(t) \text{ es compacto } \Omega$$

Entonces la única solución $u \in \mathcal{C}(0,T : H_0^1(\Omega)^*)$ de

$$(\text{III.1}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta |u(x, t)|^{\alpha} \text{ sign } u(x, t) + c\, |u(x, t)|^{\alpha} \text{ sign } u(x, t) = \\ = f(x, t) & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \\ u(x, t) = 0 & \text{en } \partial\Omega \times [0, T] \end{cases}$$

verifica que $\forall t \in [0, T]$ sop $u(\cdot, t)$ es un compacto de Ω.

Un resultado análogo se puede obtener para algunos problemas de Inecuaciones Variacionales de evolución. Así por ejemplo se tiene

TEOREMA 3.

Sean Ω abierto no acotado de $\mathbb{R}^n$ y $c > 0$.

Sea

$$\beta(r) = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad |r| > 1 \\ [0, \infty) & \text{si} \quad |r| = 1 \\ 0 & \text{si} \quad |r| < 1 \end{cases}$$

Sea. u_0 como en el Teorema 2.

Entonces la única solución $u \in \mathcal{C}((0,T : H_0^1(\Omega)^*)$ de

$$(\text{III.2}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta\beta(u(x, t)) + c\beta(u(x, t)) \ni f(x, t) & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \\ u(x, t) = 0 & \text{en } \partial\Omega \times [0, T] \end{cases}$$

verifica

$\forall t \in [0, T]$ sop $u(\cdot, t)$ es un compacto de Ω.

En el trabajo anunciado en I se mostrará como el caso $c = 0$ también goza de esta propiedad, obteniendose de esta manera un teorema de existencia sobre dominios no acotados para el problema (I.1) correspondiente.

IV. REFERENCIAS.

H. BREZIS

(1) Monotonicity Methods in Hilbert Spaces and Some Applications to Nonlinear Partial Differential Equations. Contributions to nonlinear Functional Analysis, Ed. ZARANTONELLO. Academic Press, 1971.

(2) Solutions of Variational inequalities with compact support. Uspekhi Mat. Nauk vol. 129(1974). p. 103-108.

P. BENILAN-H. BREZIS-M.G. CRANDALL.

(1) A Semilinear equation in $L^1(R^n)$ (a aparecer).

J.I. DIAZ DIAZ

(1) Soluciones con soporte compacto de problemas unilaterales mixtos, Real Academia de Ciencias Exactas. F y N. de Madrid. Tomo LXIX, Cuadreno 3°. 1975.

A. FRIEDMAN

(1) Partial Differential Equations. Holt, Rinehart and Winston. 1969.

J.L. LIONS

(1) Quelques Problemes de la theorie equations nonlineaires d'evolution. Problemes in non-lineaire Analysis. C.I.M.E. 1970. Ed. G. PRODI.

O. OLEINIK

(1) On some degenerate quasilinear parabolic equations. Seminari dell'Instituto Nazionale di Alta Mathematica 1962-63, Gubbio 1964, pag. 355-371.