Comunicación presentada

al

IV C.E.D.Y.A.

Sevilla, Octubre, 1981

SOBRE EL PROBLEMA DE FLUJOS SUBSONICOS A TRAVES DE PERFILES SIMETRICOS.

Por

J.Ildefonso Diaz
Universidad de Santander

y

A.Dou
U. Complutense de Madrid

Resumen. En esta comunicación se considera el problema de un jo plano, subsónico, estacionario e irrotacional, dado por un fluído fecto y compresible. El obstáculo o perfil se supone simétrico y con_ o, y la velocidad del fluído en el infinito es supuesta uniforme y pa_ ela al eje de simetría del obstáculo.

En el trabajo se sigue la formulación presentada ya en Brézis-ımpacchia |1| y Brézis |2| . Nuestra principal contribución generaliza caso de fluidos compresibles un resultado de comparación de los mencio_ los autores en 3 y contribuye, mediante la aplicación de una técnica :roducida por J.I.Diaz en |4| , a estimar la geometría de la curva $= \ell(\theta)$ que determina la frontera (desconocida "a priori") del domi_) del flujo en el plano del hodógrafo.

Un desarrollo más exhaustivo, conteniendo también las demostra_ ɔnes de los resultados aquí presentados será el objeto del trabajo Diaz-u |6| .

§ 1. Plateamiento del problema.

El flujo se supone plano, estacionario e irrotacional. El fluído supone perfecto y compresible, y en ninguno de sus puntos alcanza la ve_ cidad local del sonido. El obstáculo se supone simétrico y convexo.

El plano del flujo está referido a un sistema cartesiano $\{0;x,y\}$, representamos por $\vec{q}(x,y)$ la velocidad del fluído en cualquier punto :l plano exterior al obstáculo. Ponemos $\vec{q} = (q_1,q_2)$, siendo q_1 y q_2

las componentes según los ejes, y $q = |\vec{q}|$. Se da una constante positiva q_∞ que representa la velocidad del fluído, paralela al eje x, para $x = -\infty$ o sea $\vec{q}(-\infty,y) = (q_\infty,0)$ para todo $-\infty < y < \infty$.

Introducimos la función h que determina la densidad en función de la velocidad, $\rho = h(q)$, siendo

$$(1.1) \qquad h : q \in [0,\infty) \to h(q) \in (0,1] .$$

Suponemos que h es regular , $h(0) = 1$, y que h es estrictaménte decreciente.

Supondremos que el obstáculo viene determinado mediante la siguiente función f: sean a,b tales que $a < 0 < b$,

$$(1.2) \qquad f : x \in [a,b] \to f(x) \in [0,H], \quad f(a) = f(b) = 0 ,$$

$$f(0) = H = \max_{x\in[a,b]} f(x), \quad f \in C^{2,1}[a,b] , \ f'' < 0,$$

de modo que suponemos que la derivada segunda de f es lipchiciana y f es cóncava. Poniendo

$$(1.3) \qquad \Lambda = \{(x,y) : x \in (a,b), |y| < f(x)\} , \quad G = \mathbb{R}^2 - \bar{\Lambda} ,$$

tenemos que Λ representa un obstáculo simétrico y convexo y G es el dominio ocupado por el fluído. Sea finalmente $\vec{\nu}$ la normal a $\partial\Lambda$ exterior a Λ , excepto quizás en los puntos $A = (a,0)$ y $B = (b,0)$, donde puede que no exista.

El problema Π que estudiamos es el siguiente: Hallar una función $\vec{q} : \bar{G} \to \mathbb{R}^2$, tal que

$$(1.4) \qquad \vec{q} \in C^1(G) \cap C(\bar{G}).$$

(1.5) $$\operatorname{div}(\rho\vec{q}) \equiv \frac{\partial}{\partial x}(\rho q_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho q_2) = 0 \quad \text{en} \quad G$$

(1.6) $$\operatorname{rot} \vec{q} = \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad G$$

(1.7) $$\langle \vec{q} \, , \vec{\nu} \rangle = 0 \quad \text{en} \quad \partial G$$

(1.8) $$\lim_{(x,y)\to\infty} \vec{q}(x,y) = (q_\infty, 0).$$

Se sigue por simetría que

(1.9) $$q_1(x,y) = q_1(x,-y) \; , \; q_2(x,y) = -q_2(x,-y).$$

La propiedad (1.9) permite reducir el dominio G al $G^+ = \{(x,y): y > 0 \;\; , \;\; y > f\}$. La (1.6), que expresa que el flujo es irrotacional, permite introducir la función de líneas de corriente, $\psi : \bar{G}^+ \to \mathbb{R}^2$, tal que

(1.10) $$\begin{aligned} &\psi_x = -\rho q_2, \quad \psi_y = \rho q_1 \quad \text{en } \bar{G}^+ , \\ &\psi(x,y) = 0 \quad \text{en } \partial G^+ . \end{aligned}$$

Señalemos que una questión de particular interés a la hora de abordar el problema Π es (supuesta la existencia y unicidad de solución) la obtención de estimaciones numéricas sobre los valores de q en $\partial\Lambda$ así como sobre la localización del punto de $\partial\Lambda$ en que q es máximo.

Originalmente se toma la función ψ como nueva incógnita, y como variables independientes las coordenadas cartesianas (x,y) del plano físico o las coordenadas cartesianas (θ,q) del plano del hodógrafo, siendo $\operatorname{tg} \theta = q_2/q_1$. Siguiendo a Brézis y Stampacchia en |1| y |2| formularemos el problema en términos de una nueva incógnita

ι^{y} dependiendo de las coordenadas cartesianas (θ,σ) , siendo

(1.11) $$\sigma = \int_{q}^{q_c} h(\tau)\, \frac{d\tau}{\tau} \quad ,$$

(1.12) $$u(\theta,\sigma) = \int_{\ell(\sigma)}^{\sigma} \frac{k(s)}{q(s)}\, \psi(\theta,s)\, ds \ , \quad \theta_1 < \theta < \theta_0 \quad ,\sigma > \ell(\theta)$$

donde q_c coincide con la velocidad local del sonido, es decir

$$q_c = a(q_c) \quad , \quad a^2(q) = \frac{-q \cdot h(q)}{h'(q)} \quad ,$$

θ_0 y θ_1 son los valores de θ en los puntos A y B ,

$$k(s) = \frac{1}{h^2(q(s))} \left\{ 1 - \frac{q^2(s)}{a^2(q(s))} \right\}$$

En (1.12) $\sigma = \ell(\theta)$ es la ecuación en el plano $\{0;\theta,\sigma\}$ de la curva Γ , transformada del perfil $\partial\Lambda^+$ del obstáculo. El dominio G^+ del plano físico se transforma en el siguiente conjunto

(1.13) $D = \{(\theta,\sigma):\theta \in (\theta_1,0) \cup (0,\theta_0),\sigma > \ell(\theta)\} \cup \{(\theta,\sigma):\theta = 0 \ , \ \ell(\theta)<\sigma<\sigma$

donde

$$\sigma_\infty = \int_{q_\infty}^{q_c} h(\tau)\, \frac{d\tau}{\tau}$$

Los autores citados prolongan u al dominio $\Omega = (\theta_1,\theta_0) \times (0;$ poniendo

$$u(\theta,\sigma) = 0 \quad \text{para} \quad 0 < \sigma \leqslant \ell(\theta) \ ;$$

demuestran que el problema Π es equivalente al problema Π^* siguiente:

"Hallar u, $u \in K \subset V$, (K cerrado convexo del espacio de Hilbert V) tal que satisfaga la inecuación variacional

(1.14) $$a(u,v-u) \geq F(v-u) \quad , \quad v \in K,$$

siendo:

(1.15) $$V = \{v(\theta,\sigma) : q\,v \in L^2(\Omega) \ , \ q\,v_\theta \in L^2(\Omega), \ \frac{q}{\sqrt{k}}\, v_\sigma \in L^2(\Omega), \ v = 0 \ \text{ en } \ \partial\Omega\}$$

dotado con la norma canónica,

(1.16) $$K = \{v \in V : v \geq 0 \ \text{ en } \ \Omega \ , \ v(0,\sigma) = H \ \text{ para } \ \sigma \geq \sigma_\infty\} \ ,$$

(1.17) $$a(u,v) = \int_\Omega \left(\frac{1}{k(\sigma)}\, u_\sigma\, v_\sigma + u_\theta\, v_\theta - u\, v \right) q^2(\sigma)\, d\theta\, d\sigma$$

(1.18) $$F(v) = \int_\Omega R(\theta) \cdot v \cdot q^2(\sigma)\, d\theta\, d\sigma \quad ,$$

donde $R(\theta)$ es el radio de curvatura en el punto de $\partial\Lambda^+$ con coordenadas las hodógrafas (θ,q).

La forma $a(u,v)$ es coerciva y por tanto este problema tiene solución única por los resultados bien conocidos de la teoría de Inecuaciones Variacionales; así es demostrado en |1| y |2| la existencia de una solución única del problema Π planteado inicialmente.

2. Teorema de comparación.

Siguiendo a Brézis-Stampacchia |3| introducimos, en orden al estudio cualitativo del problema Π, el dominio $\Omega_T = (\theta_1,\theta_\ell) \times (0,T)$.

El teorema de comparación que mostrarémos consiste en hallar las soluciones del problema Π^* adaptado a Ω_T , u_N y u_D , que acoten inferior y superiormente la restricción de u a Ω_T.

Anteponemos el siguiente lema:

Lema 1. *Cuando* $\sigma \uparrow +\infty$ *se tiene que* $u(\theta,\sigma) \uparrow w(\theta)$, *siendo* $w(\theta)$ *tal que*

$$(2.1a) \qquad w''(\theta) + w(\theta) = -R(\theta) \ en \quad (\theta_1,0) \cup (0,\theta_0)$$

$$(2.1b) \qquad w(\theta_1) = w(\theta_0) = 0 \quad , \quad w(0) = H$$

Este resultado fué mostrado ya en |3| para fluidos incompresibles; lo cual demuestra que, por lo que se refiere al significado de este lema, ambos fluidos, compresibles e incompresibles, se comportan igual en un entorno de los puntos A o B.

Definimos ahora u_N como la solución en K_T^1 , $u_N \in K_T^1 \subset V_T$, siendo

$$(2.2) \quad V_T = \{v(\theta,\sigma) : q \cdot v \in L^2(\Omega_T), q \cdot v_\theta \in L^2(\Omega_T), \frac{q}{\sqrt{k}} v_\sigma \in L^2(\Omega_T)\}$$

$$(2.3) \quad K_T^1 = \{v \in V_T : v \geq 0 \quad en \quad \Omega_T' , v(0,\sigma) = H \quad para \ldots$$

$$\ldots \sigma_\infty < \sigma < T , v = 0 \ en \ \{\theta_1,\theta_0\} \times (0,T) \cup (\theta_1,\theta_0) \times \{0\}\},$$

de la inecuación variacional

$$(2.4) \qquad a_T(u , v-u) \geq F_T(v-u) , \qquad v \in K_T^1 ,$$

donde a_T y F_T son las mismas que en (1.17) y (1.18) , excepto que las integrales se extienden ahora a Ω_T en lugar de Ω .

Análogamente definimos u_D como la solución en K_T^2 , $u_D \in K_T^2 \subset V_T$, iendo

2.5) $K_T^2 = \{v \in K_T^1 : v(\theta,T) = w(\theta) \quad \text{para} \quad \theta_1 < \theta < \theta_0\}$

e la inecuación variacional

2.6) $a_T(u, v - u) \geq F_T(v - u) \ , \quad v \in K_T^2$

Obsérvese que u_N supone una condición de contorno homogénea e tipo Neumann, $u_\sigma = 0$, en $(\theta_1,\theta_0) \times \{T\}$; mientras que u_D supone a condición de Dirichlet que aparece en (2.5).

Teorema 2. *Se tiene*

2.7) $u_N(\theta,\sigma) \leq u(\theta,\sigma) \leq u_D(\theta,\sigma) \quad \textit{en} \quad \Omega_T$

El anterior teorema es una generalización de un resultado de |3| para fluídos incompresibles. Es de señalar que u_N es definida quí de manera diferente a como es introducida en |3| .

3. La geometría de Γ : $\sigma = \ell(\theta)$

La estimación de la frontera libre Γ es importante, tanto ara comprobar o asegurarse de que el flujo es subsónico como para acotar a velocidad del flujo en el perfil $\partial\Lambda$. El objeto de esta sección es frecer diversas estimaciones sobre la localización en Ω de esta frontera libre Γ que es pues desconocida "a priori".

Empezamos por un resultado que puede ayudar al análisis de Γ.

Teorema 3. *Si* $\sigma = \ell(\theta)$ *es la ecuación de* Γ *en el plano* $\{0;\theta,\sigma\}$ *, entonces*

$$\frac{d\ell}{d\theta} = - R \cdot \cos\theta \cdot h(q) \cdot \frac{d(\log q)}{dx} , \quad \theta_1 < \theta < \theta_0,$$

donde las θ, q , x , R *corresponden al mismo punto de* $\partial\Lambda^+$

En la aproximación de Γ es particularmente interesante obten una cota inferior de la curva, pues por medio de la información hodograf equivale inmediatamente a explicitar una cota superior de q en $\partial\Lambda^+$.

Brêzis en |2| obtiene un primer resultado de este tipo, que transcribimos a continuación. Sea $u = u(\theta,\sigma)$ la solución del problema Π^*, sea $D' = \{(\theta,\sigma) \in \Omega , \ u(\theta,\sigma) > 0$ (es decir D' es el interior de Γ $\}$, sea

$$(3.1) \qquad R_0 = \min_{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_0} |R(\theta)| \quad , \quad R_0 > 0$$

y sean A y $q(A)$ relacionados por

$$(3.2) \qquad A = \int_{q(A)}^{q_c} \frac{h(s)}{s} \, ds \quad \text{para} \quad q_\infty < q(A) < q_c .$$

Teorema 4. (Brêzis,|2|). *Sea* $q(A)$, $q_\infty < q(A) < q_c$, *la solución de la ecuación en* q.

$$(3.3) \qquad \frac{H}{R_0} - 1 = \frac{q}{q_\infty} \left| - 1 + \frac{1}{h(q_\infty)} \int_q^q \frac{h(s)}{s} \, ds \right. .$$

Entonces

$$D' \subset \{(\theta,\sigma) \ : \sigma > A \},$$

sea

3.4) $$\max_{\partial\Lambda^+} q \leqslant q(A)$$

Para la demostración de este teorema el autor se basa en un eorema de comparación del tipo $0 \leqslant u(\theta,\sigma) \leqslant \Phi(\sigma)$ para todo $(\theta,\sigma) \in \Omega$, iendo Φ una función auxiliar escogida de manera que

3,5) $$\Phi \geqslant 0 \ , \quad \Phi(A) = \Phi_\sigma(A) = 0 \quad , \quad \Phi(\sigma_\infty) = H \ ,$$

3,6) $$L\,\Phi(\sigma) \equiv \frac{1}{q^2}\left(\frac{q^2}{k}\Phi_\sigma\right)_\sigma + \Phi = R_0 \ ;$$

aturalmente el operador L y el segundo miembro R_0 están relacionados on los dos miembros de la inecuación variacional (1,14). El autor calula explícitamente Φ y obtiene

3.7) $$\Phi(\sigma)=\begin{cases} R_0 \cdot q(A) \displaystyle\int_A^\sigma \frac{k(s)}{q(s)}(s-A)ds & , \ A \leqslant \sigma \\ 0 \quad , & 0 \leqslant \sigma \leqslant A, \end{cases}$$

Obsérvese que $q(\mathring{A})$ viene determinada por (3.3), la cual exresa que $\Phi(\sigma_\infty) = H$; de modo que si H/R_m disminuye, entonces disinuye también $q(A)$ y aumenta A.

La nueva estimación que aquí ofrecemos utilizará el hecho naural de que $q(A)$ depende de R_0. Para ello introducimos la siguiene notación: dado R positivo, sea $q(R)$, $q_\infty < q(R) < q_c$, la soluión de la ecuación en q (3.3), donde en lugar de R_0 ponemos R; sea $A(R)$ el valor positivo que da la relación (3.2) cuando en luar de $q(A)$ ponemos $q(R)$.

Consecuentemente definimos $\Phi(\sigma;R)$ mediante

$$(3.8)\qquad \Phi(\sigma;R) = \begin{cases} R\cdot q(R) \displaystyle\int_{A(R)}^{\sigma} \frac{k(s)}{q(s)}\,(s - A(R))ds \ , & A(R) \leq \sigma \\ 0 \ , & 0 \leq \sigma \leq A(R). \end{cases}$$

Adaptando la técnica de supersoluciones locales desarrollada por J.I.Diaz |4| se obtiene el siguiente resultado.

<u>Teorema</u> 5. *Sean* $\hat{\Omega} = \Omega_T$ *para* $T = \sigma_\infty$, $\bar{\hat{\Omega}} = \bar{\Omega}_1 \cup \ldots \cup \bar{\Omega}_n$, $\Omega_i = (\theta_i, \theta_{i+1}) \chi (0,\sigma_\infty)$, $\theta_{n+1} = \theta_0$,

$$(3.9)\qquad R_i = \min_{\theta_i \leq \theta \leq \theta_{i+1}} |R(\theta)| \ , \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

$$0 < \alpha < 1$$

$$s\ :\ \gamma \in [0,2] \to s = g(\gamma) \equiv \mathrm{Arcos}\,(1-\gamma) \in [0,\Pi] .$$

Entonces , la solución $u = u(\theta,\sigma)$ del problema Π^* se anu la en los conjuntos Σ_1 ,$\Sigma_{\alpha,1}$, $\Sigma_{\alpha,j}$,$j = 2,3,\ldots,n-1$, y $\Sigma_{\alpha,n}$ siendo

$$\Sigma_1 = \{(\theta^*, \sigma^*) \in \hat{\Omega}\ : \theta_1 \leq \theta^* \leq \theta_0\ ,\ 0 \leq \sigma \leq A(R_0)\}$$

$$\Sigma_{\alpha,1} = \{ (\theta^*, \sigma^*) \in \Omega_1 : \theta_1 \leq \theta^* \leq \theta_2 - s_1\ ,\ A(R_0) \leq \sigma^* \leq A(\alpha R_1)$$

$$\Sigma_{\alpha,j} = \{ (\theta^*, \sigma^*) \in \Omega_j : \theta_j + s_j \leq \theta^* \leq \theta_{j+1} - s_j,\ A(R_0) \leq \sigma^* \leq A(\alpha R_j$$

$$\Sigma_{\alpha,n} = \{ (\theta^*, \sigma^*) \in \Omega_n + \theta_n + s_n \leq \theta^* \leq \theta_{n+1}\ ,\ A(R_0) \leq \sigma^* \leq A(\alpha R_n)\}\ ,$$

donde

$$_j = g \left\{ \frac{1}{(1-\alpha)R_j} \max_{0\leq\sigma\leq\sigma_\infty} (\Phi(\sigma;R_0) - \Phi(\sigma;\alpha R_j)) \right\} , \quad j = 1,2,\dots,n$$

Obviamente el Teorema |5| ofrece estimaciones más finas que las el Teorema 4 siendo ahora posible apercibir en que medida la geometría el obstáculo (e.d. la dependencia de R respecto de θ) determina la rontera libre Γ .

Bibliografía

1| H.Brézis et G.Stampacchia, "Une nouvelle méthode pour l'étude d'écoulements stationnaires", C.R.Acad.Sc.Paris, t. 276 (8-1-73), A 129-132.

2| H.Brézis, "A New Method in the Study of Subsonic Flows", Partial Differential Equations and related Topics. Lecture Notes in Math. 446 Springer 1975 (J.Goldstein,ed.).

3| H.Brêzis and G.Stampacchia, " The Hodograph Method in Fluid-Dynamics in the Light of Variational Inequalities", Arch. for Rat. Mech. and An. 61(1976) 1-18.

4| J.F.Bourgat et G.Duvant, Calcul numérique de l'écoulement avec ou sans sillage autour d'un profil bidimensionel symétrique et sans incidence, IRIA, Rapport de Recherche n°145 (1975).

5| J.I.Diaz , "Técnica de supersoluciones locales para problemas estacionarios no lineales. Aplicación al estudio de flujos subsónicos". Memoria de la R.Acad. de Ciencias, Madrid, (Aparecerá).

6| J.I.Diaz y A.Dou : "Sobre el problema de obstáculos para flujos subsónicos compresibles". (Aparecerá en Collectanea Mathematica).