APLICACION DE LA TEORIA NO LINEAL DE SEMIGRUPOS A UN OPERADOR PSEUDODIFERENCIAL

J. Ildefonso Díaz (Madrid)(*)   Raúl F. Jiménez (Chile)(**)

1. Introducción y motivaciones físicas.

Friedman-Shinbrot [4] y posteriormente Perriot [7] han estudiado problemas de formulación matemática del tipo "ondas de agua":

$$(P.1)\quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } Q = \Omega \times (0,T),\ T>0 \\ u_{tt} + u_\nu + \beta(u) = g & \text{sobre } \Sigma = \Gamma \times (0,T) \\ u(0,x) = u_0(x);\quad u_t(0,x) = u_1(x) & x \in \Gamma, \end{cases}$$

siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio de frontera Γ regular, ν el vector normal exterior y β una función real continua y no decreciente. Obsérvese que la ecuación en Q no contiene derivación respecto de t.

<u>Formulación equivalente de (P.1) sobre</u> Γ: En una primera aproximación formal, definamos el operador pseudodiferencial (cf |8|)

$$A : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma), \quad (w \longmapsto Aw = \frac{\partial v}{\partial \nu})$$

siendo v la solución única de $\Delta v = 0$ en Ω, $v = w$ sobre Γ.

Restringiendo A sobre $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ y definiendo $A_2 u = Au$ y con dominio $D(A_2) = \{u \in H^{1/2}(\Gamma) : Au \in L^2(\Gamma)\}$, es claro que (P.1) puede formularse equivalentemente en la siguiente manera:

$$(P.2)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + A_2 u + \beta(u) = g & \text{en } L^2(\Gamma), \text{ para } t > 0, \\ u(0) = u_0;\quad u'(0) = u_1, & \text{en } L^2(\Gamma), \end{cases}$$

<u>Otros problemas donde aparece el operador</u> A:

Problemas de contorno de tipo mixto:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(u) = g & \text{sobre } \Gamma \end{array}\right\} \Longleftrightarrow Au + \beta(u) = g \quad \text{en } H^{1/2}(\Gamma)$$

En particular el problema de Signorini corresponde a β de la forma: $\beta(r) = 0$ si $r > 0$, $\beta(0) = [0, -\infty)$ $\beta(r) = \emptyset$ si $r < 0$ ([3]).

En este contexto el operador A fue ya introducido por Egorov y Kondrakcher (1966-67) en el estudio del problema de la derivada oblicua (cf. [8], [9]).

Problemas de evolución de primer orden.

$$\frac{du}{dt} + \beta(A(u)) = 0 \qquad , \quad \text{Brezis [1]}$$
$$\frac{du}{dt} + Au + \beta(u) = 0 \qquad , \quad \text{(cf. [6],[4],[7])}$$

Problemas de contorno y prolongación de operadores. Lions-Magenes [5].

Es claro que con el propósito de atacar (P.1) ó (P.2) o cualesquiera de los otros problemas es necesario estudiar A_2. Formalmente A_2 es un operador **lineal**, positivo y autoadjunto, por lo que gracias a los resultados abstractos de Brezis [2], aparece como la subdiferencial de un cierto funcional convexo s.c.i. propio.

El fin del presente trabajo es demostrar rigurosamente que A_2 es maximal monóntono (m.m) en $L^2(\Gamma)$ y de hecho la subdiferencial de un cierto funcional convexo s.c.i. propio. Nuestros resultados serán aún más fuertes toda vez que serán obtenidos para el operador A_2 asociado al **problema cuasilíneal**:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = 0 & \text{en } Q \\ \dfrac{d^2u}{dt^2} + A_2 u + \beta(u) \ni g & \text{sobre } \Sigma, \end{cases}$$

siendo Δ_p el **pseudolaplaciano** definido por

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\sum_{j=1}^{N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right), \; p > 1.$$

Nótese que ahora A_2 **ya no es lineal** si $p \neq 2$ ($p = 2 \Rightarrow \Rightarrow \Delta_p \equiv \Delta$) y así la caracterización como subdiferencial es más delicada que en el caso lineal.

La aplicación de estos resultados al estudio del comportamiento asintótico y propiedades de propagación para los problemas de evolución será objeto de un trabajo posterior.

2. Resultados principales.

2.1. Formulación del problema: Consideremos el operador no lineal

$$\Delta_p : W^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega), \ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \quad p>1,$$

y sea β un grafo m.m. de $\mathbb{R}^2$ con $0 \in \beta(0)$.

$$(P) \quad \begin{cases} \text{"Dados } g \in L^{p'}(0,T; W^{-1/p',p'}(\Gamma)), \ w_0 \in L^2(\Gamma), \ w_0(x) \in \overline{D(\beta)} \\ w_1 \in L^2(\Gamma), \ \text{hallar } w(t,x) \text{ verificando:} \\ \Delta_p w = 0 \ \text{ en } Q \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + |\nabla w|^{p-2}\, \nabla w \cdot \vec{\nu} + \beta(w) \ni g \ \text{ sobre } \Sigma \\ w(0,x) = w_0(x); \ \ w_t(0,x) = w_1(x), \ \ x \in \Gamma \\ \text{siendo } \vec{\nu} = \cos(\nu, x_i)\text{".}_{\#} \end{cases}$$

2.2. Definición justificada de los operadores A y A_2: Queremos definir

$$A(w|_\Gamma) = |\nabla w|^{p-2}\, \nabla w \,.\, \vec{\nu} \quad \text{sobre } \Gamma$$

con $w(t) \in W^{1,p}(\Omega)$ (t = parámetro) satisfaciendo $\Delta_p w = 0$ en Ω. Para ello debemos empezar por la siguiente

Definición: Dada $g \in W^{1/p',p}(\Gamma)$ (e.d. trazas de $W^{1,p}(\Omega)$), se define el **p-levantamiento canónico** de g como la única solución G de $-\Delta_p G = 0$ en Ω; $G = g$ sobre Γ.

Ahora pasamos a definir A según la regularidad de g.

1° **caso:** Si g es regular entonces G es regular (por ej. $G \in C^2(\bar{\Omega})$). Luego podemos definir (en todo punto de Γ)

$$Ag = |\nabla G|^{p-2}\, \nabla G \cdot \vec{\nu}_{\#}$$

Motivemos la definición para el caso g **más débil.** Por el Teorema de la Divergencia,

$$0 = \int_\Omega -\Delta_p G\, H dx = \int_\Omega |\nabla G|^{p-2}\, \nabla G \cdot \nabla H dx - \int_\Gamma (|\nabla G|^{p-2}\, \nabla G \cdot \vec{\nu}) H d\Gamma, \ \forall H \in C^2(\Omega)$$

es decir, $\displaystyle\int_\Gamma (|\nabla G|^{p-2}\, \nabla G \cdot \vec{\nu}) H = \int_\Omega |\nabla G|^{p-2} \nabla G \cdot \nabla H.$

2° **Caso.** Sea $g \in W^{1/p',p}(\Gamma)$. Definimos $Ag \in W^{-1/p',p'}(\Gamma) = (W^{1/p',p}(\Gamma))'$ por $<Ag,h>_\Gamma = \int_\Omega |\nabla G|^{p-2} \nabla G \cdot \nabla H$, si $h \in W^{1/p',p}(\Gamma)$, siendo H un levantamiento **cualquiera** de h, es decir, $H \in W^{1,p}(\Omega)$ y $H|_\Gamma = h$.#

No es difícil verificar que la definición es correcta, e.d., i) no depende del levantamiento H de h y ii) la aplicación $h \longmapsto \int |\nabla G|^{p-2}\nabla G \cdot \nabla H$ es lineal y continua en $W^{1/p',p}(\Gamma)$.

Lema (Lions |5|). "El operador no lineal $A: W^{1/p',p}(\Gamma) \to W^{-1/p',p'}(\Gamma)$ es hemicontinuo, maximal monótono, acotado y semicoercivo en el sentido que $\forall\lambda > 0$, $\exists\alpha > 0$ tal que:

$$<Ag,g>_\Gamma + \lambda|g|^p_{L^2(\Gamma)} \geq \alpha \|g\|^p_{W^{1/p',p}(\Gamma)}$$

para toda g: $g \in W^{1/p',p}(\Gamma)$ si $p \geq \frac{2N}{N+1}$

$g \in W^{1/p',p}(\Gamma) \cap L^2(\Gamma)$ si $1 < p < \frac{2N}{N+1}$".

Nota: Recordamos que $W^{1/p',p}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$ sí y sólo si $p \geq \frac{2N}{N+1}$ y así por las desigualdades de Sobolev y Teoremas de trazas se tiene:

$$W^{1/p',p}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma) \subset W^{-1/p',p'}(\Gamma), \quad p \geq \frac{2N}{N+1}$$

con inyección continua e imagen densa (cf. |5|, cap. 2.§4).#

Para aplicar la Teoría de Semigrupos necesitaremos un operador de un espacio de Banach X en sí mismo. Esta es la razón de introducir el operador A_2 restringiendo A sobre $L^2(\Gamma) = X$ y con dominio

$$D(A_2) = \{g \in W^{1/p',p}(\Gamma) \cap L^2(\Gamma) : Ag \in L^2(\Gamma)\}$$

Del Lema anterior y de los resultados de Brezis |1| resulta que A_2 es m.m., sin embargo nuestros resultados afinan un poco más:

Teorema (Resultado Principal). A) $A_2u = \partial\Psi(u)$, siendo $\Psi : L^2(\Gamma) \to [0,+\infty]$ el funcional convexo s.c.i. propio definido por:

$$\Psi(u) = \begin{cases} \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla U|^p dx, & \text{si } u \in L^2(\Gamma) \cap W^{1/p',p}(\Gamma) \\ +\infty & \text{, en otro caso} \end{cases}$$

con U el p-levantamiento canónico de u. Además A_2 es T-monótono.

B) Dado β un grafo m.m. de $\mathbb{R}^2$ con $0 \in \beta(0)$, $\beta = \partial j$, entonces $A_2 u + \beta(u)$ es m.m., con

$$\overline{D(A_2+\beta)}^{L^2(\Gamma)} = \{u \in L^2(\Gamma) : u(x) \in \overline{D(\beta)} \text{ c.t.p. } x \in \Gamma\}$$

Además $A_2 u + \beta(u) = \partial\tilde{\Psi}(u)$, siendo $\tilde{\Psi} : L^2(\Gamma) \to]-\infty,+\infty]$ el funcional convexo s.c.i. propio definido por:

$$\tilde{\Psi}(u) = \begin{cases} \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla U|^p dx + \int_\Gamma j(u)d\Gamma, & \text{si } u \in L^2(\Gamma) \cap W^{1/p',p}(\Gamma) \text{ y } \\ & j(u(x)) \in L^1(\Gamma) \\ +\infty & \text{, si no.} \end{cases}$$ #

Idea de la demostración. A) Primero se muestra que A_2 es m.m en $L^2(\Gamma)$ y luego se prueba que $A_2 \subset \partial\Psi$. Dado $u_0 \in D(A_2) \cap D(\Psi)$, ponemos $z = A_2 u_0$. Debemos probar que $z \in \partial\Psi(z_0)$, es decir, $(z,u-u_0) \leq \Psi(u)-\Psi(u_0)$ $\forall u \in D(\Psi)$. Resulta

$$(z,u-u_0) = (A_2 u_0, u-u_0) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla U_0|^{p-2} \nabla U_0 \; \nabla(U-U_0)dx$$

siendo U, $U_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ los p-levantamientos canónicos de u y u_0 respectivamente. Luego bastará probar que

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla U_0|^{p-2}\nabla U_0 \; \nabla(U-U_0)dx \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla U|^p dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla U_0|^p dx,$$

lo que resulta del hecho que la función $F: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\xi \longrightarrow |\xi|^p$, $p > 1$ es $F \in C^1(\mathbb{R})$, convexa y diferenciable Gateaux.

B) Se comprueba la hipótesis de perturbación:

$$\phi((I+\lambda A_2)^{-1} z) \leq \phi(z) \quad \forall z \in L^2(\Gamma),$$

con $\phi: L^2(\Gamma) \to]-\infty, +\infty]$ definido por $\phi(u) = \int_\Gamma j(u(x))d\Gamma$ si $j(u) \in L^1(\Gamma)$ y $+\infty$ en otro caso. Luego se aplican resultados abstractos de Brezis |2|. #

Volvamos al problema de evolución (P). Gracias a la Teoría de Semigrupos, un resultado particular es el siguiente:

Corolario. Dados $u_0 \in \overline{D(A_2+\beta)}$, $u_1 \in L^2(\Gamma)$, $g \in L^1(0,T; L^2(\Gamma))$, existe una única solución débil de (P):

$$u \in C^1([0,T]; L^2(\Gamma))$$ #

Este resultado mejora otro de Lions [6], quién elige β como potencia y para el que u_0, u_1 y g son supuestos más regulares.

Nota. Otras aplicaciones de la Teoría de Semigrupos no lineales a problemas de evolución de primer orden también son posibles. #

Nota. Se podía haber trabajado en $L^s(\Gamma)$ con $s \neq 2$ dado que se puede mostrar que $\mathring{A}_2 + \beta$ es m-T-acretivo en $L^s(\Gamma)$ $\forall 1 \leq s \leq +\infty$. #

REFERENCIAS.

[1] H. Brezis: "Problems Unilatéraux". J. Math. Pures et Appliques, 51 1972, p. 1-168.

[2] H. Brezis: Operateurs Maximaux Monotones. North-Holland, Mathematics Studies, 1973.

[3] J.I. Díaz-R.F. Jiménez: "Comportamiento en el contorno de la solución del Problema de Signorini". Actas VI C.E.D.Y.A., Jaca, 1983. p. 308-313.

[4] A. Friedman-M. Shinbrot: "The Initial Value Problem for the Linearized Equations of Water Waves", J. Math. and Mechanics, 17 nº 2, 1967 p. 107-180.

[5] J.-L. Lions - E. Magenes: Problemes aux limites non homogenes et applications. Vol. II. Dunod, 1968.

[6] J.-L. Lions: Quelques Méthodes de resolution des problemes aux limites non linéaires. Dunod. 1969.

[7] A. Perriot: "Resolution d'equations modelisant de movement d'un fluid dans un container". Tesis. Besancon, 1982.

[8] M. Taylor: Pseudodifferential Operators. Princeton. Univ. Pres, 81.

[9] F. Treves: "Operadores Pseudodiferenciales". Dpto. Ec. Funcionales Univ. Complutense de Madrid. 1972-1973.

(*) Dpto. de Ecuaciones Funcionales
Facultad de Matemáticas
Univ. Complutense de Madrid.

(**) Dpto. de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Univ. de Concepción
(Chile)