ECUACIONES CUASILINEALES GENERANDO UNA FRONTERA LIBRE: UNA PANORAMICA

por
J. Ildefonso DIAZ
Univ. Complutense de Madrid

1. INTRODUCCION.

El propósito de este trabajo es presentar algunos recientes resultados relativos a diferentes propiedades cualitativas satisfechas por las soluciones de ciertas ecuaciones cuasilineales elípticas, parabólicas e hiperbólicas. Tal y como se expondrá más tarde, las ecuaciones en consideración aparecen con gran frecuencia en una amplia variedad de problemas de la Física, Matemática, Química, Biología y otras ciencias. En la modelización de muchos de estos problemas aparecen términos no lineales de difusión, de convección o de absorción. Veremos como la presencia de alguno de estos términos no lineales o de varios de ellos simultaneamente pero satisfaciendo un cierto balance, conduce a la formación de interfases o <u>fronteras libres</u>, ésto es superficies en $\mathbb{R}^n$ delimitando regiones en las que el comportamiento de la solución es cualitativamente diferente. Una primera delimitación del contenido de este trabajo es la consideración de problemas en EDP en los que la frontera libre aparece como una <u>propiedad a posteriori</u> de la solución, en contraste con otros problemas (usualmente denominados Problemas de Frontera Libre) en los que tales superficies, aunque también desconocidas a priori, forman parte de la propia formulación del problema (|45|).

En nuestro análisis haremos un especial hincapié en el estudio del balance entre los términos de difusión, convección y absorción. Esta es la razón por la que prescindiremos de formulaciones en las que siendo de una gran generalidad resulta difícil una interpretación de los términos no lineales involucrados. Más concretamente, dado Ω abierto (no necesariamente acotado) de $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 1$, nos limitaremos a la consideración de problemas de contorno elípticos o parabólicos asociados respectivamente a una de las ecuaciones

$$-\mathrm{div}(\vec{a}(x,\nabla u) + \vec{B}(x,u)) + c(x,u) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \tag{1}$$

o bien

$$u_t - \mathrm{div}(\vec{a}(t,x,u,\nabla u) + \vec{B}(t,x,u)) + c(t,x,u) = 0 \quad \text{en} \quad (0,\infty) \times \Omega . \tag{2}$$

Así mismo comentaremos brevemente el problema de Cauchy asociado a la ecuación cuasilineal hiperbólica de primer orden.

$$u_t - \mathrm{div}\, \vec{b}(t,x,u) + c(t,x,u) = 0 \quad \text{en} \quad (0,\infty) \times \mathbb{R}^N . \tag{3}$$

De hecho, por razones de extensión sólo trataremos aquí algunas formulaciones concretas de (1), (2) y (3) de una mayor relevancia. Por tanto no detallaremos por el momento las hipótesis estructurales impuestas a las funciones $\vec{a}$, $\vec{b}$ y c. Nos limitaremos, eso sí, a hacer hincapié en que salvo que se indique lo contrario las ecuaciones tienen un carácter escalar, es decir, la incógnita u toma valores en $\mathbb{R}$. El estudio de sistemas de ecuaciones no lineales, es sin duda, materia aún no muy explorada en lo relativo a propiedades cualitativas de las soluciones.

En la mayoría de las ocasiones la incógnita u representa una magnitud física que carece de sentido cuando toma valores negativos. Aunque es posible un tratamiento matemático obviando el signo de u, aquí nos restrin giremos a suponer $u \geq 0$. De esta manera el dominio de definición de u (esto es $\bar{\Omega}$ si el problema es elíptico o $[0,\infty) \times \bar{\Omega}$ si es parabólico o hiperbólico) se puede expresar como la unión de los dos conjuntos siguientes asociados a la solución u:

$$P(u) = \{x \in \bar{\Omega} \ \text{(resp. } (t,x) \in [0,+\infty) \times \bar{\Omega}) \text{ tales que } u > 0 \text{ en dichos puntos}\}$$

y

$$N(u) = \{x \in \bar{\Omega} \ \text{(resp. } (t,x) \in [0,+\infty) \times \bar{\Omega}) \text{ tales que } u = 0 \text{ en dichos puntos}\}.$$

Un hecho bien conocido es que cuando (1) y (2) son lineales, las correspondientes soluciones son estrictamente positivas e.d. $P(u) = \Omega$ y $N(u) = \emptyset$. Tal hecho puede ser fácilmente probado de muy diversas maneras: representación integral de las soluciones, principio fuerte del máximo, regularidad de las soluciones, etc. Sin embargo veremos que en el caso no lineal con gran frecuencia el conjunto $N(u)$ es no vacío y por tanto $P(u) \not\subseteq \Omega$, generándose entonces una curva Λ en $\bar{\Omega}$ (respectivamente en $[0,\infty) \times \bar{\Omega}$) definida por

(4) $$\Lambda = \partial P \equiv \text{frontera de } P(u).$$

(En lo sucesivo indicaremos por P y N a los conjuntos $P(u)$ y $N(u)$ salvo que no haya unicidad de soluciones para el problema considerado). La curva Λ es pues una frontera libre y de hecho ya podemos precisar que nuestro interés se fijará única y exclusivamente en las fronteras libres así generadas (otras fronteras libres pueden ser también generadas por las soluciones de ciertas ec. cuasilineales |34|, |19|).

Como es natural, el estudio de propiedades cualitativas tales como la formación de la frontera libre Λ, aunque puede ser realizado "a priori", suele ser precedido por la teoría general de la existencia y unicidad de soluciones. Dado el contexto del Congreso en el que se enmarca este trabajo, y con el fin de hacer un mayor énfasis en el estudio de Λ, vamos a intentar prescindir de esta teoría general cuya sola presentación exigiría media docena de páginas más, así como la introducción de adecuados espacios funcionales. En cualquier caso indiquemos que cuando nos refiramos a las soluciones de las ecuaciones en estudio se tratará de funciones (al menos localmente integrables) y que verifican la ecuación en derivadas parciales en algún sentido débil que es satisfecho si las soluciones son soluciones clásicas (ésto es, soluciones derivables, en sentido clásico, tantas veces como haga referencia la ecuación). También, aunque sólo por comodidad, supondremos la unicidad de soluciones débiles salvo en algunos contados casos que se mencionarán más tarde. Una importante observación a hacer es que la regularidad de las soluciones depende en una gran manera de la existencia o no existencia de la frontera libre Λ. De hecho a lo largo de esta curva Λ pueden aparecer singularidades en la solución que impiden que la solución lo sea en sentido clásico. (Detalles y referencias sobre la teoría, la existencia y unicidad pueden encontrarse, por ejemplo en |34|).

Antes de entrar en materia, nada mejor que ofrecer algunas ecuaciones concretas que aparecen en diversos problemas aplicados. En lugar de hacer un listado de tales problemas me referiré a continuación a sólo algunos de ellos que por formar parte de toda una teoría admiten referencias "asequibles".

Modelo 1. Filtración de fluídos a través de medios porosos. Una referencia casi obligada a la hora de establecer la formulación matemática de este tipo de problemas es Bear |10|. Aquí u representa la concentración del fluído sobre un medio poroso que en la mayoría de las ocasiones se supone que ocupa todo el espacio i.e, $\Omega = R^N$ (N=1,2 o 3). En régimen de evolución tal función satisface (cuando se desprecia la acción de la gravedad) la ecuación

$$(5) \qquad u_t - \Delta\phi(u) = 0$$

donde ϕ es una función real no-decreciente (por ejemplo $\phi(u) = u^m$, $m > 1$) determinada empíricamente. De hecho (5) es sin duda el caso particular más importante de las ecuaciones respondiendo a la formulación (2). En importantes problemas de Hidrología la acción de la gravedad no es despreciada y aparecen términos de convección.

$$(6) \qquad u_t - \Delta\phi(u) + \frac{\partial}{\partial z} b(u) = 0$$

donde z representa una de las variables espaciales y de nuevo b es una función real (p.e. $b(u) = \pm u^\lambda$ $\lambda > 0$) determinada empíricamente. En algunas otras ocasiones hay comportamientos fuertemente no lineales (Ley de Darcy no lineal) y en vez de (5) se obtiene como ecuación

$$(7) \qquad u_t - \mathrm{div}(|\nabla\phi(u)|^{p-2}\, \nabla\phi(u)) = 0 \quad , \quad p > 1,$$

(obsérvese que si $p = 2$ entonces (5) y (7) coinciden). Otra ecuación de gran relevancia aparece en el estudio de fluídos parcialmente saturados, en cuyo caso se obtiene (7) pero para la función multívoca $\phi(r) = r + 1$ si $r \leq 0$, $\phi(0) = [1,+\infty)$. Si la filtración se refiere a dos fluídos inmiscibles tales como, por ejemplo, agua y petroleo la ecuación obtenida es (6) pero con la dificultad suplementaria de que $\phi'(1) = 0$. Finalmente señalemos que el estudio de filtraciones en régimen estacionario ha sido también extensamente estudiado. A este respecto son de resaltar los recientes resultados de |25| cerrando una cuestión sin respuesta desde largo tiempo referente a la unicidad de soluciones para el modelo de filtración de agua en diques porosos. Antes de pasar a otro modelo señalemos que la curva Λ y los conjuntos $N(u)$ y $P(u)$ admiten una directa interpretación física: $P(u)$ no es más que la región ocupada por el fluído.

Modelo 2. Reacciones químicas en Catálisis. Sin duda alguna el libro de Aris |3| es por el momento la referencia más completa sobre la formulación matemática de estos problemas, conteniendo a la vez una gran información sobre el tratamiento matemático realizado hasta su publicación en 1975. En el caso de reacciones simples (un solo reactante) e irreversibles, sobre un dominio que se supone en general acotado de $\mathbb{R}^N$ y cuando la reacción se produce a temperatura constante, se obtiene la ecuación

$$-\Delta u + \lambda u^q = 0 \qquad \text{en } \Omega \quad , \tag{8}$$

donde u es de nuevo la concentración, λ es un parámetro real positivo y $q \geq 0$ es denominado el orden de la reacción. En esta formulación una de las condiciones de contorno más frecuente es

$$u = 1 \qquad \text{en } \partial\Omega \quad . \tag{9}$$

Algunas variantes de la ecuación (8) de especial relevancia son las siguientes: i) Cinética de Langmuir-Hinshelwood, en cuyo caso q toma valores negativos $-1 < q < 0$, (|3| pág. 168), ii) Difusiones dependientes de la concentración o de su gradiente:

$$-\Delta\phi(u) + \lambda u^q = 0 \qquad (\phi' \geq 0) \tag{10}$$

y

$$- \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda u^q = 0 \quad (p > 1) \tag{11}$$

(véase Aris |3|, págs. 69 y 207 respectivamente), iii) procesos con energía de activación grande en los que el término u^q es sustituído por una función $c(u)$ creciente para valores pequeños de u y decreciente para el resto de valores de $u \geq 0$. En este último caso pueden existir más de una solución. (Un tratamiento sistemático incluyendo el estudio de la frontera libre ha sido realizado recientemente en |46|). También es de resaltar que si la reacción no es isotérmica se obtiene el sistema acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u^q e^{\gamma(\frac{v-1}{v})} = 0 \\ -\Delta v - \nu\lambda u^q e^{\gamma(\frac{v-1}{v})} = 0 \end{cases}$$

donde $v(x)$ es la temperatura y ν, γ son parámetros positivos. (Para un tratamiento matemático véase |35|). Señalemos por último que de nuevo $P(u)$ no es más que la zona ocupada por el reactante y que el conjunto $N(u)$ es denominado <u>dead core</u> por aparecer en el interior cuando las condiciones de contorno son de tipo (9). Las ecuaciones parabólicas asociadas a todas las aquí mencionadas son también tratadas en |3| al formular los correspondientes procesos de evolución.

<u>Modelo</u> 3. <u>Dinámica de gases</u>. (Courant-Friedrichs |27|). Una ecuación simplificada, apareciendo en tal teoría es la ecuación hiperbólica de primer orden dada por (3). (Versiones particulares de tal ecuación también aparece en problemas de tráfico, control determinista, etc.)

Volviendo al planteamiento genérico y para terminar esta larga introducción señalemos que los resultados que vamos a presentar aquí son de dos tipos:

1.- Criterios de existencia y de no existencia de la frontera libre.

2.- Análisis cualitativo de la frontera libre supuesta existente.

Una importante diferencia entre ellos radica en la formulación de los problemas considerados en cada caso. Así por ejemplo, para el primer tipo interesan formulaciones muy genéricas de los problemas con el fin de intentar caracterizar una amplia clase de ecuaciones para los que tal frontera libre existe. Un biproducto de tales resultados suele ser la estimación de la localización de Λ. Por el contrario, a la hora de establecer otras propiedades cualitativas de dicha frontera, tales como su regularidad, propiedades geométrico-topológicas, estabilidad, etc., se hace poco menos que necesario el simplificar la formulación del problema suponiendo por ejemplo que $\Omega = \mathbb{R}^N$ o bien que u = cte en el contorno $\partial\Omega$, o bien $N = 1$, etc.

En lo que resta de este trabajo comentaremos algunos resultados en este campo, haciendo un especial énfasis en la distinta fenomenología originada por la presencia de no linealidades en la ecuación.

2. CRITERIOS DE EXISTENCIA DE LA FRONTERA LIBRE.

Las causas que conducen a la formación de la frontera libre son de muy diversa índole. A continuación presentaremos alguna de ellas:

a) Convección en régimen de evolución. Una propiedad típica de las ecuaciones hiperbólicas es la de tener una velocidad de propagación finita.

Tal propiedad se traduce en que si por ejemplo $\Omega = \mathbb{R}^N$ y los datos iniciales son con soporte compacto (ésto es: nulos fuera de un compacto de $\mathbb{R}^N$) entonces para cada $t > 0$ el soporte de $u(t,\cdot)$ es también compacto.

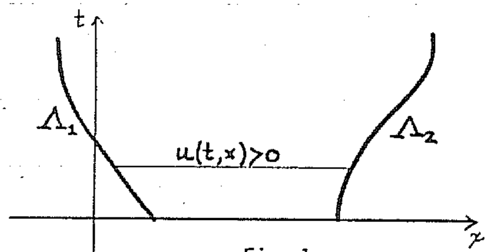

Fig. 1

En la figura anterior se ha supuesto $\Omega = \mathbb{R}$ y la frontera libre Λ viene dada por $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$. La citada propiedad también aparece para la ecuación cuasilineal

$$u_t + \operatorname{div} \vec{b}(u) = 0 \tag{12}$$

cuando $\vec{b}$ es supuesta Lipschitziana. De hecho en este caso, se tiene una propiedad aún más fuerte asegurando la acotación del cono de dependencia (véase por ejemplo |63| ó |40|). Recientes resultados sobre la propiedad de propagación a velocidad finita (entendida en el sentido antes precisado) sin hacer referencia a la Lipschitcianidad de $\vec{b}$ pueden encontrarse en |40|. Señalemos también que en muchos casos la falta de Lipschitcianidad conduce a la existencia unidireccional de frentes (|40|). Así por ejemplo, como una fácil consecuencia de |39| se tiene que si u satisface la ecuación

$$u_t + (u^\lambda)_x = 0 \quad \text{en} \quad (0,\infty) \times \mathbb{R} \tag{13}$$

con $0 < \lambda < 1$, y si $u(0,x) = 0$ si $x \notin [a,b]$ entonces u tiene un comportamiento como el que indica la figura siguiente

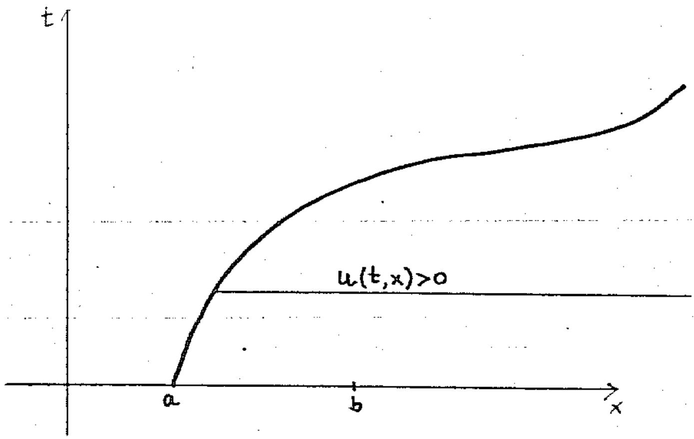

Fig. 2

b) Difusión "lenta" en régimen de evolución. La propiedad de propagación finita a la que nos hemos referido antes también es típica de ecuaciones de difusión no lineales tales como (6) ó (7). Así si $\phi \in C^1$ la ecuación (6) se puede escribir como

$$u_t - \phi'(u)\Delta u - \phi''(u)\,|\nabla u|^2 = 0$$

y así si $\phi'(0) = 0$ la ecuación no es uniformemente parabólica pasando a ser de tipo hiperbólico en la región $N(u) = \{u = 0\}$. Debido a ésto, si $\phi'(0) = 0$ se dice que (6) es una ec. cuasilineal degenerada. Algo parecido sucede con (7) incluso cuando $\phi(s) = s$. En efecto, la ecuación cuasilineal

$$(14) \qquad u_t - \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0$$

es también degenerada si $p > 2$ en aquellos puntos de $(0,\infty) \times \Omega$ en los que $\nabla u = 0$. De hecho, en general, el carácter de ecuación degenerada no basta para que aparezca la propiedad de propagación a velocidad finita. Así para la ecuación (6) es mostrado en |66| y |31| (para $N = 1$ y $N > 1$ respectivamente) que si una cierta integral impropia es finita o más concretamente; supuesto $\phi(0) = 0$, si

(15) $$\int_0^1 \frac{\phi'(s)}{s}\, ds < +\infty$$

entonces se tiene tal propiedad. Este es el caso de $\phi(s) = s^m$ cuando es $m > 1$. Por otra parte es mostrado en |67| que si (15) no se satisface (y $\Omega = \mathbb{R}$) entonces la solución correspondiente es instantáneamente estrictamente positiva, $P(u) = (0,\infty) \times \mathbb{R}$ y por tanto Λ es el conjunto vacío. Este es el caso de la ecuación lineal del calor. Así mismo no es difícil construir algunas ϕ para las que (15) no se satisface aún siendo $\phi'(0) = 0$. Con respecto a la ecuación (14) basta la condición $p > 2$ para la propagación a velocidad finita (|37|). En el sofisticado caso de la ecuación (7) la condición suficiente de existencia de Λ es ahora un <u>balance entre ϕ y p:</u> la hipótesis (15) pasa a ser (|55|)

(16) $$\int_0^1 \frac{\phi'(s)}{s^{1/(p-1)}}\, ds < +\infty$$

Obsérvese también que siguiendo una interpretación ya introducida en |76| ambas ecuaciones o más en general (7) puede ser escrita formalmente en términos de una ecuación cuasilineal de primer orden

$$u_t + \operatorname{div}(\vec{v} \cdot u) = 0$$

siendo

$$\vec{v}(t,x) = \frac{-|\nabla\phi(u)|^{p-2}\nabla\phi(u)}{u}$$

y así si $\vec{v}$ es una función, $\vec{v}$ representa la velocidad de propagación en el nivel $u = 0$. De esta manera queda una vez más en evidencia que la formación de Λ está también intrínsecamente ligada a cuestiones de regularidad de la solución (veánse a este respecto Vázquez-Herrero |52| y sus comunicaciones en este congreso, así como |56| para un enfoque distinto). Señalemos por último que la terminología difusión lenta fue introducida en la literatura para designar el caso en el que se tiene velocidad de propagación finita y que si el dominio Ω no es todo el espacio la propiedad de propagación a velocidad finita debe entenderse en el sentido de que existe un tiempo crítico T^* (dependiendo de la medida de $N(u_0)$ y el máximo de u en la frontera parabólica i.e. en $(\{0\} \times \Omega) \cup (0,\infty) \times \partial\Omega)$ de tal manera que $\forall t$, $0 \leq t < T^*$ el conjunto $\{x \in \Omega: u(t,x) = 0\}$ es de medida positiva (|34| |16|). En la figura que sigue se representa el caso de $\Omega = (a,b)$ y $u = K$ cte en $(0,\infty) \times \partial\Omega$. De nuevo $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$.

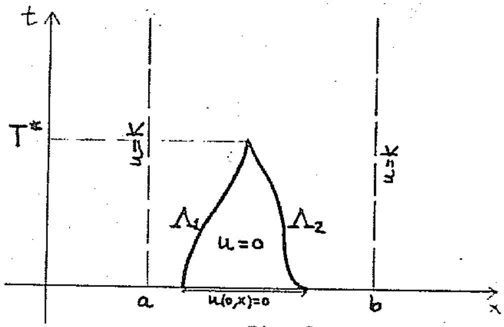

Fig. 3

c) <u>Difusión "rápida" en régimen de evolución</u>. El tipo de difusión referido en b) contrasta con el correspondiente al caso en que $\phi'(0) = +\infty$. Más concretamente, supuesto Ω acotado de $\mathbb{R}^N$ si se tiene que

$$\int_0^1 \frac{ds}{\phi(s)} < +\infty \tag{17}$$

entonces la solución del problema de Dirichlet homogéneo asociado a (6) se <u>extingue en tiempo finito</u> (i.e. $T_0 > +\infty$ tal que $u(t,\cdot) = 0$ $\forall t \geq T_0$). Este es el caso de $\phi(s) = s^m$, $0 < m < 1$ (|20|). De hecho puede ser también mostrado que tal T_0 es caracterizado por el hecho de que $P(u) = (0,T_0) \times \Omega$ y $N(u) = [T_0,+\infty) \times \Omega$ por lo que $\Lambda = \{T_0\} \times \Omega$. La condición (17) resulta ser también necesaria para que tal comportamiento aparezca (|30|, |69|). En el caso de la ecuación (14) esta propiedad aparece cuando $1 < p < 2$ (|7| y |51|).

Sin entrar aún en los métodos de como las situaciones b) y c) son abordadas señalemos que en ambos casos la ecuación ordinaria

$$\frac{dw}{dt} + c(w) = 0 \tag{18}$$

(donde $c = \phi^{-1}$ o bien $c = \phi$) juega un papel importante. De hecho (18) puede ser considerada como un fenómeno trivial de absorción en régimen de evolución. Si se tiene unicidad de soluciones clásicas de (18) y si $c(0) = 0$, es obvio que w no puede anularse nunca salvo que sea $w \equiv 0$. Sin embargo, es fácil ver que (15) o (16) (según sea $c=\phi, c=\phi^{-1}$) implican que la solución correspondiente se extingue después de un T_0 finito. Obviamente en dicho caso $\Lambda = \{T_0\}$. Señalemos también que si c es no decreciente se tiene en cualquier caso la unicidad de soluciones en sentido de la teoría de semigrupos de operadores.

Con gran frecuencia en la formulación de los problemas aparecen simultáneamente términos de difusión, convección o absorción. La coexistencia de los tres tipos de términos no conduce a ningún fenómeno cualitativo nuevo con respecto al efecto combinado de dos de ellos (|54|, |57|, |43|). De ahí que tratemos a continuación únicamente las situaciones en las que sólo coexisten dos términos distintos:

d) Balance entre difusión y absorción. Una primera observación es que en muchos casos podemos suponer sin pérdida de generalidad que la difusión es lineal. En efecto si u es solución de la ecuación

(19) $$-\Delta\phi(u) + c(u) = f(x)$$

y si ϕ es estrictamente creciente, el cambio $w = \phi(u)$ reduce el estudio de (19) al de la ecuación

$$-\Delta w + \tilde{c}(w) = f(x)$$

siendo $\tilde{c} = c \cdot \phi^{-1}$. Sin embargo si la difusión envuelve no linealidades sobre el gradiente, o si la ecuación es parabólica se hace necesario considerar términos de difusión no lineales. Con respecto al problema estacionario una formulación general es

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda c(u) = f(x) & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \Omega \end{cases}$$

Existen diversos criterios, quizás no unificados hasta el momento, que aseguran que la frontera libre Λ (y por tanto el <u>dead core</u> $N(u)$) existen en una subregión de $N(f)$ (parte de Λ en la que $f = 0$) si es que al menos se tiene un cierto balance expresando simultáneamente diversas condiciones: c ha de tener una primitiva cuya raíz $(p-1)$ debe ser integrable en el origen, $N(f)$ ha de tener medida suficientemente grande o bien el parámetro λ debe ser suficientemente grande. De manera genérica puede decirse que el dead core se forma (incluso para datos contantes en el contorno $\partial\Omega$) cuando el término de difusión es pequeño con respecto al término de absorción, para bajos valores de u, y $N(f)$ es suficientemente grande como para que la difusión sea capaz de llevar "reactante" de la frontera $\partial\Omega$ (si $f = 0$ o de $\partial N(f)$ en general) hacia la parte central de $N(f)$ (e.d. de Ω si $f = 0$). En vez de enunciar aquí tal condición suficiente, de una expresión muy compleja, nos vamos a limitar a explicitarla para el caso concreto de $f = 0$, $g = k$ constante potitiva y $c(s) = |s|^{q-1}s$, $q \geq 0$. El criterio de existencia de Λ consiste en suponer a la vez las dos siguientes condiciones (|33|,|35|,|8|).

i) $0 \leq q < p-1$

ii) $d \geq (\frac{K}{M})^{\frac{p-1-q}{p}}$ siendo d el radio de la mayor bola interior a Ω y

$$M = \left|\frac{\lambda(p-1-q)^{p}}{p^{p-1}(qp+N(p-1-q)}\right|^{\frac{1}{p-1-q}}.$$

La condición i) es imprescindible para tener asegurada la existencia de la frontera libre entre todos los $p > 1$ y $q \geq 0$ (|73|, |11|, |37|). También es de señalar que la frontera libre también puede existir para una gama más amplia de q: más concretamente cuando $-1 < q < p-1$ y se verifica a la vez ii) (|21|). Con respecto a la condición ii) señalemos que es obviamente satisfecha si Ω es no acotado. En otro caso, si se fija Ω acotado, la condición ii) exige que K sea pequeño o bien λ suficientemente grande. Sólo en el caso de $N = 1$ se sabe que ii) es necesaria (supuesta i)). Cuando $N > 1$ se tienen otros criterios negativos pero no son exactamente la negación de ii). (|8|). En el caso en que la función c no sea monótona son necesarios argumentos suplementarios a los del caso creciente pero los resultados siguen siendo válidos para cada una de las posibles soluciones. (|1|, |46|).

El caso de presencia simultánea de términos de difusión y absorción en régimen de evolución es aún más complejo, presentándose nuevos fenómenos. Algunos de ellos referidos a la ecuación

$$u_t - \mathrm{div}(|\nabla\phi\ (u)|^{p-2}\nabla\phi(u)) + c(u) = 0 \quad ,p > 1, \quad \phi' \geq 0,$$

son los siguientes:

i*) Si la difusión es lenta (e.g. si se verifica (16)) basta que $c(s)\cdot s \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$ para que se tenga la propiedad de propagación a velocidad finita. El caso de $c(s)\ s \leq 0$ es discutido en |47|.

ii*) Si el problema estacionario asociado tiene frontera libre (por ejemplo si se verifican i), ii) y se supone $\phi(s) = s$, $u = K$ en $(0,\infty) \times \partial\Omega$ y $\|u_0\|_\infty \leq K$) entonces el dead core $N(u(t,\cdot))$ es de medida no nula para diferentes valores de t según sea el término de absorción. Así, por ejemplo, si $c(s) = \lambda|s|^{q-1}s$ con $q \geq 0$ y $\phi(s) = s$ (por simplicidad) se tiene la siguiente disyuntiva:

ii*.1) Si $1 \leq q < p-1$ y si $d_0 \geq (\frac{K}{M})^{\frac{p-1-q}{p}}$, (siendo d_0 el radio de la mayor bola inscrita en $N(u_0)$ M dado como en ii) y K una cota superior de $\|u\|_\infty$) se tiene que $\forall t \geq 0$ $N(u(t,\cdot))$ es de medida acotada inferiormente (Uniformemente en t) por un cierto número positivo.

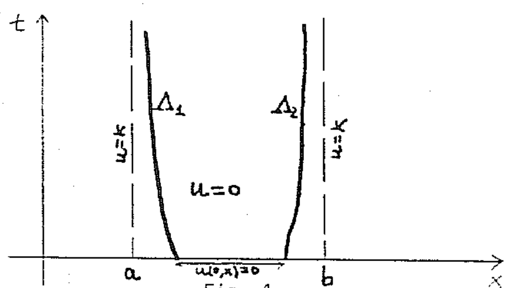

Fig. 4

ii*.2) Si $0 \leq q < 1$, $q < p-1$ entonces la absorción es "objetivamente" tan grande que no sólo se verifica ii*.1) si no que incluso para datos iniciales u estrictamente positivos el dead core $N(u(t,\cdot))$ se forma para t suficientemente grandes (i.e. $t \geq T_0$ para algún T_0 finito llamado también tiempo de extinción por similitud con el caso de difusión rápida, $u = 0$ en $(0,\infty) \times \partial\Omega$).

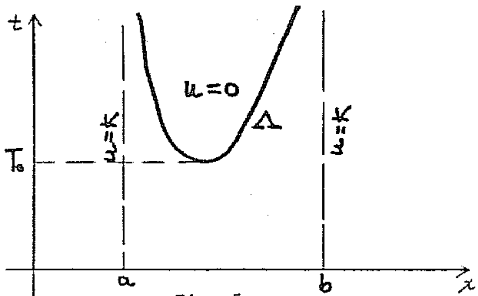

Fig. 5

De hecho el comportamiento ii*.2) es la yustaposición de dos hechos diferentes. Extinción en tiempo finito (debido a la condición $0 \leq q < 1$) y localización o uniforme acotación asintótica de Λ (debido a $q < p-1$). |53| |60| |62|, |42|, |17|, |18|, |74|, |36|). Es interesante resaltar que si $u = 0$ en el borde $(0,\infty) \times \partial\Omega$ entonces dado que $0 \leq q < 1$ se tiene que u coincide con su conjunto ω-límite (i.e. $\omega \equiv \{u_\infty \equiv 0\}$) después de un tiempo finito. Sin embargo este no es el caso si $u \neq 0$ en $(0,\infty) \times \partial\Omega$, o más en general si el conjunto ω-límite contiene funciones no idénticamente nulas. En efecto, recienemente ha sido probado en |9|, que el dead core no se puede estabilizar ni siquiera localmente al menos si $u_0 = 1$, $K = 1$, $p = 2$. Es de señalar que una gran parte de estos resultados se mantienen si c depende también de t y x con lo que pueden ser así aplicados a sistemas (|35|, |36|).

e) <u>Balance entre difusión y transporte</u>. Por el mismo tipo de cambio de variable que en d) basta considerar (para el caso estacionario) la ecuación de la forma

$$(20) \qquad -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u + \vec{b}(u)) = f(x)$$

donde $\vec{b} = (b_1,\ldots, b_N)$ con b_i función real continua tal que $b_i(0) = 0$. Obviamente la ecuación (20) ahora no es invariante por el grupo de simetría y así el comportamiento cualitativo de la solución puede ser enteremante diferente en direcciones distintas según sea b_i. Tal comportamiento direccional fue primeramente puesto de manifiesto en |40| para el caso de la ecuación (3). Para ilustrar este fenómeno supongamos por ejemplo $N = 2$, $\Omega \subseteq (\alpha_1,\alpha_2)\times (\beta_1,\beta_2)$, $\vec{b}(u) = (\gamma_1 u^{\lambda_1},\gamma_2 u^{\lambda_2})$ con $0<\lambda_1, \lambda_2$; $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$. Supongamos por simplicidad $u = 0$ en $\partial\Omega$ y que $P(f) = \Omega - N(f) \subseteq (\alpha_1^*,\alpha_2^*) \times (\beta_1^*,\beta_2^*)$. Entonces la frontera libre existe si se verifican las dos siguientes propiedades (|34|).

i**) $\exists\, i \in \{1,2\}$ tal que $\lambda_i < p-1$ y $\gamma_i \neq 0$.

ii**) distancia $(P(f),\partial\Omega) \geq \dfrac{1}{\gamma_i^{\,p-1}} \dfrac{(p-1)}{(p-1-\lambda_i)} M^{1-(\lambda_i/p-1)}$, con M cota superior de $\|u\|_\infty$.

Si por ejemplo $i = 1$ y $\gamma_1 > 0$, bajo i**) e ii**) se puede incluso asegurar que $N(u) \supset [\tilde{\alpha}, \alpha_2] \times [\beta_1,\beta_2]$ con $\tilde{\alpha} > \alpha_2^*$. Si las propiedades anteriores se tienen para $i = 1$ e $i = 2$, y si por ejemplo $\gamma_i > 0$, se tiene que $N(u) \supset \Omega-(\alpha_1,\tilde{\alpha}) \times (\beta_1,\tilde{\beta})$ con $\tilde{\alpha} > \alpha_2^*$ y $\tilde{\beta} > \beta_2^*$.

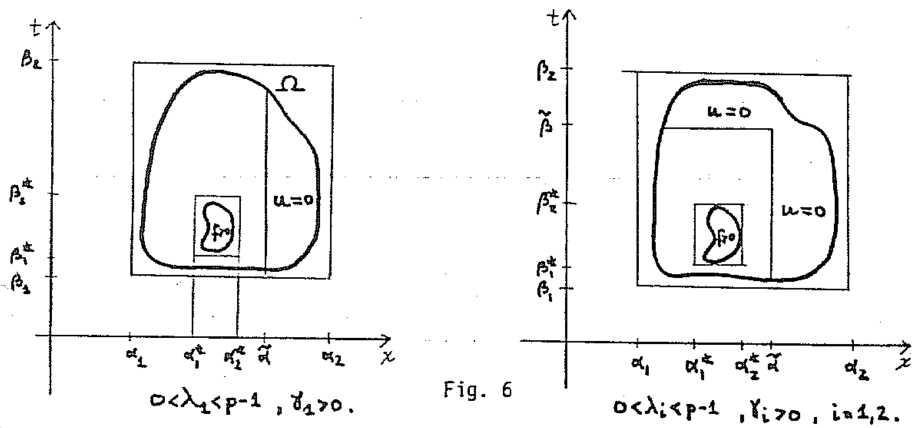

Fig. 6

Tal y como sucedió en el caso d), el estudio del problema de evolución asociado es aún más complejo que el del caso estacionario. Debido a esto consideremos únicamente la ecuación unidimensional.

(21) $$u_t - (u^m)_{xx} + (u^\lambda)_x = 0 \quad \text{en} \quad (0,\infty) \times \mathbb{R}.$$

Cuando $m > 1$ y $\lambda > 1$ se tiene la propiedad de propagación a velocidad finita (|54|, |48|, |49|). Si $m > \lambda \geq 1$ uno de los frentes está uniformemente acotado en t (|54|, |48|). Finalmente si $0 < \lambda < 1 \leq m$ existe una única frontera libre acotada uniformemente (|39|).

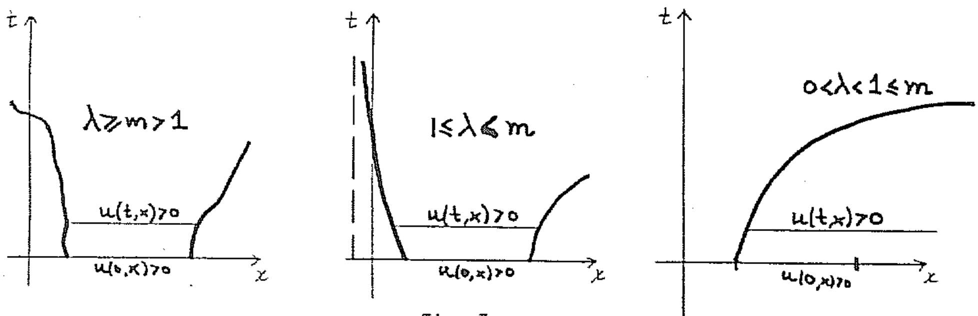

Fig. 7

f) Balance entre convección y absorción. Un sistemático estudio de este caso ha sido realizado en |40|. Las ecuaciones modelo son ahora las ecuaciones hiperbólicas

$$(22) \qquad -\mathrm{div}\,\vec{b}(u) + c(u) = f(x) \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N$$

y

$$(23) \qquad u_t - \mathrm{div}\,\vec{b}(u) + c(u) = f(t,x) \ \text{en} \ (0,\infty) \times \mathbb{R}^N.$$

En ambos casos se producen efectos direccionales según el comportamiento de cada b_i. Una consecuencia global de |40| es que cualitativamente el balance entre convección y absorción produce esencialmente los mismos efectos que el balance entre difusión y absorción. Propiedades cualitativas de la frontera libre Λ son también obtenidas en |68| y |26|.

Para finalizar esta sección señalemos que también en otras ecuaciones no lineales aparecen a posteriori fronteras libres. Así por ejemplo, el problema de obstáculo ($u \geq \psi$, ψ función dada) puede ser entendido como un caso límite de ecuaciones de tipo d) en el que ahora c es una función multívoca |22|, |23|, |11|, |41|, |45|, |40|, |29|. También el problema de filtración de agua en un dique poroso puede ser entendido como un caso límite de ecuaciones de tipo (20) en el que b es también una función multívoca (|25|). Así mismo, la frontera libre Λ aparece cuando se consideran las ecuaciones (1) y (2) bajo condiciones de contorno de tipo Neumann eventualmente no lineales (|33|). Incluso para ecuaciones lineales se pueden generar una frontera libre en $\partial\Omega$ (resp. $(0,\infty) \times \partial\Omega$) en los problemas denominados de tipo Signorini. En tal caso sobre la frontera se tiene que $u \geq 0$ pero la parte de ella (cuyo "borde" forma la frontera libre) en la que $u = 0$ es desconocida a priori. (|44|, |38|).

La frontera libre Λ también se genera para ecuaciones de orden superior tales como

(24) $$(-1)^m \Delta^m u + |u|^{q-1}u = f(x) \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N$$

cuando $0 \leq q < 1$ |14| (Véase también |68|, |13|). Finalmente señalemos que a veces la sola presencia de términos integrodiferenciales en las ecuaciones, sean lineales o no, conducen a la formación de la frontera libre Λ (|50|, |65|, |34|).

3. PROPIEDADES CUALITATIVAS DE LA FRONTERA LIBRE.

Una de las más importantes propiedades a conocer sobre la frontera libre, ahora supuesta existente, radica en su localización mediante adecuadas estimaciones en alguna parte del dominio en consideración. En general los propios criterios de existencia de fronteras libres arrojan ya algunas estimaciones iniciales que de hecho pueden ser afinadas al menos para formulaciones algo más concretas. Esto sucede en el caso estacionario (|33|, |45|) pero donde se tiene una larga literatura es en el caso de ecuaciones parabólicas unidimensionales (|6|, |70|, |71|, |72|, |52|, y las comunicaciones de estos autores). Cuestiones de una gran relevancia son el estudio de la monotonía en el tiempo de los conjuntos P(u(t)), el comportamiento de Λ para tiempos pequeños o arbitrariamente grandes, etc. Muchas de estas propiedades son primeramente evidenciadas para soluciones particulares de las que se conoce su expresión explícita y que a la vez permiten observar qué estimaciones no pueden ser mejoradas en general. De nuevo la regularidad de la solución y de su frontera libre Λ son temas de común tratamiento a estas propiedades cualitativas (|4|, |5|, |6|, |72|)

Algunas otras propiedades cualitativas de Λ han sido ya puestas de manifiesto en el amplio tratamiento de la sección anterior. Así por ejemplo en la Figura 1 se ha expresado vagamente que el conjunto $P(u(t,\cdot))$ es el intervalo (y por tanto convexo) dado por $(\Lambda_1(t), \Lambda_2(t))$. Tal propiedad de convexidad se mantiene aún en el caso de absorción con $c(s) = |s|^{q-1}s$ y $q \geq 1$ |62| sin embargo se puede perder si $0 \leq q < 1$ (|57|, |34|). La convexidad del dead core $N(u)$ ha sido recientemente probado en |46| en el caso de $N = 2$ (véase |34| para el caso de evolución) supuesto Ω convexo de $\mathbb{R}^N$ y $u = cte$ en el borde. Por último señalaremos que también existen en la literatura propiedades de tipo isoperimétricas referentes a la medida del dead core: entre todos los dominios Ω de igual medida, la medida del dead core correspondiente es máxima si Ω es una bola (|8|, |9|).

4. <u>SOBRE LOS METODOS</u>.

Se puede decir que hay dos métodos generales a la hora de obtener criterios de existencia de la frontera libre Λ. Por el contrario, tal y como ya se ha indicado, el establecimiento de propiedades cualitativas de Λ requiere métodos "ad hoc", adaptados a cada formulación concreta de las ecuaciones.

El método más frecuentemente utilizado radica en la <u>comparación</u> de soluciones. Por medio de generalizaciones del principio del máximo, típico de las ecuaciones lineales de segundo orden, se prueba que dada u solución de una ecuación igualada a un término exterior f, si $\bar{u}$ y $\underline{u}$ verifican la ecuación correspondiente a términos exteriores $\bar{f}$ y $\underline{f}$ verificando $\underline{f} \leq f \leq \bar{f}$ y si sobre el contorno (resp. contorno parabólico si el problema es de evolución) se conoce que $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$, entonces el principio de comparación asegura que $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$, en todo el dominio de definición. Obviamente una consecuencia inmediata de la comparación de soluciones es la unicidad, lo que da idea de la dificultad de su obtención en algunos casos (así por ejemplo, tal principio no ha sido aún demostrado en un marco general asociado a la ecuación (20)). A la hora de obtener criterios de existencia de Λ la idea es suponer las no linealidades involucradas en la ecuación de tal naturaleza que sea posible construir super y subsoluciones $\bar{u}$ y $\underline{u}$ anulándose en alguna región del dominio, con lo que se tiene asegurado que

$$N(u) \supseteq |N(\underline{u}) \cap N(\bar{u})|$$

y por tanto la existencia de Λ. Estas super y subsoluciones suelen ser construidas como soluciones autosimilares de la ecuación, travelling waves, soluciones separables etc. (|34|). Algunas características típicas de este método son las siguientes: en primer lugar y dado el carácter constructivo de $\underline{u}$ y $\bar{u}$, no es posible considerar formulaciones generales tales como las dadas por (1), (2) y (3). Por otro lado es bien conocido que este principio de comparación no es satisfecho, en general, cuando las ecuaciones son de orden superior a dos. Por el contrario, sí se tiene para ecuaciones de primer orden tales como (3), (22) y (33). Una explicación sencilla de este hecho radica en que las soluciones de dichas ecuaciones son obtenidas por paso al límite de soluciones de viscosidad, satisfaciendo ecuaciones del tipo (20), (21) y por tanto ya de segundo orden. Recientemente se ha introducido en |33| una versión local de este método lo que permite de una parte considerar el caso de dominios acotados así como obtener como biproducto, estimaciones sobre la localización de Λ más finas que las que arroja la versión global. Por último comentaremos que otras versiones de este principio de comparación han sido intro ducidas en |70| y |65| resultando de una gran utilidad en el estudio cualitativo de Λ (véase la comunicación de J.L. Vázquez).

Otro método diferente para probar la existencia de Λ es el actualmente denominado método de energía (|2|, |41|). Se trata de un método local que consiste en estimar el valor de la energía sobre una bola $B_\rho(x_0)$. para x_0 fijado. Es decir se estima primeramente la función

$$E(\rho):=\int_{B_\rho(x_0)}|\nabla\phi(u)|^p dx$$

y se muestra más tarde que bajo hipótesis estructurales bastante generales (por ejemplo sin hipótesis de monotonía sobre c) la función E es tal que $E(\rho)=0\ \forall\rho\in[0,\rho_0)$ para algún $\rho_0>0$. Tal método se aplica también a problemas parabólicos de formulación general como la de (2). Recientemente F. Bernis a desarrollado en |14| otro método de energíasimilar para probar la existencia de Λ en el caso de ecuaciones de orden superior a dos tales como (24).

Señalemos también que existen algunas otras demostraciones de criterior de existencia de Λ que sin llegar a poser ser considerados como métodos tienen sin embargo una aplicabilidad bastante general. Entre otras, se puede citar: la interpretación estocástica de las ecuaciones (|12|) y la formulación abstracta del Problema de Cauchy para operadores multívocos en espacios de Banach (|32|).

5. UN PROBLEMA ABIERTO.

En esta extensa visión panorámica el lector habrá podido echar de menos la consideración de ecuaciones hiperbólicas no lineales de segundo orden

Tal omisión no es fortuita y obedece a muy diversas causas. En primer lugar la existencia de Λ no es allí ninguna noticia nueva dada las propiedades típicas de las ecuaciones hiperbólicas, aunque algunas veces su demostración pueda ser lejana a ser considerada como trivial. (Véase por ejemplo la demostración en |28| para una amplia clase de ecuaciones conteniendo

$$u_{tt} - \sigma(u_x)_x + c(u) = 0, \ \sigma' \geq 0 \ , \quad c' \geq 0 \ ).$$

Sin embargo una cuestión de aparente fácil formulación parece aún sin respuesta general hasta al momento. Se trata del estudio del problema hiperbólico

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \mathrm{sign}(u_t) = 0 & \text{en} \quad (0,\infty) \times \Omega \\ u = 0 & \text{en} \quad (0,\infty) \times \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{en} \quad \Omega \\ u_t(0,x) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

siendo Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ y $\mathrm{sign}(h) = -1$ si $h < 0$, $\mathrm{sigh}(h) = 1$ si $h > 0$ y $\mathrm{sign}(0) = [-1,1]$. (En realidad la ecuación debe ser entendida en sentido multívoco sustituyendo el símbolo = por el de $\ni$). Tal ecuación corresponde a la vibración de una membrana en un medio con fuerte rozamiento.

Desde el punto de vista experimental parece natural que tal membrana se pare en tiempo finito. Es decir, $T_0 > 0$ tal que $u(t,x) = \zeta(x)$ $\forall t \geq T_0$ siendo ζ un punto crítico de la ecuación, es decir verificando que $\zeta = 0$ en $\partial\Omega$ y $-\Delta\zeta(x) \in [-1,1]$ para $x \in \Omega$. De esta manera se originaría una frontera libre $\Lambda = \partial\{(t,x): u_t(t,x) \neq 0\}$ desconocida "a priori". Por el momento sólo son conocidos resultados parciales relativos al caso de $N = 1$ y u_0, u_1 datos iniciales de peculiar configuración (|24|), echándose en falta algún método general que permita incluso abordar otros problemas hiperbólicos similares. Incluso para el caso de ciertas ecuaciones ordinarias de segundo orden modulando la ley de rozamiento de Coulomb se carece por el momento de un tratamiento general del comportamiento asintótico de la solución. Tal tema es en la actualidad objeto de la atención de varios autores.

6. REFERENCIAS.

|1| H.W. ALT, D. PHILLIPS: A free boundary problem for semilinear elliptic equations. (aparecerá).

|2| S.N. ANTONCEV: On the localization of solutions of nonlinear degenerate elliptic and parabolic equations, Soviet Math. Dokl, 24, 420-424 (1981).

|3| R. ARIS: The mathematical theory of diffusion and reaction impermeable catalysts. Clarendon Press, Oxford (1975).

|4| D.G. ARONSON: Regularity properties of flows through porous media, SIAM Appl. Math. 17, 461-467 (1969).

|5| D.G. ARONSON: Regularity properties of flows through porous media: the interface, Arch. Rat. Mech. Anal. 37, 1-10 (1970).

|6| D.G. ARONSON, Some properties of the interface for gas flow is porous media. En Free Boundary Problems: Theory and Applications. Pitman (1983).

|7| A. BAMBERGER: Etude d'une équation doublement non linéaire, J. Funct. Anal. 24, 148-155 (1977).

|8| C. BANDLE, R.P. SPERB, I. STAKGOLD: The Single steady state irreversible reaction. (Aparecerá en Nonlinear Analysis T. M. and A.).

|9| C. BANDLE, I. STAKGOLD: The formation of the dead core in parabolic reaction-diffusion problems. (Aparecerá).

|10| J. BEAR, Dynamics of fluids in porous media. American Elsevier, New York (1971).

|11| Ph. BENILAN, H. BREZIS, M.G. CRANDALL: A semilinar equation in $L^1(R^N)$, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 2, 523-555 (1975).

|12| A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS: On the support of the solution of some variational inequalities of evolution. J. Math. Soc. Japan, 28, 1-17, (1976).

|13| M.F. BIDAUT-VERON: Propriété de support compact de la solution d'une équation aux derivées partielles non lineaires d'ordre 4. C.R. Acad. Sci. Paris, 287 1005-1008 (1975).

|14| F. BERNIS: Compactness of the support for some nonlinear elliptic problems of arbitrary order in dimension N. Aparecerá en Comm. in Partial Differential Equations.

|15| M. BERTSCH, L.A. PELETIER: Porous media type equations: an overview. (Aparecerá).

|16| M. BERTSCH, L.A. PELETIER: A positivity property of solutions of nonlinear diffusion equations. (Aparecerá en J. Diff. Equations).

|17| M. BERTSCH, R. KERSNER, L.A. PELETIER: Sur le comportement de la frontiere libre dans une equation en theorie de la filtration. C.R. Acad. Sc. Paris 295, 63-66 (1982).

|18| M. BERTSCH, R. KERSNER, L.A. PELETIER: Positivity versus localization in degenerate diffusion equations. (Aparecerá).

|19| M. BERTSCH, P. de MOTTONI, L.A.PELETIER: Degenerate diffusion and the Stefan Problem. (Aparecerá).

|20| J.G. BERRYMAN, C.J. HOLLAND, Stability of the separable solution for fast diffusion, Arch. Rat. Mech. Anal. 74, 279-288 (1980).

|21| C.M. BRAUNER, B. NIKOLAENKO: On nonlinear eigenvalue problems which extend into free boundaries problems. En Bifurcaciion and Nonlinear Eigenvalue problems. Ed. C. Bardos, J.M. Lasry, M. Sachtzman. Lect. Notes nº 782. Springer (1980).

|22| H. BREZIS: Solutions of variational inequalities wich compact support. Uspekhi Math. Nauk. 129, 103-108 (1974).

|23| H. BREZIS, A. FRIEDMAN: Estimates on the support of solutions of parabolic variational inequalities, Illinois, J. Math. 20, 82-97 (1976).

|24| H. CABANNES: Mouvement d'une corde vibrante soumise a un frottement solide. C.R. Acad. Sc. Paris 287, 671-673 (1978).

|25| J. CARRILLO, M. CHIPOT: On the dam problem. J. Diff. Equations. (1982).

|26| E.D. CONWAY: The formation and decay of schocks for a conservation law in several dimensions. Arch. Rat. Mech. and An. 47-59.

|27| R. COURANT, K.O. FRIEDRICHS: Supersonic flow and shock waves. New York Interscience Publishers. Inc. 1948.

|28| C. DAFERMOS, J.A. NOHEL: A nonlinear hyperbolic Volterra equations in viscoelasticity. Amer. J. Math. Supplement, 87-116. (1981).

|29| G. DIAZ: Estimation de l'emsemble de coincidence de la solution des problemes d'obstacle pour les equations de Hamilton-Jacobi-Bellman. C.R. Acad. Sc. Paris, 290, 587-591 (1980).

|30| G. DIAZ, J.I. DIAZ: Finite extinction time for a class of nonlinear parabolic equations, Comm. in Part. Diff. Equations 4, 1213-1231 (1979).

|31| J.I. DIAZ: Solutions with compact support for some degenerate parabolic problems, Nonlinear Analysis T.M. and A., 3, 831-847, (1979).

|32| J.I. DIAZ: Anulación de soluciones para operadores acretivos en espacios de Banach. Rev. Real Academia de Ciencias. Madrid, 74, 865-880 (1980).

|33| J.I. DIAZ: Técnica de supersoluciones locales para problemas estacionarios no lineales. Memoria n° XVI. Real Academia de Ciencias, Madrid (1982).

|34| J.I. DIAZ: Nonlinear Partial Differential Equations and free boundaries. Libro en preparación (Aparecerá en Pitman Publish. Co. Londres).

|35| J.I. DIAZ, J. HERNANDEZ: On the existence of a free boundary for a class of reaction-diffusion systems. Aparecerá en SIAM Math. Analysis.

|36| J.I. DIAZ, J. HERNANDEZ: Some results on the existence of free boundaries for aparabolic reaction-diffusion systems, Proc. 5th. Conference on trends in th. and pract. of Nonlinear Differential Equations. Arlington. Texas (1982).

|37| J.I. DIAZ, M.A. HERRERO: Estimates on the support of the solutions of some nonlinear elliptic and parabolic problems, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 89 A, 249-258 (1981).

|38| J.I. DIAZ, R. JIMENEZ: Boundary behaviour of solutions of Signorini type problems". En preparación.

|39| J.I. DIAZ, R. KERSNER: Non existence d'une des frontieres libres dans une equation degénérée en théorie de la filtration. C.R. Acad. Sc. Paris, 296, 505-508 (1983).

|40| J.I. DIAZ, L. VERON: Existence theory and qualitative properties of the solutions of some first order quasilinear variational inequalities. Indiana Univ. Journal 32, 319-361. (1983).

|41| J.I. DIAZ, L. VERON: Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations. Aparecerá.

|42| L.C. EVANS, B. KNERR: Instantaneous shrinking of the support of non-negative solutions to certain nonlinear parabolic equations and variational inequalities. Illinois J. Math, 23, 153-166 (1979).

|43| C. FRANCSIS: On the porous medium equation with lower order singular nonlinear terms (Aparecerã).

|44| A. FRIEDMAN: Boundary behaviour of solutions of variational inequalities for elliptic operators, Arch. Rational Mech. and Analysis, 27, 95-107 (1967).

|45| A. FRIEDMAN. Variational Principles and free-boundary Problems. John-Wiley and Sons. (1982).

|46| A. FRIEDMAN, P. PHILLIPS: The free boundary os a semilinear elliptic equations. (Aparecerã).

|47| V.A. GALAKTIONOV: A boundary value problem for the nonlinear parabolic equation $u_t = \Delta u^{\sigma+1} + u^{\beta}$. Diff. Equ. 17, 551-555 (1981).

|48| B.H. GILDING: Properties of solutions of an Equation in the theory of filtration. Arch. Rational Mech. Anal. 65, 203-225 (1977).

|49| B.H. GILDING: A nonlinear Degenerate Parabolic Equations. Anna. Scuola Norm. Sup. Pisa 4, 393-432 (1977).

|50| M.E. GURTIN, A.C. PIPKIN: A general theory of heat conduction with finite wave speeds. Arch. Rational. Mech. Anal. 31, 113-126 (1968).

|51| M.A. HERRERO, J.L. VAZQUEZ: Asymptotic behaviour of solutions of a strongly nonlinear parabolic problem, Ann. Fac. Sc. Toulouse, 3, 113-127 (1981).

|52| M.A. HERRERO, J.L. VAZQUEZ: On the propagation properties of a nonlinear degenerate parabolic equation. Comm. Part. Diff., Equat., 7, 1381-1402 (1982).

|53| A.S. KALASHNIKOV: The propagation of disturbances in problems of nonlinear heat conduction with absorption. Zh. Vychils. Math. Fiz. 14, 891-905 (1974).

|54| A.S. KALASHNIKOV: On the character of the propagation of perturbations in processes described by quasilinear degenerate parabolic equations. Trud. Sem. I.G. Petrovski, 135-144 (1975). (En ruso).

|55| A.S. KALASHNIKOV: On a nonlinear equation appearing in the theory of non-stationary filtration. Trud. Sem. I.G. Petrovski. 4, 137-146. (1978).

|56| A.S. KALASHNIKOV: The concept of a finite rate of propagation of a perturbation. Russian Math. Surveys, 34, 235-236 (1979).

|57| S. KAMIN, Ph. ROSENAU: Thermal waves in an absorbing and convecting medium. Aparecerá.

|58| R. KERSNER: The behaviour of temperature fronts in media with nonlinear thermal conductivity under absorption. Vest. Mosk. Univ. Mat. 33, 44-51 (1978).

|59| R. KERSNER: Degenerate parabolic equations with general nonlinearities. Nonlinear Analysis T.M. and A. 4, 1043-1061 (1980).

|60| R. KERSNER: Filtration with absorption: necessary and sufficient condition for the propagation of perturbations to have finite velocity. J. Math. Anal. Appl. (1983).

|61| B. KNERR: The porous medium equation in one dimension. Trans, Amer. Math. Soc. 234, 381-415 (1977).

|62| B. KNERR: The behaviour of the support of solutions of the equation of nonlinear heat donduction with absorption in one dimension, Trans. Amer. Math. Soc. 249, 409-424 (1979).

|63| S.N. KRUZKOV: First order quasilinear equations in several independent variables. Math. USSR-Sb. 10, 217-243 (1970).

|64| P.D. LAX: Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. C.B.M.S. Regional Conferences Series in Applied Math. 11. SIAM. Philadelphia (1973).

|65| T. NAGAI, M. MIMURA: Asymptotic behaviour of a nonlinear degenerate diffusion equation in a population dynamics. SIAM J. Appl. Math. 43 449-469 (1983).

|66| O.A. OLEINIK, A.S. KALASHNIKOV, C. YUILIN: The Cauchy problem and boundary problems for equations of the type of nonstationary filtration. Izv. Akad. Nauk. SSSR. Math. 22, 667-704 (1958).

|67| L.A. PELETIER: A necessary and sufficient condition for the existence of an interface in flows through porous media. Arch. Rat. Mech. Anal., 56, 183-190 (1974).

|68| R. REDHEFFER: On a nonlinear functional of Berkovitz and Pollard. Arch. Rational Mech. Anal, 50, 1-9, (1973).

|69| E.S. SABININA: A class of nonlinear degenerating parabolic equations. Soviet Math. Dokl. 3, 495-498 (1962).

|70| J.L. VAZQUEZ: Asymptotic behaviour and propagation properties of the one-dimensional flow of a gas in a porous medium. Trans. Amer. Math. Soc. (1983).

|71| J.L. VAZQUEZ: Behaviour of the velocity of one-dimensional flows in porous media (Aparecerá).

|72| J.L. VAZQUEZ: The interfaces of one-dimensional flows in porous media. (Aparecerá).

|73| J.L. VAZQUEZ: Aparecerá

|74| L. VERON: Effects regularisants de semi-groupes non lineaires dans les espaces de Banach. Ann. Fac. Sc. Toulouse 1, 171-200 (1979).

|75| L. VERON: Equations d'evolution semi-lineaires du second ordre dans L^1. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 27, 95-123 (1982).

|76| Y.B. ZELDOVICH, Y.P. RAIZER: Physics of shock waves and high-temperature Hydrodynamic Phenomena. Academic Press. New York. (1969).