"ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS
PROBLEMAS CUASI-LINEALES DE-
GENERADOS" (*)

J. Ildefonso Díaz Díaz

(*) Comunicación presentada en el I Congreso sobre Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones. El Escorial (Madrid). Mayo 1978.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS PROBLEMAS CUASI-LINEALES DEGENERADOS

por J. Ildefonso Díaz Díaz
Universidad Complutense de Madrid.

§0. INTRODUCCION.

Los problemas cuasilineales degenerados que aquí se consideran, corresponden a la formulación matemática de modelos físicos de diversa naturaleza, como por ejemplo:

Modelo 1.

"Conducción de calor no lineal". Sean: Ω = *abierto de* $\mathbb{R}^N$, $u(t, x)$ = *temperatura en el punto* x $(x \in \Omega)$ *y en el instante* $t (0 \leq t \leq T \leq +\infty)$ $c(u)$ = *densidad* $(c(u) > 0)$, $\rho(u)$, $k(u)$ = *conductividades del material* $(k(u) \geq k_0 > 0,\ \rho(u) \geq 0)$. *Se tiene entonces la relación*

$$c(u) \cdot \rho(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (k(u) \cdot \operatorname{grad} u) \quad \text{en } (0,T) \times \Omega = Q.$$

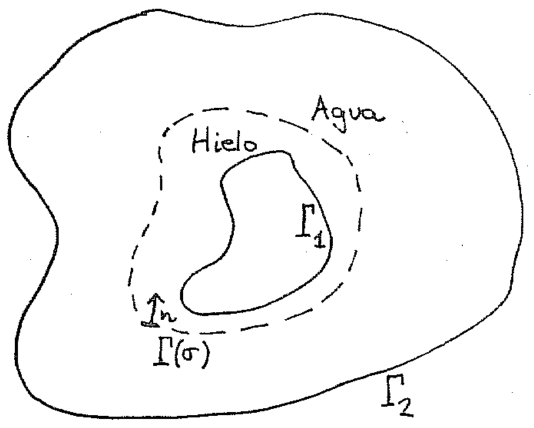
Modelo 2.

"Filtración de fluídos y gases en medios porosos". Sean: $\Omega = (0, +\infty)$, $u(t, x)$ = *densidad del gas en movimiento laminar en el punto* $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$, $(u(t, x))^{m-1}$ = *presión del gas* $(m > 1)$. *Entonces es conocida la relación*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u^m) \quad \text{en } (0, T) \times \Omega$$

Modelo 3.

"Problema de Stefan a dos fases". Sean: Ω *abierto no conexo de* $\mathbb{R}^N$ *de fronteras* Γ_1 *y* Γ_2, $u_i(t, x)$ = *temperatura o estado de la fa-*



se i $(i = 1, 2)$ *sobre* $Q_1 = \{(t, x) \in (0, T) \times \Omega \mid u_1(t, x) < 0\}$ *y* $Q_2 = \{(t, x) \in (0, T) \times \Omega \mid u_1(t, x) > 0\}$, p_i = *conductividad térmica de la fase* i, q = *calor latente* $(q > 0)$. *Entonces se tiene*

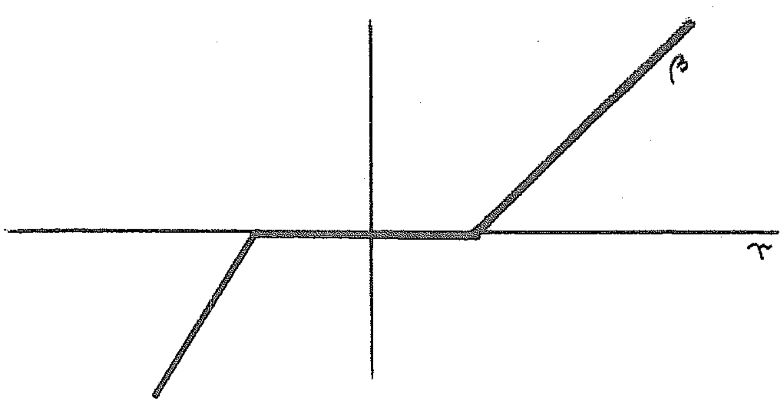
$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} - p_i \, \Delta u_i = 0 \quad \mathit{en} \quad Q_i \quad (i = 1, 2) \\[2ex] u_1 = u_2 = 0 \quad \mathit{en} \ S = \bigcup\limits_{\sigma \in [0,T]} \Gamma(\sigma) \quad , \quad \Gamma(\sigma) = \{x \in \Omega \mid u_1(\sigma, x) = u_2(\sigma, x)\} \\[2ex] q \cdot \cos(n,t) - \sum\limits_{i=1}^{2} (p_i \sum\limits_{j=1}^{N} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \cos(n, x_j) = 0 \quad \mathit{en} \ S \end{array}\right.$$

siendo $\vec{n}$ *el vector normal exterior a* Q_2).

Los modelos 1 y 2 se pueden formular obviamente en términos más generales mediante la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta\beta(u) = 0 \quad \text{en} \quad (0, T) \times \Omega \tag{1}$$

siendo β una función real de clase C^1 y tal que $\beta'(r) \geq 0$ para $r \in \mathbb{R}$. Por otra parte gracias a una cierta transformación de incógnitas, el modelo 3 se puede formular en términos de (1) tomando ahora como β una función de grafo como el de la figura siguiente



(obsérvese que β es creciente pero no de clase C^1).

Como es bien conocido, para que los modelos anteriores estén "bien blanteados" es necesario obligar a que se tenga una condición inicial

$$u(0, x) = u_0(x)$$

y unas condiciones de contorno. Entre estas, las más significativas son las siguientes:

$$* \ u(t, x) = g(t, x) \quad (\text{o bien} \quad \beta(u) = g)$$
$$(t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega = \Sigma.$$
(c. de tipo Dirichlet).

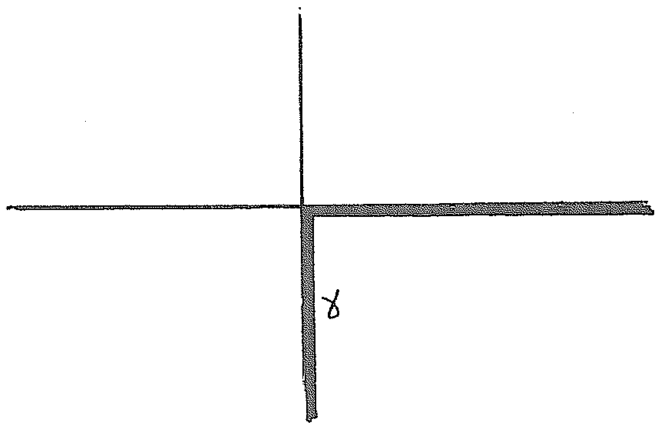
$$* \ \frac{\partial\beta(u)}{\partial n} = h \quad \text{en} \quad \Sigma \ (n = \text{vector normal unitario exterior a } \Sigma).$$
(c. de tipo Neumann).

$$* \ \gamma(\beta(u)) + \frac{\partial\beta(u)}{\partial n} = \ell \quad (\gamma \ \text{función real creciente } \underline{\text{conocida}})$$
(c. de tipo mixto).

Sin embargo, también son de gran interés en las aplicaciones otro tipo de condiciones de contorno que aparecen en problemas denominados "unilaterales". Así por ejemplo puede interesar que se tenga en Σ que $u \geq 0$, $-\frac{\partial u}{\partial n} \geq 0$ y $u \cdot (-\frac{\partial u}{\partial n}) = 0$. Tal condición se puede expresar en otros términos como

$$-\frac{\partial u}{\partial n} \in \gamma(u) \quad \text{en} \quad \Sigma$$

cuando γ representa un grafo de $\mathbb{R}^2$ de la forma



Tal grafo γ y las funciones β introducidas anteriormente forman parte de un tipo de grafos de $\mathbb{R}^2$ (o funciones multívocas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$) que son denominados "maximales monótonos" y de los que aquí nos bastará saber que vienen dados por grafos de funciones b reales monótonas no de--crecientes, asignando a cada $r \in \mathbb{R}$ el conjunto $(-\infty, b(r+)]$ si $b(r-) = -\infty$, $[b(r-), +\infty)$ si $b(r+) = +\infty$ ó $[b(r-), b(r+)]$ en otro caso. De esta forma, la condición genérica

$$\frac{-\partial\beta(u)}{\partial n} + \gamma(\beta(u)) \ni m \quad \text{en} \quad \Sigma$$

contiene todos los tipos de c. de contorno anteriormente mencionados.

Los problemas a considerar pueden ser ahora enunciados más concretamente como

$$P_D \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta\beta(u) \ni f & \text{en} \quad Q \\ \beta(u) \ni g & \text{en} \quad \Sigma \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

y también

$$P_N \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta\beta(u) \ni f & \text{en} \quad Q \\ \dfrac{-\partial\beta(u)}{\partial n} \in \gamma(u) & \text{en} \quad \Sigma \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

siendo γ y β grafos maximales de $\mathbb{R}^2$ con la restricción (natural) de que $0 \in \beta(0) \cap \gamma(0)$. Como justificación del título de esta exposición conviene señalar que la ecuación (1) es cuasilineal (pues aparecen términos no lineales en u) y además degenerada (en el sentido de que los "coeficientes" de (1) no cumplen siempre los requisitos para que pueda ser ca talogada de tipo parabólico).

El plan a seguir en el resto de la exposición pretende poner de manifiesto algunas propiedades de estos problemas. Así en §1 nos ocuparemos de algunos resultados (abstractos) de existencia y unicidad obtenidos a partir del método de semigrupos no lineales y también se pondrá de manifiesto la ausencia (en general) de soluciones clásicas para P_D. Finalmente en §2 nos ocuparemos de mostrar que los problema P_D y P_N (a diferencia del modelo lineal del calor) poseen una velocidad finita de propagación de las perturbaciones, lo que los convierte en problemas particularmente interesantes desde el punto de vista de las aplicaciones (1).

§1. EXISTENCIA, UNICIDAD Y REGULARIDAD.

Los problemas P_D y P_N son ejemplos representativos de problemas no lineales que (en versiones particulares) han sido abordados en la década de los sesenta por numerosos autores y técnicas. (Extensas bibliografías se pueden encontrar en Oleinik |27|, Lions |24| y Díaz |10|). Sin embargo, por el momento, son las técnicas de "semigrupos de operadores en espacios de Banach" las que ofrecen las respuestas más generales sobre cuestiones tales como las de existencia, unicidad y regularidad. Partiendo de la teoría lineal (Hille, Yosida, Phillips, Lumer...), tal teoría comenzó su apogeo con el estudio profundo del caso de espacios de Hilbert (Kato, Brezis, Pazy...) y ya en los comienzos de los setenta ofrecía resultados "satisfactorios" para espacios de Banach cualesquiera (Crandall, Benilan, Evans...).

El método de semigrupos comienza por asignar al problema en E.D.P. (por ejemplo P_D con $f \equiv g \equiv 0$) un problema de Cauchy abstracto sobre algún espacio de Banach X elegido convenientemente. Una vez elegido

---

(1) Por razones de extensión, no se expondrán aquí otros tipos de propiedades que distancian a P_D y P_N del modelo lineal del calor y que pueden encontrarse en Knerr |22| ó Díaz |11|.

tal espacio X entre los espacios de funciones o distribuciones definidas sobre Ω, la incógnita $u(t, x)$ puede interpretarse como aplicación de $[0, T]$ a valores en X y así el término $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$ puede sustituirse por el de $\frac{du}{dt}(t)$. Por otra parte para reducir P_D a un problema de Cauchy, se definirá un operador $A: D(A)(\subset X) \to X$ tal que se tenga que todo elemento de $D(A)$ satisfaga (en algún sentido) las c. de contorno sobre $\partial\Omega(\phi = 0$ sobre $\partial\Omega$ si $\phi \in D(A))$ y además que $A\phi = -\Delta\beta(\phi)$ si $\phi \in D(A)$. De esta forma el problema en E.D.P. se puede formular ahora en términos de

$$
(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0 & t \in (0, T) \\ u(0) = u_0 . \end{cases}
$$

Antes de ilustrar este proceso con diversas eleciones de X para P_D, nos ocuparemos de la resolución de (2). Debido a la dimensión no finita del espacio X y que en general A será discontinuo (aunque cerrado), los métodos usuales de E.D.O. tales como "iterantes de Picard", etc. no pueden ser aplicados. Sin embargo (2) puede ser aproximado mediante el "esquema implícito"

$$
\begin{cases} \dfrac{u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t-\varepsilon)}{\varepsilon} + A\, u_\varepsilon(t) = 0 & \text{si} \quad t \geq 0 \\ u_\varepsilon(t) = u_0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}
$$

para $\varepsilon > 0$. De esta forma $u_\varepsilon(t) = (I + \varepsilon A)^{-1} u_\varepsilon(t-\varepsilon)$ y por tanto si designamos $J_\varepsilon = (I + \varepsilon A)^{-1}$ se tendrá por iteración que

$$
u_\varepsilon(t) = J_\varepsilon^{[t/\varepsilon]+1} u_0 \qquad \text{para} \quad t > 0 \qquad ([\ ] \equiv \text{parte entera})
$$

Así para asegurar la existencia de u_ε interesará que $D(J_\varepsilon) = R(I + \varepsilon A)$ sea "suficientemente grande". Para poder tener la conver gencia cuando $\varepsilon \downarrow 0$ se impondrá que $\{J^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sea equicontinua, para lo que bastaría por ejemplo que J fuese una contracción. Esta última condición coincide con la definición de una amplia clase de operadores (que en general se suponen a valores en $\mathcal{P}(X)$) y que son denominados "acretivos".

Es fácil mostrar que si X es un e. de Hilbert tales operadores satisfacen la relación $(Ax - Ay,\ x-y) \geq 0\ \forall x,y \in D(A)$, y entonces coinciden con los denominados operadores "monótonos".

El siguiente teorema debido a Crandall y Ligget (1971) (en la actualidad mejorado por Kobayashi, Crandall-Evans...) ofrece condiciones suficientes simples para la resolución de (2):

Teorema.

Sea A *un operador acretivo en* X *tal que* $R(I + \lambda A) \supseteq \overline{D(A)}$ *para* $\lambda > 0$. *Entonces para todo* $x \in \overline{D(A)}$ *existe* $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} J_\varepsilon^{[t/\varepsilon]+1} x = S(t)x$ *con convergencia uniforme para* $0 \leq t \leq T$. *Además la aplicación* $S(t)$ *así definida es un semigrupo de contracciones sobre* $\overline{D(A)}$. *Esto es, se tiene*

(i) $S(t): \overline{D(A)} \to \overline{D(A)}$ *para* $t \geq 0$

(ii) $S(t) \circ S(\tau) = S(t+\tau)$ *para* $t, \tau \geq 0$

(iii) $\lim_{t\downarrow 0} S(t)x = S(0)x = x$ *si* $x \in \overline{D(A)}$

(iv) $\|S(t)x - S(t)y\| \leq \|x-y\|$ *si* $x, y \in \overline{D(A)}$, $t \geq 0$.

De la discusión anterior cabe esperar que la función $u(t) = S(t)u_0$ satisfaga (2) en algún sentido a precisar. Esto nos lleva a considerar los problemas no homogéneos e.d. problemas de Cauchy asociados a ecuaciones de la forma

$$(3) \qquad \frac{du}{dt} + Au(t) \ni f(t) \quad t \in (0, T). \qquad (f \in L^1_{loc}(0, T: X))$$

Señalemos que ahora también se puede emplear un esquema implícito aunque en este caso el límite de $J_{\varepsilon}^{[t/\varepsilon]+1}$ no engendre un semigrupo. A tal límite se le denomina <u>ℓ-solución</u> de (3) y es siempre un elemento del espacio $C([0, T] : X)$ e incluso Lipschitziana. Si además una función así obtenida está en $W^{1,1}(0, T: X)$ (2) y verifica la ecuación (3) en c.p. $t \in (0, T)$ entonces se dice <u>solución fuerte</u>. Una observación importante es que si el espacio X es tal que "toda función de $(0, T)$ en X continua y de Lipschitz es derivable en casi todo $t \in (0, T)$" entonces toda ℓ-solución es automáticamente solución fuerte. La anterior propiedad es satisfecha por ejemplo si X es reflexivo, pero no lo es si se toma $X = L^1(\Omega)$ ó $X = L^{\infty}(\Omega)$. (Diversos resultados asegurando la existencia de soluciones fuertes pueden encontrarse en Benilan |2|, Brezis |6| ó Crandall |8|; en ellos se tienen extensas referencias sobre la teoría de operadores acretivos). Señalemos también que la unicidad de ℓ-soluciones se tiene con sólo exigir que A sea acretivo como lo muestra un resultado debido a Benilan |2|.

Volvamos por fin a los problemas P_D y P_N planteado en la Introducción. La acretividad del operador abstracto asociado al operador diferencial $-\Delta\beta$ y con c. de tipo Dirichlet ha sido mostrada por Brezis [4] cuando se toma como X el espacio de Hilbert $H^{-1}(\Omega)$ $(H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$ (3). Sin embargo se tienen resultados negativos si se toma $X = L^p(\Omega)$ con $1 < p \leq +\infty$. El caso de c. de tipo Neumann ha sido abordado por Benilan |4|, quien muestra que entonces el operador $-\Delta\beta$ es acretivo en $L^1(\Omega)$ y en ningún otro $L^p(\Omega)$. Mediante diversas hipótesis sobre β se está entonces de aplicar el Teorema 1 (ó similares) obteniéndose resultados como por ejemplo los siguientes:

---

(2) Se supone al lector conocedor de los espacios de Sobolev de más frecuente uso. En otro caso véase por ejemplo Adams |1|.

(3) En todo el apartado §1 se supone Ω abierto <u>acotado</u> de $\mathbb{R}^N$.

* "Si $D(\beta) = R(\beta) = \mathbb{R}$ y los datos de P_D están en adecuados espacios funcionales, entonces existe una única solución fuerte en $H^{-1}(\Omega)$ de dicho problema". (Damlamian |9|)

* "Si $D(\beta) + R(\beta) = \mathbb{R}$ y los datos de P_N están en adecuados espacios funcionales, entonces existe una única ℓ-solución en $L^1(\Omega)$ de tal problema". (Benilan |2|).

Las soluciones así encontradas se encuentras en los espacios $C([0,T]:H^{-1}(\Omega))$ y $C([0,T]:L^1(\Omega))$ respectivamente. Surge entonces una pregunta inmediada: ¿será cierto que si $\beta \in C^\infty$ (resp. β y $\gamma \in C^\infty$) las soluciones se pueden encontrar de clase $C^\infty(Q)$? La respuesta en general es negativa, como lo muestra el siguiente contraejemplo debido a Lions |24|:

<u>Contraejemplo</u>.

Sea $\Omega = (0, +\infty)$ y $x_0 > 0$ fijo. Sean $\beta(r) = |r| \cdot r$, $g(t, 0) = \frac{1}{2} x_0 + t$ y $u_0(x) = \frac{x_0 - x}{2}$ si $0 < x < x_0$ y cero en el resto. Entonces la solución (única) de P_D viene dada por

$$u(t, x) = \begin{cases} \left(\frac{x_0 - x}{2}\right) + t & \text{si} \quad 0 < x < x_0 + 2t \\ 0 & \text{si} \quad x \geq x_0 + 2t \end{cases}$$

y entonces u_x es claramente discontinua.

Otro tipo de razonamientos que dan respuesta negativa a la cuestión antes planteada se pueden encontrar en Lions |25|, sin embargo en Benilan |3| se tienen interesantes resultados de regularidad si $\beta(r) = |r|^{(m-1)} \cdot r$ con $m > 1$.

2. PROPAGACION (A VELOCIDAD) FINITA DE LAS PERTURBACIONES.

Es bien conocido que una de las propiedades que caracterizan a las ecuaciones lineales de tipo hiperbólico es la velocidad finita de propagación de las perturbaciones, singularidades y señales. Tal propiedad distingue tales ecuaciones de las de otros tipos. Así por ejemplo la fórmula de Poisson para la ecuacion (lineal) del calor muestra que ésto no se tiene en dicho caso.

Tal propiedad (que designaremos abreviadamente por (P.F.)) puede ser formulada con más precisión en el sentido de que, supuesto el abierto Ω (de definición de la E.D.P.) no acotado de $\mathbb{R}^N$, entonces la propiedad es satisfecha cuando a datos con soporte compacto (o señales) les corresponde una solución u tal que en cada instante t, $u(t, \cdot)$ tiene soporte compacto en Ω.

En este apartado nos ocuparemos de mostrar como los problemas P_D y P_N, (aunque catalogables a "grosso modo" como parabólicos) satisfacen la propiedad (P.F.), para una clase amplia de grafos β. Señalemos que tal propiedad (que será establecida "a priori"), permite entonces tratar los problemas sobre dominios no acotados de una manera similar a los del caso acotado, obteniéndose así teoremas de existencia y unicidad (sólo conocidos para Ω acotado), así como otros tipos de propiedades tales como teoremas del máximo, teoremas de regularidad... etc.

En la búsqueda de condiciones suficientes (y necesarias) sobre β para que P_D satisfaga la propiedad (P.F.), observemos que si $\beta'(0) > 0$ entonces la ecuación (1) deja de ser degenerada, teniéndose entonces solución regular $u \in C^{2,1}(\bar{Q})$ (supuesto por ejemplo que $\beta \in C^3(\mathbb{R})$), con lo que se puede aplicar el principio (fuerte) del máximo. (Véase Oleinik |26|). Bastaría entonces tomar $\Omega = (0, +\infty)$, $g(t) > 0$, $u_0 \geq 0$ y entonces se tendría que $u(t, \cdot) > 0$ para todo $t \in (0, T)$.

Así pues, una primera condición necesaria para que se tenga (P.F.) es $\beta'(0) = 0$. Sin embargo esta condición no es aún suficiente (véase Kalashnikov |18|), siendo necesario exigir una razón de convergencia de $\beta'(s)$ hacia cero cuando $s \to 0$. En concreto Oleinik-Kalashnikov-Czou Yui Lin |27| mostraron, para $N = 1$, $\beta \in C^3$ y datos positivos, que P_D satisfacía (P.F.) si

$$(4) \qquad \int_0^r \frac{\beta'(s)}{s}\, ds < +\infty \qquad \text{para todo} \quad r \in \mathbb{R}^+$$

La anterior propiedad es bastante restrictiva (no incluye por ejemplo el problema de Stefan). Sin embargo si β es C^1, (4) se puede formular mediante un cambio trivial de variables como

$$(5) \qquad \psi(s) \equiv \int_0^s \frac{dx}{\beta^{-1}(x)} < +\infty \qquad \text{si} \qquad s \in \mathbb{R}.$$ (4)

Obsérvese que ahora (5) tiene sentido aunque β sea un grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ (eventualmente multívoco) pues el conjunto de discontinuidades de una función real monótona tiene medida de Lebesgue nula.

Enunciemos, por fin, el teorema para P_D:

<u>Teorema</u> 2. (Díaz |10|)

Sea Ω un abierto de frontera regular, no acotado de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$. Supuestos satisfechas las mismas hipótesis del resultado de existencia para abiertos acotados y si además β satisface (5), y los datos de P_D poseen soportes en $B(0,R)$, entonces existe una única función $u \in C([0, T] : H^{-1}(\Omega))$

(4) La función ψ tiene un significado físico muy concreto. Así por ejemplo en el modelo 2 representa la <u>presión acumulada</u> y ψ' la presión puntual.

$u(t,\cdot) \in L^{\infty}(\Omega)$, solución fuerte de P_D. Además existe una constante $K > 0$ tal que

$$\text{sop}\ u(t,\cdot) \subset \{x \in \bar{\Omega} : |x| \leq R + 2K\sqrt{t}\} \quad \text{para todo} \quad t \in [0, T].$$

La demostración consta de tres etapas y constituye un método, ya clásico, de abordar este tipo de propiedades:

1^{era} Etapa.

"Obtención de Lemas de comparación (u ordenación) entre las soluciones correspondientes a diferentes datos (ordenados). Este tipo de resultados está íntimamente ligado al problema de la unicidad de soluciones así como a resultados de tipo "principio del máximo". En los problemas homogéneos (e.d. con datos nulos en la frontera) son una consecuencia inmediata de la T-acretividad del operador abstracto asociado. (Véase por ejemplo Damlamian |9|, Benilan |2|, Díaz |10|).

2$^{\underline{a}}$ Etapa.

"Construcción de super($\bar{u}$) y subsoluciones ($\underline{u}$) con soportes compactos". Gracias a los resultados de la etapa 1$^{\underline{a}}$ se tendría entonces que toda posible solución u sería tal que $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ y de aquí la compacidad "a priori" del soporte.

3$^{\underline{a}}$ Etapa.

"Extensión a Ω de los teoremas de existencia y unicidad establecidos para abiertos acotados".

Por razones obvias de extensión, prescindiremos de los detalles de la aplicación a P_D. Sin embargo interesa señalar, que por su caracter constructivo, la $2^{\underline{a}}$ etapa ofrece una especial dificultad en su obtención. Indiquemos, por ejemplo, que la supersolución encontrada es de la forma

$$\bar{u}(t, x) = \begin{cases} h'(-c_1(|x| - c_1 t - c_2)) & \text{si} \quad 0 \leq |x| \leq c_2 + c_1 t \\ 0 & \text{si} \quad |x| > c_2 + c_1 t \end{cases}$$

siendo $h = \psi^{-1}$ y c_1 y c_2 constantes positivas elegidas adecuadamente (La posible singularidad del término $-\Delta\beta(\bar{u})$ se evita mendiante la aplicación de la $1^{\underline{a}}$ etapa a la parte de Ω exterior a un cierto entorno del origen).

Antes de hacer otro tipo de comentarios a cerca del Teorema 2 pasemos a considerar el problema P_N. En este caso las super y subsoluciones construidas para el problema P_D podrían ser de gran utilidad para nuestros fines siempre que las podamos comparar con toda ℓ-solución de P_N. Ahora es la primera etapa, la de más difícil factura. (Obsérvese que además hay un desfase de espacios; H^{-1} y L^1 respectivamente). Resulta entonces crucial el siguiente Lema que extiende resultados similares debidos a Brezis |5|.

Lema 1.

Sean; u solución fuerte en $H^{-1}(\Omega)$ de P_D y u^* ℓ-solución en $L^1(\Omega)$ de P_N, correspondientes a los mismos datos u_0 y f.

Supuesto entonces que $-\frac{\beta(u)}{\partial n}(t, x) = \gamma^*(u(t,x))$ *sobre* Σ, *siendo* γ^* *función real conocida (no necesariamente monótona) tal que* $\gamma^*(r) \leq \inf \gamma(r)$ *para* $r \in D(\gamma)$, *entonces* $u(t,\cdot) \leq u^*(t,\cdot)$.

La demostración del Lema 1 es bastante laboriosa y resulta de una adecuada aplicación de la Fórmula de Green después de aproximar ambas soluciones por funciones regulares. (Véase |10|).

Dada la definición de la super y sub-soluciones de la P_D, basta imponer a γ la hipótesis

(6) $|\gamma^0(r)| \geq m \cdot |r|$ si $|r| < \delta$, para algún $\delta > 0$ y $m > 0$ [5]

para que dichas funciones lo sean también para P_N, obteniéndose finalmente Díaz |10| el siguiente resultado:

Teorema 3.

Sea Ω abierto de frontera regular no acotado de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ Supuestas satisfechas las hipótesis del resultado de existencia para abiertos acotados, si además β y γ satisfacen (5) y (6) respectivamente, y si los datos de P_N, poseen soportes en $B(0, R)$ entonces existe una única función $u \in C([0, T]: L^1(\Omega))$, $u(t,\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ ℓ-solución de P_N. Además existen K_1 y K_2 constantes positivas tales que

$$\text{sop } u(t,\cdot) \subset \{x \in \bar{\Omega} : |x| \leq R + K_1 + K_2 t\} \textit{ para todo } t \in [0,T].$$

La hipótesis (5) supuesta en los teoremas 2 y 3 es también necesaria para que la propiedad (P.F.) sea satisfecha, si se supone $\beta \in C^3(\mathbb{R})$. (véase Kalashnikov |18| y Peletier |28|). Sin embargo para el caso de β eventualmente multívoco sólo se tiene una respuesta análoga si $\beta(0)$ es un intervalo.

La hipótesis (6) puede ser totalmente suprimida si el abierto satisface una cierta hypótesis geométrica que en particular es satisfecha por todo abierto cuyo complementario es un convexo de $\mathbb{R}^N$. (Véase Díaz |10|).

---

[5] $\gamma^0(r)$ representa al elemento de $\gamma(r)$ de menor norma.

A continuación recogemos en forma de observaciones otros comentarios sobre la propiedad (P.F.).

Observación 1.

(Sobre las estimaciones). En el caso de $\beta \in C^3$ y $N = 1$, Kalashnikov |17| mostró que el conjunto $P[u] = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T) \mid u(x,t) > 0\}$ está acotado por dos curvas monótonas y Lipschitzianas que comienzan en los extremos del soporte de u_0. Además recientemente Knerr |21| ha probado que tales curvas o bien son estrictamente crecientes para todo $t \geq 0$, o bien son inicialmente verticales hasta un cierto t_0 y después estrictamente crecientes. La estimación del Teorema 2 extiende al caso general la obtenida por Knerr y guarda una cierta similitud a las de Brezis-Friedman |7| y Evans-Knerr |14|, obtenidas para otros problemas "parabólicos" no lineales.

Finalmente es de resaltar la coincidencia de la estimación del Teorema 2 con la obtenida por Friedman-Kinderlehrer |15| al considerar el caso concreto del problema de Stefan.

Observación 2.

(Otras ecuaciones). La hipótesis (4) es también suficiente para que se tenga la propiedad (P.F.) al sustituir la ecuación (1) (β siempre de clase C^3 y $N = 1$) por una de las ecuaciones siguientes:

* $u_t - (\beta(u))_{xx} + \lambda(u) = 0$, siendo $\lambda \in C^1$ y $\lambda' \geq 0$

  (Kalashnikov |19| y Knerr |22|).

* $u_t - (\beta(u))_{xx} + (\emptyset(u))_x = 0$, con $\emptyset \in C^2$ monótona. (Gilding |16|). (Véase también Kruskov |23| para la ecuación de primer orden que resulta al tomar $\beta \equiv 0$).

* $u_t - (\beta(u))_{xx} + (\emptyset(u))_x + \lambda(u) = 0$, con $\emptyset$ y λ como antes

(Kershner |20| y Evans-Knerr |14|).

Por otra parte, también pueden considerarse ecuaciones con no linealidades sobre las derivadas de la incógnita. Así por ejemplo en Díaz-Herrero |12| se muestra que si $p > 2$, el problema de Dirichlet asociado a la ecuación

$$u_t - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f \quad \text{en} \quad \Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},$$

$$N \geq 1$$

satisface la propiedad (P.F.).

Finalmente, las no linealidades pueden ser consideradas afectando a operadores diferenciales. Así por ejemplo en G.Díaz-I.Díaz |13| se consideran ecuaciones de la forma

$$u_t + \beta(-\Delta u) = f \quad \text{en} \quad \Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \quad N \geq 1$$

obteniéndose un resultado similar al del Teorema 2 mediante la misma hipótesis (5) sobre β.

Después de este cúmulo de ejemplos, (la mayor parte de ellos considerados sólo muy recientemente en la literatura), se hace necesario el encontrar resultados abstractos que permitan asegurar el cumplimiento de la propiedad (P.F.). Sin embargo, una respuesta general parece difícil de encontrar desde el momento en que los operadores abstractos, involucrados en los ejemplos, poseen un comportamiento muy desigual para cuestiones esenciales como son por ejemplo la existencia y unicidad de soluciones para el problema de Cauchy abstracto.

Sin embargo hay otros tipos de problemas más concretos y de interés en las aplicaciones que aún no tienen respuesta conocida. Así por ejemplo interesaría conocer si el cumplimiento de (P.F.) se mantiene ante datos "no acotados" tales como funciones de L^1 o bien distribuciones como la δ de Dirac.

Finalmente el dilema sobre la concordancia con los resultados experimentales de los modelos lineal y no lineal de la conducción de calor, podría ser transplantado a otros problemas físicos, químicos, etc, poniendo en tela de juicio el tipo de modelo matemático que "mejor refleja la realidad".

§3. REFERENCIAS.

|1| R. Adams: "Sobolev Spaces". Academic Press. 1975.

|2| Ph. Benilan: "Ecuations d'evolution dans un espace de Banach quelconque et applications". These Univ. Paris XI, Orsay. 1972.

|3| Ph. Benilan: "Existence de solutions fortes pour l'equation des milieux poreux". C.R. Acad. Sc. Paris 285 (1977). rr. 1029-1031.

|4| H. Brezis: "Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial diff. Equations". Contributions to Nonlinear Functional Analysis. E. Zarantonello, Ac. Press. (1971).

|5| H. Brezis: "Problemes Unilateraux". J. Math. Pures et Appl. 51 (1972), p. 1-168.

|6| H. Brezis: "Operateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert". Lectures Notes. North-Holland 1973.

|7| H. Brezis - A. Friedman: "Estimates of the support of solutions of Parabolic Variational Inequalities". Illinois J. Math. 20 (1976). p. 82-97.

|8| M.G. Crandall: "An introduction to evolution governed by accretive operators". Dynamical Systems. Vol. 1. An International Symposium. Academic Press. N.Y. 1976. p. 131-165.

|9| A. Damlamian: "Some results on the multi-phase Stefan problem". Comm. In Partial Differential Equations 2 (10). 1977, pp. 1017-1044.

|10| J.I. Díaz Díaz: "Solutions with compact support for some degenerate parabolic problems". (Aparecerá en J. of Non Linear Analysis).

|11| J.I. Díaz Díaz: "Solutions a support compact pour certaines problemes non lineaires". (Conferencia en el Seminario Haraux-Berenstiky Univ. de Paris VI, Junio 1978). Publicaciones del Depto. de Ec. Funcionales, Univ. Complutense de Madrid.

|12| J.I. Díaz Díaz - M.A. Herrero García: "Propietes de support compact pour certaines equations elliptiques et paraboliques non lineai res". C. R. Acad. Sc. Paris t. 286 (Serie A). 1978. pp. 815-817.

|13| G. Díaz Díaz - J.I. Díaz Díaz: "Velocidad finita de propagación para ciertos problemas no lineales sobre L^{∞}". (Aparecerá).

|14| L.C. Evans - B.F. Knerr: "Instantaneous shrinking of the support of nonnegative solutions to certain Nonlinear Parabolic Equations and Variational Inequalities". (Aparecerá).

|15| A. Friedman - D. Kinderlehrer: "A one-phase Stefan problem". Ind. Univ. Math. J. 24 (1975) pp. 1005-1035.

|16| B.H. Gilding: "A nonlinear degenerate parabolic equations". Anali. Scuola Normale Sup di Pisa. 4 (1977). pp. 393-432.

|17| A.S. Kalashnikov: "Formation of singularities in solutions of the equation of nonstationary filtration". Zh. Vycisl. Mat. i Mat. Fiz 7 (1967). pp. 440-444.

|18| A.S. Kalashnikov: "On equations fo the nonstationary-filtration type in which the perturbation is propagated at infinite velocity". Vestn. Mosk. Uni. Math. 6 (1972), p. 45-49.

|19| A.S. Kalashnikov: "The propagation of disturbances in problems of nonlinear heat condution with absorption". Zh. Vychis. Math i Mat. Fiz. 14 (1974). pp. 891-905.

|20| R. Kershner: "On some properties of generalized solutions of Quasilinear Parabolic Degenerate Equations". Tesis en la Univ. de Moscú. 1976.

|21| B.F. Knerr: "The porous medium equation in one dimension". Trans. of the Amer. Math. Soc. 234 (2) (1977). pp. 381-415.

|22| B.F. Knerr: "The behavior of the support of solutions of the equation of nonlinear heat conduction with absrotion in one dimension". (Aparecerá).

|23| S.N. Kruskov: "First order quasilinear equations in several independent variable", Math. USSR. Sbornik. Vol. 10 (1970). pp. 217-243.

|24| J.L. Lions: "Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites nonlinéaires". Dunod, Paris. 1969.

|25| J.L. Lions: "Quelques problemes de la theorie des equations non linéaires d'evolution". Problems in Non-Linear Analysis. Edit. Proc. C.I. M.E. 1971.

|26| O.A. Oleinik: "On some degenerate quasilinear parabolic equations". Seminari 1962/63. Anal. Alg. Geom. et Topol. Vol. 1. Instit. Naz. Alta Mat. Ediz. Cremonese. Rome (1965). pp. 335-371.

|27| O.A. Oleinik - A.S. Kalasnikov - C. Yui Lin: "The Cauchy problems and boundary-value problems for equations of the nonstationary filtration types". Izv. Akad. Nauk, 22 (1958). pp. 667-704.

|28| L.A. Peletier: "A necessary and sufficient condition for the existence of an interface in flows through porous media". Arch. Rational Mech. Anal. 56 (1974). pp. 183-190.