

LOCALIZACIÓN DE FRONTERAS LIBRES EN INECUACIONES
VARIACIONALES ESTACIONARIAS DADAS POR OBSTÁCULOS.

Por:

J. Ildefonso DIAZ

Universidad de Santander y

Universidad Complutense de Madrid.

Abstract. In this work some free boundary problems, arising in the theory of Variational Inequalities given by obstacles, are considered. In particular, here are obtained some estimates on the Dirichlet boundary $\Gamma_D = \{x \in \partial\Omega: u(x) = \emptyset\}$ associated to the Signorini type problem: $-\Delta u + \alpha \cdot u = f$ in Ω , $-\frac{\partial u}{\partial n} \in \gamma(u-\emptyset)$ on $\partial\Omega$. In contrast with the case others Variational Inequalities, no references were known about the estimation of the localization of Γ_D .

§1. Introducción: Inecuaciones Variacionales y fronteras libres.

Sea V un espacio de Banach reflexivo sobre \mathbb{R} y K un cerrado y convexo de V . Es bien conocido (Cf. Lions-Stampacchia [10]) que dada $a(u,v)$ forma bilineal continua y coerciva se tiene que para todo $f \in V'$ existe $u \in K$ tal que

$$(1.1) \quad a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in K.$$

La expresión (1.1) puede también escribirse en la forma

$$(1.2) \quad \langle Au, v-u \rangle \geq \langle f, v-u \rangle$$

si A es el operador de V en V' dado por

$$(1.3) \quad \langle Au, v \rangle = a(u, v) \quad \forall u, v \in V.$$

Los anteriores problemas son conocidos como Inecuaciones Variacionales y han atraído la atención de un gran número de especialistas en los últimos quince años. Desde los resultados pioneros de Stampacchia, Lions y Browder a mediados de los sesenta, muchos han sido los temas investigados en el seno de esta teoría. Así los primeros esfuerzos se centraron en la obtención de una teoría general de la existencia (válida incluso para operadores A no lineales etc; fué la época de la proliferación de diversos tipos de operadores: monótonos, del cálculo de Variaciones, semimonótonos, de tipo (M), pseudomonótonos etc. (Vease p.e. Lions [9]). Una segunda época arranca con el trabajo fundamental de H. Brezis [1] (vease, también [7], [8] y sus extensas bibliografías) estudiándose la regularidad, dependencia continua así como otras muchas propiedades de los llamados Problemas Unilaterales y que en general corresponden al caso de Inecuaciones Variaciones en las que el convexo K viene definido mediante algun "obstáculo". Sin querer entrar en una sistematización (aquí innecesaria) podemos ilustrar tal tipo de problemas mediante tres sencillos ejemplos. Todos ellos corresponden al caso en el que $H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$, siendo Ω un abierto acotado de frontera regular en \mathbb{R}^N . Así mismo su pondremos

$$(1.4) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] + \alpha \int_{\Omega} uv$$

forma bilineal sobre $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ asociado al operador diferencial

$$(1.5) \quad L = -\Delta u + \alpha \cdot u$$

Ejemplo 1.- Sea $V = H_0^1(\Omega)$ ($\Rightarrow V' = H^{-1}(\Omega)$). Sea K_1 el convexo y cerrado de $H_0^1(\Omega)$ dado por

$$(1.6) \quad K_1 = \{u \in H_0^1(\Omega) : u \geq \psi \text{ en } H^1(\Omega)\}$$

supuesto $\psi \leq 0$ en $\partial\Omega$ (p.e. $\psi \in H^1(\Omega)$). Es el caso de restricciones (u obstáculos) en el interior. Tal tipo de problemas aparece p.e. en la teoría de flujos subsónicos a través de perfiles ([8]). La Inecuación Variacional correspondiente puede ser formulada (bajo hipótesis de restricción

$$(1.7) \quad \begin{cases} -\Delta u + \alpha \cdot u + \beta(u-\psi) \ni f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

siendo β el grafo de \mathbb{R}^2 dado por

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \beta(s) &= \emptyset \quad (\text{conjunto vacío}) \quad \text{si } s < 0, \\ \beta(0) &= (-\infty, 0] \quad , \quad \beta(s) = \{0\} \quad \text{si } s > 0. \end{aligned}$$

La solución de (0.8) origina una frontera libre (e.d. desconocida "a priori") separando los conjuntos

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \{x \in \Omega : u(x) = \psi(x)\} && (\text{conjunto de coincidencia}) \\ \Omega_1 &= \{x \in \Omega : u(x) > \psi(x)\} && (\text{conjunto de continuación}) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.- Sea $V = H^1(\Omega)$ y \emptyset función regular definida en $\partial\Omega$ (p.e. $\emptyset \in H^{1/2}(\partial\Omega)$). Se considera el convexo cerrado

$$(1.9) \quad K_2 = \{u \in H^1(\Omega) : u \geq \emptyset \quad \text{en } \partial\Omega\}.$$

Tal tipo de problemas aparecen en elasticidad (Problema de Signorini) (Vease [7]). De nuevo con una cierta regularidad es fácil mostrar que la solución de la Inecuación Variacional correspondiente (caso de obstáculos en la frontera) satisface

$$u \geq \emptyset \quad , \quad -\frac{\partial u}{\partial n} \geq 0 \quad , \quad (u-\emptyset) \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

y entonces

$$(1.10) \quad \begin{cases} -\Delta u + \alpha \cdot u = f & \text{en } \Omega \\ -\frac{\partial u}{\partial n} \in \gamma(u-\emptyset) & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

con γ grafo de \mathbb{R}^2 satisfaciendo (1.8). Ahora $\partial\Omega$ coincide con la partición $\Gamma_D \cup \Gamma_N$ (desconocida a priori) siendo

$$\Gamma_D = \{ x \in \partial\Omega : u = \emptyset \} \quad (\text{frontera de Dirichlet})$$

$$\Gamma_N = \{ x \in \partial\Omega : -\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \} \quad (\text{frontera de Neuman}).$$

Ejemplo 3.- Sea de nuevo $V = H^1(\Omega)$. Considerémos

$$K_3 = \{ u \in H^1(\Omega) : u \geq \psi \text{ en } \Omega, u \geq \emptyset \text{ en } \partial\Omega \}$$

siendo ψ y \emptyset funciones definidas en Ω y $\partial\Omega$ respectivamente. Se tienen pues obstáculos en el interior y en la frontera, lo que aparece p.e. en el estudio de flujos através de canales de toberas ([12]). Bajo cierta regularidad, la Inecuación correspondiente se formula equivalentemente como

$$(1.11) \quad \begin{cases} -\Delta u + \alpha \cdot u + \beta(u-\psi) \ni f & \text{en } \Omega \\ -\frac{\partial u}{\partial n} \in \gamma(u-\emptyset) & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

con β y γ grafos de \mathbb{R}^2 satisfaciendo (1.8). Una vez más aparecen fronteras libres separando Ω_0 de Ω_1 y Γ_D de $(\Gamma_N - \Gamma_D)$.

Tras este largo preámbulo, indicaremos que nuestra comunicación radica en la "localización" en $\overline{\Omega}$ de esas fronteras naturales que aparecen en los tres tipos anteriores de Inecuaciones Variacionales.

El desarrollo de esta problemática es bien diferente en cada uno de los casos anteriores. Así por ejemplo se pueden citar los trabajos de

- a) Brezis (1974), Benilan-Brezis-Crandall, Diaz, Diaz-Herrero, Bensoussan-Brezis-Friedman, Nagai, Yamada, G.Diaz. etc relativos a Inecuaciones similares a las del Ejemplo 1.

- b) Diaz(1976), Redheffer, Veron, Nagai, Yamada etc. referentes a Inecuaciones del tipo del Ejemplo 3.

Recientemente en Diaz [4] se ha sistematizado toda una técnica (denominada "de supersoluciones locales") que permite la obtención unificada de la práctica totalidad de los resultados de a) y b), mejorando a la vez las estimaciones conocidas hasta el momento sobre la localización de Ω_0 . (También en [4] puede encontrarse una extensa bibliografía incluyendo, entre otras, las referencias exactas de los trabajos de a) y b)).

Las numerosas referencias existentes para el caso de los Ejemplos 1 y 3 contrasta con la carencia absoluta de resultados sobre la estimación de Γ_D para Inecuaciones Variacionales tales como la del Ejemplo 2. (Obsérvese que todos los trabajos de b) se basan de una manera fundamental en la coexistencia de obstáculos en el interior y en la frontera).

En el apartado que sigue pretendemos mostrar como la técnica introducida en [4] puede ser adecuadamente adaptada para la obtención de estimaciones sobre la localización de Γ_D . La utilidad del conocimiento apriorístico de la localización de Γ_D es múltiple. Así por ejemplo es posible, ahora conocer una gran regularidad de la solución sobre adecuados subdominios de Ω , lográndose así superar el "tope de regularidad" expuesto en Brezis [2].

§ 2. Estimaciones sobre la localización de Γ_D .

Tal y como es acostumbrado, comenzaremos simplificando la formulación de (1.10) al suponer $\emptyset = 0$. Es bien conocido que esto no es ninguna restricción si se supone \emptyset regular (p.e. $\emptyset \in H^1(\partial\Omega)$). El problema-tipo considerado en esta sección es pues

$$(2.1) \quad \begin{cases} -\Delta u + \alpha \cdot u = f & \text{en } \Omega \\ -\frac{\partial u}{\partial n} \in \gamma(u) & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde γ representa al grafo satisfaciendo (1.8) (más tarde nos referiremos a una clase más general de grafos γ).

Antes de entrar en materia observémos que la región Γ_D dada ahora por $\Gamma_D = \{x \in \partial\Omega : u(x) = 0\}$ puede ser vacía si no se hace alguna hipótesis complementaria sobre los datos. (Tómese p.e. $f(x) = C$ y entonces $u(x) = C/\alpha$ con lo que $\Gamma_N = \partial\Omega$ y $\Gamma_D = \emptyset$).

Para una mayor comodidad en los enunciados introduzcamos la notación

$$S(f, \epsilon) = \{x \in \Omega : f(x) < -\epsilon\}$$

supuestos $f \in L^1(\Omega)$ y $\epsilon > 0$. Introduzcamos también el número real dado por

$$\Phi(x_0, \Gamma) = \inf \{ \cos(n(x), x - x_0) : x \in \Gamma \}$$

siendo $x_0 \in \partial\Omega$, $\Gamma \subset \partial\Omega$ (fijos) y $n(x)$ el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$ en el punto x . (Obsérvese que si p.e. Ω es convexo entonces $\Phi(x_0, \Gamma) \geq 0 \quad \forall \Gamma \subset \partial\Omega$ y $\forall x_0 \in \partial\Omega$).

Nuestro resultado principal puede enunciarse en los siguientes términos:

Teorema 1. Sea $x_0 \in \partial\Omega$ tal que existe $R_0 > 0$ y $\epsilon > 0$ tales que

$$(2.2) \quad [B(x_0, R_0) \cap \Omega] \subset S(f, \epsilon)$$

$$(2.3) \quad \Phi(x_0, \Gamma) \geq 0, \text{ siendo } \Gamma = \partial\Omega \cap \bar{B}(x_0, R_0)$$

Entonces si $u \in M$ sobre $S(f, \epsilon)$, con u solución de (2.1) se tiene que $u(x) = 0$ en $\partial\Omega \cap B(x_0, R_1)$, siendo

$$(2.4) \quad R_1 = R_0 - \left(\frac{2MN}{\epsilon}\right)^{1/2}.$$

Antes de pasar a la demostración indiquemos alguna manera sencilla de "digerir" el anterior enunciado. En primer lugar, el lector habrá observado que no se ha hecho alusión a la existencia de una solución de (2.1). La razón de esto estriba en el hecho de que, en primer lugar, el Teorema será obtenido "a priori" para toda posible solución $u \in H^1(\Omega)$. Por otra parte, dada $f \in L^2(\Omega)$ es bien conocida la existencia y unicidad de $u \in H^1(\Omega)$ solución de (2.1) así como resultados de regularidad del tipo $f \in L^2(\Omega) \Rightarrow u \in H^2(\Omega)$ (vease Brezis [1]). Respecto a la acotación $u \leq M$, esta puede ser conocida bien a través del principio del máximo ($f \in L^\infty(\Omega) \Rightarrow u \in L^\infty(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ y además $\|u\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_\infty$) o bien gracias a resultados de regularidad más finos ([1]) tales como $f \in L^p(\Omega)$, $2 \leq p \leq N \Rightarrow u \in W^{1,p^*}(\Omega)$ con $\|u\|_{W^{1,p^*}} \leq C \|f\|_{L^p}$ siendo $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ basta entonces utilizar los teoremas de inclusión de Sobolev para obtener (bajo adecuadas hipótesis) que $u \leq M$ con M función de $\|f\|_{L^p}$.

He aquí un sencillo Corolario que se desprende del Teorema 1 y de las anteriores observaciones

Corolario 1. Sea Ω un abierto acotado convexo de \mathbb{R}^N de frontera regular. Sea $f \in L^\infty(\Omega)$ y $u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ solución de (2.1). Entonces $u=0$ sobre $\{x \in \partial\Omega : d(x, \partial S(f, \epsilon) \cap \partial\Omega) \geq (\frac{2MN}{\epsilon})^{1/2}\}$, siendo $M = \frac{1}{\alpha} \|f\|_\infty$ y $\epsilon > 0$.

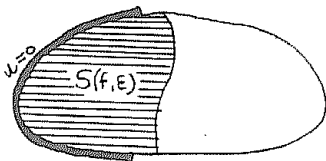


Figura 1

La figura ilustra la conclusión del Corolario 1 en un caso particular. La demostración del Teorema 1 utiliza el siguiente resultado de comparación:

Lema 1. (Diaz [3]). Sean f_1 y $f_2 \in L^2(\Omega)$ y γ_1 y γ_2 grafos de \mathbb{R}^2 y $u_1, u_2 \in H^2(\Omega)$ satisfaciendo para $i = 1, 2$,

$$\begin{cases} -\Delta u_i + \alpha \cdot u_i = f_i & \text{en } \Omega \\ -\frac{\partial u_i}{\partial n} \in \gamma_i(u_i) & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Supongamos además que $f_1 \leq f_2$ y que $\sup \gamma_2(r) \leq \inf \gamma_1(\tilde{r}) \quad \forall r \in D(\gamma_2)$ y $\tilde{r} \in D(\gamma_1)$ tales que $r \leq \tilde{r}$. Entonces $u_1 \leq u_2$ c.p.t. punto de Ω . Pasemos por fin a la

Demostración del Teorema 1.- Dado $x_0 \in \partial\Omega$ definamos la función auxiliar (supersolución local) mediante

$$(2.5) \quad \bar{u}(x) = \begin{cases} h(|x-x_0| - R_1) & \text{si } |x-x_0| > R_1 \\ 0 & \text{si } |x-x_0| \leq R_1. \end{cases}$$

siendo R_1 la cantidad dada en (2.4) y h dada por

$$(2.6) \quad h(r) = \frac{\epsilon}{2N} r^2 \quad \text{si } r \geq 0.$$

Llamemos $D = B(x_0, R_0) \cap \Omega$. Un simple cálculo permite observar que

$$-\Delta \bar{u} + \alpha \cdot \bar{u} \geq -\epsilon \geq f \quad \text{en } D$$

gracias a la hipótesis (2.2). Por otra parte, escribiendo $\partial D = \partial_1 D \cup \partial_2 D$ con $\partial_1 D = \partial D - \partial\Omega$ y $\partial_2 D = \partial D \cap \partial\Omega = \Gamma$ se tiene que

$$u \leq \bar{u} \quad \text{en } \partial_1 D$$

(Gracias a la elección de R_1 y a la hipótesis (2.2)) así como

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}(x) = h'(|x-x_0| - R) \cdot \cos(n(x), x-x_0) \geq h'(|x-x_0| - R) \cdot \psi(x_0, \Gamma) \geq 0 \quad \text{en } \partial_2 D.$$

El Lema 1 permite asegurar entonces que $u(x) \leq \bar{u}(x)$ c.p.t. $x \in D$, y por tanto sobre $\partial\Omega \cap B(x_0, R_1)$ se tiene que $0 \leq u(x) \leq \bar{u}(x)$ lo que concluye la demostración.

§ 3. Extensiones del Teorema 1.

3.1. Un análisis cuidadoso de la demostración del Teorema 1 permite observar que la misma prueba es válida para el siguiente resultado:

Proposición 1. Sea γ grafo maximal monotono de \mathbb{R}^2 con $0 \in \gamma(0)$. supongamos las hipótesis del Teorema 1 y sea $u \in H^2(\Omega)$ solución del problema (ahora genérico) (2.1). Entonces

$$(3.1) \quad (u|_{\partial\Omega})^+ \text{ es nula al menos en } \partial\Omega \cap B(x_0, R_1) \text{ con } R_1 \text{ dado por (2.4).}$$

Obsérvese que en realidad el Teorema 1 no es más que la conjunción de la proposición 1 con el hecho de que el grafo γ satisfaciendo (1.8) es tal que $D(\gamma) \subseteq [0, +\infty)$ con lo cual $(u|_{\partial\Omega})^+ = u|_{\partial\Omega}$. En contraste con lo que sucede en los Ejemplos 1 y 3 no es la multivocidad de los grafos en el origen la que conduce a que aparezcan fronteras libres si no la acotación de su dominio de definición.

3.2. Mediante la sola substitución de la función h introducida en (2.5) es posible extender el Teorema 1 al caso de otras ecuaciones elípticas más generales. Así por ejemplo, la conclusión del Teorema 1 permanece válida (módulo la definición de Φ y R_1) para el caso del problema

$$(3.1) \quad \begin{cases} Lu + \alpha \cdot u = f & \text{en } \Omega \\ -\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \gamma(u) + g & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

siendo γ grafo maximal monotono de \mathbb{R}^2 con $D(\gamma) \subseteq [0, \infty)$, $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ y

$$Lu = - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j})$$

siendo $a_{ij} \in C^2(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$, $\sum a_{ij} \xi_i \xi_j \geq a|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$ y $\forall x \in \Omega$ con $a > 0$. (Basta tomar en dicho caso h dado por

$$h(r) = \frac{\epsilon}{6 \sum_{i,j} \|a_{ij}\|_{\infty}} \cdot r^2$$

los cálculos se apoyan ahora en un resultado de G.Diaz [6]).

También es posible abordar el caso de operadores diferenciales no lineales, e.d. problemas del tipo

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \alpha \cdot u = f & \text{en } \Omega \\ -\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} + g \in \gamma(u) & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

siendo

$$\Delta_p u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \quad 1 < p < \infty.$$

(Tómese

$$h(r) = c r^{p/p-1} \quad \text{con} \quad c = \frac{p-1}{p} \left(\frac{\epsilon}{N} \right)^{\frac{1}{p-1}},$$

los cálculos necesarios se apoyan en este caso en Diaz-Herrero [5]).

Obviamente habría que modificar las definiciones de ϕ y R_1 .

3.3. La estimación (2.4) puede ser afinada aun más escogiendo en la demostración del Teorema 1 la función h dada como solución del problema inicial

$$\begin{cases} h''(t) + \frac{N-1}{t} h'(t) - \alpha \cdot h(t) = \epsilon & \text{en } (0, \infty) \\ h(0) = h'(0) = 0. \end{cases}$$

Tal función h puede ser expresada en términos de funciones de Bessel y gracias a un lema técnico debido a Nagai [11] se tiene que $u = 0$ en $\partial\Omega \cap B(x_0, R_{\epsilon})$ con

$$R_\alpha > R_0 - \left(\frac{2MN}{\epsilon}\right)^{1/2}$$

Además se tiene que $R_\alpha \uparrow R_0 - \left(\frac{2MN}{\epsilon}\right)^{1/2}$ si $\alpha \downarrow 0$ y $R_\alpha \uparrow R_0$ si $\alpha \uparrow +\infty$.

3.4. Los argumentos aquí empleados pueden ser fácilmente adaptados al caso de problemas de evolución del tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t + Lu + \alpha \cdot u = f(t,x) \quad t > 0, \quad x \in \Omega \\ -\frac{\partial u}{\partial n}(t,x) + g(t,x) \in \gamma(u(t,x)) \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) \quad x \in \Omega \end{array} \right.$$

con L dado como en 3.2.

3.5. Supuesto Ω abierto no acotado, una sencilla aplicación del Teorema 1 muestra que si $D(\gamma) \subset [0, \infty)$ y p.e. $S(f, \epsilon) = \Omega$ entonces si g tiene soporte compacto en $\partial\Omega \Rightarrow u|_{\partial\Omega}$ tiene soporte compacto.

3.9. El Teorema 1, sus corolarios y extensiones se apoyan de manera fundamental en que para algún $\epsilon > 0$ se supone que el conjunto $S(f, \epsilon)$ es no vacío. Obsérvese que tal situación no sucede cuando es $f \equiv 0$. La consideración de problemas como el (3.1) con $f \equiv 0$ es de una naturaleza bastante más compleja y será incluido en un próximo trabajo del autor.

REFERENCIAS.

- [1] H.BREZIS "Problemes Unilateraux". J.Math. Pures et Appl. 51, (1972), pp. 1-168.
- [2] H.BREZIS "Seuil de regularité pour certains problemes unilateraux". C.R.Acad.Sc.Paris t. 273 . (1971), pp 35-37.
- [3] J.I.DIAZ. "Soluciones con soporte compacto para ciertos problemas semilineales". Colletanea Mathematica. 30,2°(1979) pp.3-41.
- [4] J.I.DIAZ. Técnica de supersoluciones locales para problemas estacionarios no lineales. Aplicación al estudio de flujos subsónicos. Aparecerá como Memoria de la Real Academia de Ciencias de Madrid.
- [5] J.DIAZ y M.A. HERRERO "Propriétés de support compact pour certaines equations elliptiques et paraboliques non lineaires" C.R. Acad. Sc. Paris, 286 (1978) pp. 815-817.
- [6] G.DIAZ . Tesis en la Universidad Complutense de Madrid (1980)
- [7] G.DUVAUT y J.L.LIONS Les Inequations en Mecanique et en Physique. Dunod (1972).
- [8] D.KINDERLEEHRER y G.STAMPACCHIA An introductions to Variational Inequalities and their applications. Academic Press. (1980).
- [9] J.L.LIONS Quelques methodes de resolution des problemes aux limites nonlineaires. Dunod (1969)
- [10] J.L.LIONS y G.STAMPACCHIA. "Variational inequalities". Comm. Pure App. Math. 20 (1967) pp 493-519
- [11] T.NAGAI "Estimates for the coincidence sets of solutions of elliptic variational inequalities". Hiroshima Math. J. 9 (1979) pp. 335-346.
- [12] E.SIMBORSKY "Variational methods applied to the study of symmetric flows in laval nozzles" Comm. in Partial Diff. Eq. 4, 1 (1979) pp. 41-77.