J. ILDEFONSO DIAZ DIAZ

SOLUCIONES CON SOPORTE COMPACTO PARA ALGUNOS PROBLEMAS NO LINEALES

PUBLICADO EN «ACTAS DEL V CONGRESO DE LA AGRUPACIÓN DE MATEMÁTICOS DE EXPRESIÓN LATINA»

MADRID
1978

SOLUCIONES CON SOPORTE COMPACTO PARA ALGUNOS PROBLEMAS NO LINEALES

por

J. ILDEFONSO DIAZ DIAZ

1. Introducción

Son muchos los autores que se han ocupado extensamente de problemas no lineales en derivadas parciales que aparecen con frecuencia en la práctica. Son muchos, también, los métodos por ellos empleados para dar respuesta a cuestiones tales como existencia, unicidad y regularidad de las soluciones (véase Lions [16], Browder [10], Brezis [5] y Crandall [11].)

Un conocimiento más exhaustivo de los problemas no lineales exige complementar las cuestiones anteriormente mencionadas con el estudio de algunas otras propiedades de diferente naturaleza. En el presente trabajo pretendemos exponer una serie de resultados dispersos en la literatura, hasta el momento, relativos a una cualidad que es específica de los problemas hiperbólicos lineales y curiosamente, de cierto tipo de problemas no lineales: «La velocidad finita de propagación». Más concretamente en lo que sigue nos ocuparemos de dar diversas respuestas a la siguiente cuestión.

Problema:

¿Bajo qué condiciones la solución de un problema no lineal (planteado en algún dominio no acotado) tiene soporte compacto, supuestos los datos con soportes compactos?

En la mayoría de los casos la compacidad del soporte de la solución es establecida «a priori» obteniéndose entonces incluso resultados de existencia y unicidad, de los que se suele carecer para el caso de dominios no acotados.

Nota: La asistencia a la Reunión y presentación de este trabajo ha sido subvencionada con una ayuda de viaje de la Fundación «Juan March».

De hecho, a partir de tal propiedad, los problemas en cuestión pueden ser considerados como formulados en dominios acotados, por lo que «heredan» propiedades establecidas ya para dicha situación.

Por otro lado, la compacidad del soporte de la solución tiene importantes interpretaciones físicas en algunos casos concretos (véase Brezis [8], Brezis-Stampacchia [9], Kinderlehrer [15]).

Aunque la exposición de los resultados sobre la materia exija una clara distinción según que los problemas en consideración sean estacionarios o de evolución (1), conviene resaltar que, en general, el método empleado en la obtención de este tipo de resultados sigue una línea común, consistente en la acotación «a priori» del soporte de toda posible solución mediante:

(i) Resultados de comparación sobre dominios no acotados.

(ii) Construcción de super y subsoluciones del problema en cuestión, ambas con soportes compactos.

Posteriormente, un sencillo argumento permite extender al caso no acotado los teoremas de existencia y unicidad tenidos para dominios acotados.

2. *Problemas no lineales estacionarios.*

Los primeros trabajos relativos a la compacidad del soporte de la solución para este tipo de problemas se deben a Auchmuty-Beals [1] y Berkovitz-Pollard [4]. Un estudio más sistemático fue emprendido primeramente por Brezis [6], al ocuparse de la amplia clase de problemas:

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u + \alpha(u) \ni f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \Gamma \end{array}\right. \tag{1}$$

siendo, Ω abierto regular *no acotado* de $\mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 1)$, $\Gamma = \partial\Omega$, α grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ (2) satisfaciendo $0 \in \alpha(0)$ (3). En esta situación se tiene:

(1) Por razones de extensión sólo se considerarán en esta exposición problemas estacionarios, aunque la comunicación original se refería también a los problemas de evolución. (Como alternativa, véase p. e. Oleinik-Kalashnikov-C. Yui-Lin [17], Brezis [8] y Díaz [13].)

(2) Dado $\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{R})$ se dice «operador en $\mathbb{R}$ (grafo en $\mathbb{R}^2$) maximal monótono» si verifica (i) $(x-y)\cdot(a-b) \geqslant 0$, $\forall x \in \alpha(a)$, $\forall y \in \alpha(b)$; (ii) no existe otro α^*: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{R})$ satisfaciendo (i) y tal que $\alpha(a) \subset \alpha^*(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$. A un tal grafo α se le suele asociar algunas funciones tales como:

$$\alpha^+(r) = \operatorname{Max} \alpha(r),\ \alpha^-(r) = \operatorname{Min} \alpha(r),\ \alpha^0(r) = \alpha^+(r) \quad \text{si} \quad r < 0,\ \alpha^0(r) = \alpha^-(r) \quad \text{si} \quad r < 0 \quad \text{y} \quad \alpha^0(0) = 0.$$

(3) De hecho es posible considerar problemas dados por operadores diferenciales más generales que Δ. (Véase Brezis [6].)

TEOREMA 1 ([6]).—Sea $g\, C^2(\Gamma)$, g con soporte compacto y $\alpha^0(g) \in L^\infty(\Gamma)$. Sea $f \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ verificando

$$\overline{\lim_{|x| \to +\infty}} \; |x|^N (f(x) - \alpha^+(0)) < 0 \quad \text{y} \quad \underline{\lim_{|x| \to +\infty}} \; |x|^N (f(x) - \alpha^-(0)) > 0. \tag{2}$$

Entonces existe una única $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $\forall\, p < \infty$, solución del problema (1) y teniendo soporte compacto$_{**}$.

La hipótesis (2) obliga a que $0 \in \operatorname{Int} \alpha(0)$ y es en alguna forma optimal, como lo muestra un contraejemplo debido a Brezis [7].

El estudio de problemas no lineales como (1) fue extendido en Díaz [12], al considerar el caso general de condiciones de contorno de tipo Neumann no lineales, teniéndose en dicho caso:

TEOREMA 2 ([13]).—Sea $f \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ satisfaciendo (2). Sea γ grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ tal que:

$$\exists\, \delta > 0 \ \text{ y } \ m > 0 \ \text{ tales que } \ |\gamma^0(r)| \geq m\,|r| \quad \text{si} \quad |r| < \delta \tag{3}$$

Entonces existe una única $u \in H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$, solución única del problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u + \alpha(u) \ni f & \text{en} \quad \Omega \\ -\dfrac{\partial u}{\partial n} \in \gamma(u) & \text{en} \quad \Gamma \end{array} \right. \tag{4}$$

Además u tiene soporte compacto$_{**}$.

La hipótesis (4) puede ser totalmente suprimida en el caso de convexo (Díaz [14]) ([4]).

Para el caso de $\Omega = \mathbb{R}^N$ el problema (1) fue considerado por Benilan-Brezis-Crandall [2], obteniendo:

TEOREMA 3 ([2]).—Sea $\alpha = \partial j$ (e. d. $j(r) = j(r_0) + \int_{r_0}^{r} \alpha^0(s)\, ds$). Supuesto $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y con soporte compacto, el problema $-\Delta u + \alpha(u) \ni f$ en $\mathbb{R}^N$ tiene una solución $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ con soporte compacto si y sólo si se verifica

$$\int_{-1}^{1} (j(s))^{-1/2}\, ds < +\infty \;^{**} \tag{5}$$

([4]) Una diferente demostración de este hecho es debida a Brezis (comunicación personal).

Nótese que aunque (5) incluye el caso de $0 \in \operatorname{Int} \alpha(0)$, sin embargo la hipótesis (2) sobre f es más general que el suponer a f con soporte compacto en $\mathbb{R}^N$.

El estudio del problema (1) bajo la hipótesis (5) sobre j (y por tanto sobre α) fue abordado en Díaz [13]. De forma análoga se consideró el problema (4) obteniéndose:

Teorema 4 ([13]).—Sean $\alpha = \partial j$ satisfaciendo (5), $f \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ y con soporte compacto y γ grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ tal que $R(\alpha^{-1} + \gamma) = \mathbb{R}$ (condición para la existencia) y tal que

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \text{tal que} \quad |\gamma^0(r)| \geq |\sqrt{j(r)}| \quad \text{si} \quad |r| < \varepsilon. \tag{6}$$

Entonces existe $u \in H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ solución única de (4) y con soporte compacto$_{***}$.

Al igual que bajo la condición (2), la hipótesis (6) sobre γ resulta supérflua en el caso de que Ω sea convexo (Díaz [14]).

Los resultados anteriormente citados admiten una expresión equivalente en términos de minimización de funcionales covexos y de sus problemas duales (véase Díaz [13]) obteniéndose así una unificación con los primeros trabajos en la materia. Es también interesante señalar el trabajo Bensoussan-Brezis-Friedman [3] en el que se obtiene la compacidad del soporte de la solución de ciertos problemas no lineales denominados Inecuaciones Cuasi-variacionales.

Bibliografía

[1] Auchmuty, J. and Beals, R.: *Variational Solutions of some nonlinear free boundary problems.* «Arch. Rat. Mech. Anal.», 43 (1971), pp. 255-271.

[2] Benilan, Ph., Brezis, H. and Crandall, M.: *A semilinear equation in $L^1(\mathbb{R}^n)$.* «Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa», II, n.º 4 (1975), pp. 523-555.

[3] Bensoussan, A., Brezis, H. and Friedman, A.: *Estimates on the free boundary for Quasi Variational Inequalities.* (Aparecerá.)

[4] Berkovitz, L. and Pollard, H.: *A non classical variational problem arising from an optimal filter problem.* «Arch. Rat. Mech. Anal», 26 (1967), pp. 281-304.

[5] Brezis, H.: *Monotonicity methods in Hilbert Spaces and some Applications to Nonlinear partial Diff. Equations* «Contributions to Nonlinear Funcional Analysis». E. Zarantonello. Ac. Press. (1971).

[6] Brezis, H.: *Solutions of variational inequalities with compact support Uspekhi.* «Mat. Nauk.», 129 (1974), pp. 103-108.

[7] Brezis, H.: *Solutions a support compact d'Inequations Variationelles.* Seminaire Leray. College de France (1974).

[8] Brezis, H.: *Monotone operators, non linear semi-groups and applications.* «Proc Int. Congress. Math.». Vancouver, 1974.

[9] BREZIS, H. and STAMPACCHIA, G.: *Une nouvelle méthode pour l'étude d'ecoulements stationnaires*. C. R. Aca. Sci. Paris, 276 (1973), pp. 129-132.

[10] BROWDER, F.: *Existence theorems for nonlinear partial differential equations*. «Global Analysis». Proc. Symp. Pure Appl. Math., 16, AMS (1970), pp. 1-60.

[11] CRANDALL, M. G.: *An Introduction to Evolution Governed by Accretive Operators*. «Dinamical Systems». Int. Symposium Providence, 1974

[12] DÍAZ DÍAZ, J. I.: *Soluciones con soporte compacto de problemas unilaterales mixtos*. R. Acad. de Cienc. Exactas, F. y N. Madrid, LXIX (1975).

[13] DÍAZ DÍAZ, J. I.: *Soluciones con soporte compacto para ciertos problemas no lineales*. Tesis. Univ. Complutense de Madrid, 1976.

[14] DÍAZ DÍAZ, J. I.: *Problemas de Neumann no lineales con velocidad de propagación finita*. (Aparecerá.)

[15] KINDERLHRER, D.: *Elliptic Variational Inequalities*. «Proc. Inst. Congress. Math.», Vancouver, 1974.

[16] LIONS, J. L.: *Quelques méthodes de resolution des problèmes aux limites non linearcs*. Dunod. Paris, 1969.

[17] OLEINIK, O. A., KALASHNIKOV, A. S. and YUI-LIN, C.: *The Cauchy problem and boundary-value problems for equations of the nostationary filtration types*. «Izv. Akad. Nauk.», 22 (1958), pp. 667-704 (en ruso).