IV CENTENARIO
UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

VI C.E.D.Y.A.

CONGRESO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y APLICACIONES

JACA (HUESCA)

26-30 Septiembre 1983

ACTAS

1583 · 1983

COMPORTAMIENTO EN EL CONTORNO DE LA SOLUCION DEL PROBLEMA DE SIGNORINI

J.Ildefonso Díaz
Dfto. Ec. Funcionales
Facultad de Matemáticas
Univ. Complutense
MADRID.

Raúl F. Jiménez
Instituto de Matemática
Facultad de Ciencias
Univ. de Concepción
CONCEPCION (CHILE).

1. INTRODUCCION: En este artículo se estudia el comportamiento en la frontera del la solución del , ya clásico, problema de Signorini:

(P): Dados Ω abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ de frontera regular Γ, $\psi \in L^2(\Gamma)$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ y $K_\psi = \{v \in H^1(\Omega) : v \geq \psi$ a.e. en $\Gamma\}$, hallar $u \in K_\psi$ tal que

$$(1) \qquad \int_\Omega \nabla u \nabla (v-u)\,dx \geq \int_\Omega f(v-u)\,dx - \int_\Gamma g(v-u)\,d\sigma \quad \forall\, v \in K_\psi .$$

Del trabajo de J-L.Lions y G.Stampacchia (1967), la existencia y unicidad de solución está asegurada bajo la hipótesis

$$(2) \qquad \int_\Omega f(x)\,dx - \int_\Gamma g(x)\,d\sigma > 0.$$

Nuestro principal objetivo es extender los resultados de |2| y |6| al caso $g \neq 0$. Se examinan además otros problemas de contorno con términos no lineales en la frontera. Una versión detallada de este trabajo aparecerá en |7|.

2. UNA CONDICION NECESARIA. Sin restricción alguna se puede suponer $\psi=0$ y $f=0$. Sin embargo para "detectar" la manera en que f contribuye a la formación del conjunto de coincidencia $I=\{x \in \Gamma : u(x) = \psi(x)\}$, consideraremos $f \neq 0$. Por conveniencia supondremos

$$(3) \qquad f \in L^p(\Omega) \quad , \; p > N.$$

De esta manera

$$(4) \qquad \tilde{f}(\xi) = \int_\Omega f(x) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} G(x,\xi)\,dx \qquad , \xi \in \Gamma ,$$

donde $G(x,\xi)$ es la función de Green para el problema de Dirichlet , está bien definida y es continua en Γ .Además, por los resultados de Brezis |1| , $u \in H^2(\Omega)$ y por tanto (P) puede ser equivalentemente formulado en su "forma complementaria" :

(P*) : Hallar $u \in H^2(\Omega)$ tal que

$$(5) \qquad \begin{gathered} -\Delta u = f \quad \text{en } \Omega \\ u \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \geq -g, \quad \left(-\frac{\partial u}{\partial n} - g\right)u = 0 \quad \text{en } \Gamma. \end{gathered}$$

Mediante una fácil adaptación del Teorema 1 de |2| es posible obtener la siguiente condición necesaria para que $I = \{x \in \Gamma : u(x)=0\}$ sea de medida positiva.

TEOREMA 1 . <u>Supongamos que</u> $|I| \neq 0$.<u>Entonces</u>

$$(6) \qquad g(\xi) - \tilde{f}(\xi) \geq 0 \text{ a.e. } \xi \in I.$$

<u>Idea de la demostración:</u> $\forall\, v \in K$ la función $w=v-u$ satisface

$$-\int_\Omega u \Delta w\,dx + \int_\Gamma u \frac{\partial w}{\partial n}\,d\sigma \leq \int_\Omega f w\,dx - \int_\Gamma g w\,d\sigma .$$

En particular, tomando $w=w_0$, w_0 dada por

$$w_0(x) = \int_\Gamma \theta(x) \rho_\xi(x)\,d\sigma \quad , \; x \in \Omega ,$$

siendo $\rho_\xi = -\frac{\partial}{\partial n} G(x,\xi)$ y $\theta \in C^2(\Gamma)$ tal que $\theta \geq 0$ en I y $\theta=0$ en $\Gamma - I$, obtenemos que $\Delta w_0 = 0$, $w_0 \geq 0 \geq -u$ en I y $w_0 = 0$ en $\Gamma - I$. Luego,

$$0 \geq \int_\Omega f w_0\,dx - \int_\Gamma g w_0\,d\sigma = \int_I \theta(\xi) \left[\tilde{f}(\xi) - g(\xi)\right] d\xi$$

y como θ es arbitraria se obtiene la conclusión.#

NOTA 1. La condición necesaria (6) no es , en general suficiente, para poder asegurar que $\Gamma_0 \subset I$ si es que la desigualdad (6) tiene lugar en una parte Γ_0 de Γ .
Si $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, la función dada por

$$(7) \qquad u(x,y) = \operatorname{Re} z^{3/2} \quad , \; z = x+iy ,$$

(e.d. $u(x,y) = \rho^{3/2} \cos 3\theta/2$, si $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$) satisface (P) con $f=0, g=0$. Sin embargo $u=0$ en $x<0, y=0$ pero $u>0$ en $x>0$, $y=0$. Esto muestra que si $g - \tilde{f} = 0$ se puede producir una ambiguedad sobre la anulación o no de u sobre Γ.#

3. UNA CONDICION SUFICIENTE. Mostraremos que (6) es "casi suficiente". Necesitaremos la siguiente hipótesis técnica:

$$(8) \qquad \Omega \text{ es convexo}$$

Gracias a (8) se puede asegurar que Γ es una hipersuperficie de $\mathbb{R}^N$ de curvatura media $H \geq 0$ [1]

TEOREMA 2. Supongamos (2),(3),(8) así como f,g pertenecientes a $L^\infty(\Omega)\cap H^{1/2}(\Omega)$ satisfaciendo

(9) $\exists\ \varepsilon>0,\ x_0\in\Gamma,\ 0<R_0<\delta:\ g(\xi)-\tilde{f}(\xi)\geq\varepsilon$ a.e. $\xi\in\Gamma\cap B(x_0,R_0)$.

Entonces $u(\xi)=0$ a.e. $\xi\in\Gamma\cap B(x_0,R_1)$ siendo

(10) $$R_1 = R_0 - \left[\frac{2NM}{C}\right]^{1/2}$$

con $C=(N-1)\varepsilon H$ si $H>0$, $C=2\varepsilon/R_0$ si $H=0$; $M=\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ [2]

Idea de la demostración:

Etapa 1. Sin pérdida de generalidad, basta considerar (P*) para $f^*=0$ y $g^*=g-\tilde{f}$. En efecto, si $u_0\in W^{2,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ satisface $-\Delta u_0=f$ en Ω y $u_0=0$ en Γ, la función $u^*=u-u_0$ es solución de (P) correspondiente a los datos $f^*=0$ y $g^*=g+\partial u_0/\partial n$. Finalmente no es difícil probar que $\tilde{f}(\xi)=-\partial u_0/\partial n$ para todo $\xi\in\Gamma$.

Etapa 2. Sin pérdida de generalidad se puede suponer $g^*=g-\tilde{f}\equiv\varepsilon$ sobre $\Gamma\cap B(x_0,R_0)$. Basta observar que si u_ε es la solución de (P) correspondiente a $f=0$ y $g=g^*$ sobre $\Gamma-B(x_0,R_0)$ y $g=\varepsilon$ sobre $\Gamma\cap B(x_0,R_0)$ entonces por los resultados de comparación para Inecuaciones Variacuonales (vease,p.e. Brezis |1|), se tiene que $u^*\leq u_\varepsilon$ a.e. sobre $\bar{\Omega}$. En particular, $0\leq u^*(\xi)\leq u_\varepsilon(\xi)$ a.e. $\xi\in\Gamma$ y por tanto si $u_\varepsilon=0$ en $\Gamma\cap B(x_0,R_1)$ se tiene lo mismo para u^*.

Etapa 3 . Sea $D=\Omega\cap B(x_0,R_0)$ y $\partial D=\partial_1 D\cup\partial_2 D$ con $\partial_1 D=\partial D-\Gamma$ y $\partial_2 D=\partial D\cap\Gamma$. Entonces para todo $C\in(0,(N-1)H\varepsilon)$ si $H>0$ o bien $C\in(0,\frac{2\varepsilon}{R_0})$ si $H=0$, existe $U\in H^2(D)$, $U\geq 0$ tal que $-\Delta U=C$ en D, $U=0$ y $\frac{\partial U}{\partial n}=-\varepsilon$ en $\partial_2 D$. Para construir una tal función,consideremos un semientorno tubular V_δ de la hipersuperficie $\Gamma\cap B(x_0,R_0)$, definido por la representación usual

$$x = x(\xi,t) = \xi+tn(\xi) \qquad \forall\ \xi\in\Gamma\cap B(x_0,R_0)$$

(1) Vease definición y propiedades en R.Sperb |3| ,Cap.4
(2) Bajo las hipótesis del Teor.2 es bien conocido que $u\in L^\infty(\Omega)$ y que $\|u\|_\infty\leq k(\|f\|_p+\|g\|_\infty)$.

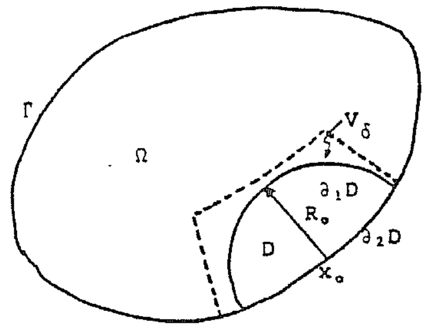

FIG.1

siendo $n(\xi)$ el vector normal unitario exterior a Γ en ξ y $t\in(-\delta,0)$ con $\delta>0$ tal que $V_\delta\supset D$, como indica la fig. 1. Definiendo $\forall\ x\in V_\delta$: $U(x)=U(nt)=\phi(t)$ y recordando la expresión del operador Δ sobre una variedad (vease |8| , pag.62) basta encontrar $\phi(t)$ solución del problema de Cauchy :

$$-\phi''(t)-(N-1)H\phi'(t)=C,\quad t\in(-\delta,0)$$
$$\phi(0)=0$$
$$\phi'(0)=-\varepsilon$$

Un fácil cálculo muestra que

$$\phi(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{(N-1)H}\left[\left(\varepsilon-\dfrac{C}{(N-1)H}\right)\left(e^{-(N-1)Ht}-1\right)-Ct\right] & ,\text{si } H>0\\ -t\left(Ct/2+\varepsilon\right) & ,\text{si } H=0\end{cases}$$

Etapa 4. Dado $C\in(0,(N-1)H\varepsilon)$ si $H>0$ ó $C\in(0,\frac{2\varepsilon}{R_0})$ si $H=0$, definimos la función auxiliar

$$\bar{u}(x)=\begin{cases}U(x)+\dfrac{C}{2N}(|x-x_0|-R_1)^2 & \text{si } |x-x_0|>R_1\ ,x\in\Omega\\ U(x) & \text{si } |x-x_0|\leq R_1\ ,x\in\Omega\end{cases}$$

donde R_1 es un número real $(0<R_1<R_0)$ a determinar.

Se tiene $\bar{u}\in C^1(D)$ y además

$$-\Delta\bar{u}=\begin{cases}-\Delta U-C=0 & \text{en } |x-x_0|>R_1\ ,\ x\in\Omega\\ -\Delta U>0 & \text{en } |x-x_0|\leq R_1\ ,\ x\in\Omega\ .\end{cases}$$

En $\partial_1 D$, $|x-x_0|=R_0$ y como $U(x)>0$ se tiene que $\bar{u}(x)\geq\frac{C}{2N}(R_0-R_1)^2\geq\|u^*\|_{L^\infty}\geq u^*|_{\partial_1 D}$,si R_1 es elegido de forma adecuada, es decir

(11) $$R_1\leq R_0-\left[\frac{2N\|u^*\|_\infty}{C}\right]^{1/2}\ .$$

En $\partial_2 D$ se tiene que

$$-\frac{\partial\bar{u}}{\partial n}(\xi)=\begin{cases}\varepsilon-\dfrac{C}{N}(|\xi-x_0|-R_1)\cos(n(\xi),\xi-x_0) & \text{si}|\xi-x_0|>R_1\ ,\xi\in\Gamma\\ \varepsilon & \text{si}|\xi-x_0|\leq R_1\ ,\xi\in\Gamma\end{cases}$$

Así como $\bar{u}(\xi)\geq 0\ \forall\ \xi\in\partial_2 D$. Por (8) resulta que $|\xi-x_0|\cos(n(\xi),\xi-x_0)\geq 0$ y por tanto $-\partial\bar{u}(\xi)/\partial n\leq g^*=\varepsilon$ en $\partial_2 D$.

En consecuencia, por los teoremas de comparación, se tiene que $u^*(x)\leq\bar{u}(x)$ a.e. $x\in D$ y por tanto $u^*(\xi)\leq\bar{u}(\xi)$ a.e.$\xi\in\partial_2 D$, lo que con la definición de u y U arroja $0\leq u^*(\xi)\leq U(\xi)=0$ a.e. $\xi\in\Gamma$, $|\xi-x_0|<R_1$. Finalmente haciendo $C\to(N-1)H\varepsilon$ si $H>0$

ó $C+\frac{2\varepsilon}{R_0}$ si $H=0$ se obtiene que $u^*(\xi)=0$ a.e. $\xi\in\Gamma$, $|\xi-x_0|<R_1$ (R_1 dado en (10)) y como $u^*=u$ en Γ se concluye el resultado. #

NOTA 2. Como consecuencia del Teo.1, se puede estimar también el conjunto Γ-I. Así, si $g(\xi)-\hat{f}(\xi)<0$ a.e. $\xi\in\Gamma^*$, entonces existe una región $\Gamma_N\subset\Gamma(\Gamma_N\supset\Gamma^*)$ tal que $u(\xi)>0$ para $\xi\in\Gamma_N$. Otras estimaciones de $|2|^N$ sobre Γ-I se pueden fácilmente adaptar al caso $g\neq 0$. #

4. GENERALIZACIONES Y EXTENSIONES. El proceso anterior puede ser extendido al caso de :

a) ecuaciones elípticas lineales donde en lugar de Δu se tiene un operador genérico

$$Lu = -\sum_{i,j}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(x)u$$

b) ecuaciones lineales parabólicas con condiciones de contorno similares a las de (P).

Por el contrario las extensiones son bastante más complejas cuando se refieren a otros problemas no lineales de naturaleza cercana a (P). Así, por ejemplo, observamos que (P*) puede ser formulado también mediante

$$(12)\qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ -\dfrac{\partial u}{\partial n}\in\beta(u)+g & \text{en } \Gamma \end{cases}$$

siendo β el grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$ dado por $\beta(r)=0$ si $r>0$, $\beta(0)=(-\infty,0]$ y $\beta(r)=\emptyset$ (conjunto vacío) si $r<0$. Introduciendo la homogeneización de la Etapa 1 de la demostración del Teor. 2, (12) se puede formular mediante

$$(13)\qquad \begin{cases} -\Delta u^* = 0 & \text{en } \Omega \\ -\dfrac{\partial u^*}{\partial n}\in\beta(u^*)+g^* & \text{en } \Gamma \end{cases}$$

con $g^*=g-\hat{f}$. Finalmente introduciendo el operador $\mathcal{Q}:H^{1/2}(\Gamma)\to H^{1/2}(\Gamma)$ dado por $\mathcal{Q}w=\frac{\partial v}{\partial n}$, siendo $v\in H^1(\Omega)$ la solución de $\Delta v=0$ en Ω, $v=w$ en Γ, (13) equivale a : Hallar $w\in H^{1/2}(\Gamma)$ tal que

$$(14)\qquad \mathcal{Q}w+\beta(w)\ni -g^*.$$

Obsérvese que $\mathcal{Q}$ es un operador pseudodiferencial sobre Γ, lineal monótono y coercivo (ver |1|). Surge entonces la cuestión de si la propiedad de generación de I es también característica de otros grafos maximales monótonos no lipschitzianos en $r=0$. A diferencia de lo que ocurre en muchas otras situaciones (vease, p.e. Díaz |5|) la respuesta es, en general, negativa como lo muestra el siguiente

CONTRAEJEMPLO: Dados $R>0$ y $1<\gamma<3/2$. Sea $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}: y>0$, $x^2+y^2<R^2$, $\pi/2\gamma<\operatorname{arctg} y/x<\pi\}$. Consideremos la función $u(x,y)=\operatorname{Re} z^\gamma$ con $z=x+iy$, e.d. $u(x,y)=\rho^\gamma\cos\theta$ si $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\operatorname{sen}\theta$. Se tiene que $u\in H^2(\Omega)$ y $\Delta u=0$ a.e. en Ω. Por otra

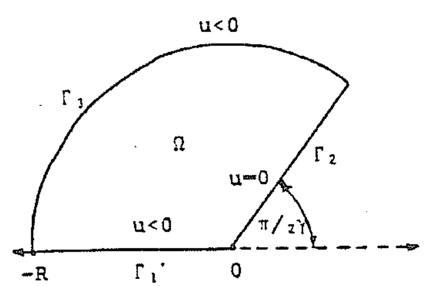

FIG.2

parte, si escribimos: $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$ según indica la fig.2, en Γ_1 se tiene que:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\rho}\operatorname{sen}\theta+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}\cos\theta$$

$$=\gamma\rho^{\gamma-1}\operatorname{sen}(\gamma-1)\theta=\gamma\rho^{\gamma-1}|\operatorname{sen}\gamma\pi|$$

y dado que en $\Gamma_1: u(x,0)=\rho^\gamma\cos\gamma\pi = -\rho^\gamma|\cos\gamma\pi|$, se tiene que en Γ $\mathcal{Q}u+\beta(u)\ni -g^*$, siendo

$$\beta(r)=K|r|^{\gamma-1/\gamma}\operatorname{sign}(r) \text{ con}$$

$$K=\frac{\gamma|\operatorname{sen}\gamma\pi|}{|\cos\gamma\pi|^{\gamma-1/\gamma}},\ r\in\mathbb{R},\ \text{y } g^*$$

definido por $g^*=0$ en Γ_1 y $-g^*\equiv\mathcal{Q}u+\beta(u)$ en $\Gamma_1\cup\Gamma_2$. En conclusión, β no es lipschitziano en el origen (pues $0<\gamma-1/\gamma<1$), $g^*=0$ en Γ_1 y sin embargo ($\forall R>0$) $u|_{\Gamma_1}<0$. De esta forma se corrobora la Obs. 3.1 de |6| en la que ya se afirmaba que el carácter acotado del dominio del grafo β de Signorini es la principal causa de la formación del conjunto de coincidencia I.

NOTA 3. En un próximo trabajo será considerado el problema parabólico (sobre una variedad sin borde Γ) asociada a (14), así como una generalización no lineal del operador $\mathcal{Q}$. #

REFERENCIAS:

|1| H.BREZIS. "Problemes Unilateraux". J.Math.Pures et Appl. pp.1-168.

|2| A. FRIEDMAN. "Boundary behaviour of solutions of Variational Inequalities for Elliptic Operators". Arch. for Rat. Mech. and Analysis 27, nº2, (1967).

|3| A. FRIEDMAN. Variational Principles and Free-boundary Problems. John-Wiley and Sons, (1982).

|4| R.GLOWINSKI, J.L.LIONS y R. TREMOLIERES. Analyse Numerique des Inequations Variationelles. Dunod, (1976)

|5| J.I.DIAZ. Técnica de Supersoluciones Locales para Problemas Estacionarios No Lineales. Memoria nºXVI de la Real Academia de Ciencias de Madrid. (1982).

|6| J.I.DIAZ. "Localización de fronteras libres en Inecuaciones Variacionales estacionarias dadas por obstáculos". Actas III C.E.D.Y.A. Santiago de Compostela (1980) pp.97-108.

|7| J.I.DIAZ y R.F.JIMENEZ. "Boundary behaviuor of solutions of Signorini type problems". (aparecerá)

|8| R.SPERB. Maximun Principles and Their Applications. Academic Press. (1981).