SOBRE UN CRITERIO DE COMPARACION EN MASA PARA LA ECUACION DE LOS MEDIOS POROSOS CON CONVECCION.

L. ALVAREZ y J.I. DIAZ(*)
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid
28040-Madrid

ABSTRACT: We study the qualitative behaviour of the fronts(or interfaces) generated by the solutions of the equation $u_t=(u^m)_{xx}+b(u^\lambda)_x$, where $m,\lambda>0$ and b is a real number, $b>0$. We prove a "mass comparison lema" that allows us to give necessary and sufficient conditions in order to have a positive waiting time in the free boundaries.

CLASIFICACION AMS : 35K55, 35B99

INTRODUCCION: En este trabajo se estudia el problema

$$(1)\quad \begin{cases} u_t=(u^m)_{xx}+b(u^\lambda)_x & \text{en } R\times R^+ \\ u(x,0)=u_0(x) & \text{en } R \end{cases}$$

donde $m,\lambda,b>0$ y u_0 es una función continua no negativa y de soporte compacto.

Esta ecuación aparece como modelo en diferentes fenómenos físicos: infiltración de un fluído en un medio poroso (Bear |2|, Phillip |6|); deslizamiento sobre un plano inclinado de una película viscosa (Buckmaster |3|); procesos de difusión térmica (Rosenau y Kamin |7|) etc.

La existencia, unicidad y regularidad de soluciones débiles del problema (1) fue dado en Díaz-Kersner |4| para $m\geq 1,\lambda>0$ y posteriormente extendido en Gilding |5| a cualquier $m>0$.

Es bien conocido que, bajo un adecuado balance entre el término de difusión y de convección, la solución u del problema (1) puede dar lugar a alguna interface (o frontera libre) que separa la región donde $u=0$ de donde $u>0$. Mas precisamente, esas interfases están definidas por

$$(2)\quad \begin{aligned} \zeta_-(t)&=\inf\{x:u(x,t)>0\} \\ \zeta_+(t)&=\sup\{x:u(x,t)>0\} \end{aligned}$$

De forma similar al caso de no convección $(b=0,m>1)$, la interfase puede permanecer estacionaria hasta un cierto tiempo llamado <u>tiempo</u>

(*) Proyecto 3308/83 de la CAICYT.

de espera (waiting time). Ello depende esencialmente de la suavidad con que llegue u_0 al borde de su soporte. Concretamente, si $b\equiv 0$ y $m>1$, J.L.Vázquez |8| demostró que ζ_+ tiene tiempo de espera si solo

$$(3) \qquad \limsup_{x\to\zeta_+(0)} \int_x^\infty u_0 dx \, |x-\zeta_+(0)|^{\frac{m+1}{m-1}} < +\infty$$

y análogamente para ζ_- (dado que si $b\equiv 0$ el problema es simétrico). Al introducir el término de convección ($b>0$), aparece una asimetría, y es necesario un estudio separado de ζ_- y ζ_+ para lo que conviene establecer una partición en cuatro regiones del espacio de parámetros (m,λ) en cada una de las cuales el comportamiento de las interfaces es distinto. Nosotros centraremos nuestra atención en la región donde hay mayor similitud con el caso de no convección, esto es el caso $m>1$, $2\lambda > 1-$. Un estudio detallado de todas las regiones fue realizado por los autores de este trabajo en colaboración con R. Kersner |1|. El propósito principal de esta comunicación es generalizar las estimaciones de crecimiento puntuales que alli se dan, por estimaciones en masa del tipo (3). Con este fin demostraremos en primer lugar un criterio de "comparación en masa" para la ecuación (1)

LEMMA 1 (Comparación en masa). Sean $u,\bar{u}$ soluciones de la ecuación (1) para m,λ fijos, $b\leq\bar{b}$, y datos iniciales u_0, $\bar{u}_0 \in L^1(\mathbb{R})$, u_0, $\bar{u}_0 \geq 0$ tales que

$$(4) \qquad \int_{-\infty}^x u_0(s)ds \leq \int_{-\infty}^x \bar{u}_0(s)ds \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Entonces para todo $t>0$ se tiene que

$$(5) \qquad \int_{-\infty}^x u(s,t)ds \leq \int_{-\infty}^x \bar{u}(s,t)ds \qquad x\in\mathbb{R}.$$

DEMOSTRACION: Supondremos que la solución es clásica, (en otro caso se aproxima por soluciones clásicas). Es fácil comprobar que las funciones

$$(6) \qquad w(x,t)=e^{-\varepsilon t}\int_{-\infty}^x u(s,t)ds \; ; \; \bar{w}(x,t)=e^{-\varepsilon t}\int_{-\infty}^x \bar{u}(s,t)ds, \text{ para } \varepsilon>0,$$

verifican

$$(7) \qquad \varepsilon e^{\varepsilon t}(w-\bar{w})=e^{\varepsilon m t}(w_x^m - \bar{w}_x^m)_x + e^{\varepsilon\lambda t}(b(w_x)^\lambda - \bar{b}(\bar{w}_x)^\lambda) - e^{\varepsilon t}(w-\bar{w})_t$$

supongamos que en algún punto (x_0,t_0) $w(x_0,t_0)-\bar{w}(x_0,t_0) > 0$. Si consideramos el conjunto $(-\infty,\infty)\times[0,t_0]$ entonces por (4) y el principio de conservación de la masa se tiene que $\lim_{x\to\pm\infty} w(x,t)-\bar{w}(x,t)\leq 0$. Así, $w-\bar{w}$ alcanza su máximo positivo en algún punto (x_1,t_1) con $t_1>0$, de donde se tendrá que

$$(8)\qquad \begin{cases} w_x(x_1,t_1) = \overline{w}_x(x_1,t_1) \\ (w_x^m - \overline{w}_x^m)_x\ (x_1,t_1) \leq 0 \\ (w-\overline{w})_t\ (x_1,t_1) \geq 0 \end{cases}$$

Lo cual contradice (7) puesto que los dos miembros de la igualdad tienen distinto signo. ∎

NOTA 1: El Lema sigue siendo válido si la condición (4) se verifica sólo a partir de un cierto $a \in \mathbb{R}$ y se supone además la hipótesis de que $u(a,t) \leq \overline{u}(a,t)$ $\forall t \in [0,T]$. Dicha observación permite comparar localmente las soluciones.

COROLARIO 1: Sea u la solución del problema (1) y $\overline{u}$ la solución de la ecuación de los medios porosos $(b\equiv 0)$, para el mismo dato inicial u_0. Entonces si $\zeta_\pm(t)$ y $\overline{\zeta}_\pm(t)$ representan las interfases respectivas se tiene que

$$(9)\qquad \zeta_-(t) \leq \overline{\zeta}_-(t)$$

$$(10)\qquad \zeta_+(t) \geq \overline{\zeta}_+(t) \quad \forall t\geq 0 .$$

DEMOSTRACION: Como $b>0$, del Teorema 1 se tiene que

$$(11)\qquad \int_{-\infty}^{x} \overline{u}(s,t)dt \leq \int_{-\infty}^{x} u(s,t)dt .$$

Si elegimos $x = \zeta_-(t)$ concluímos (9) y para $x = \overline{\zeta}_+(t)$ concluímos (10) teniendo en cuenta la conservación de la masa. ∎

Este corolario indica que efectivamente el término de convección representa un transporte de la solución respecto de la ecuación de los medios porosos.

COROLARIO 2: Sean $u,\overline{u}$ soluciones de la ecuación (1) para m,λ fijos $b\geq\overline{b}$ y datos iniciales $u_0,\overline{u}_0$ tales que:

$$(12)\qquad \int_x^{\infty} u_0(s) \leq \int_x^{\infty} \overline{u}_0(s)ds \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

entonces se verifica

$$(13)\qquad \int_x^{\infty} u(s,t)dt \leq \int_x^{\infty} \overline{u}(s,t)dt \qquad \forall t>0 .$$

DEMOSTRACION: Aplicamos el lema 1 a la función $v(x,t)=u(-x,t)$ que verifica $v_t = (v^m)_{xx} - b(v^\lambda)_x$ dado que

$$(14)\qquad \int_x^{\infty} u(s,t)dt = \int_{-\infty}^{-x} u(-s,t)dt . \ ∎$$

A continuación y mediante la utilización de este lema haremos un estudio de la existencia de tiempo espera para la ecuación (1). Estudiaremos separadamente $\zeta_-(t)$, $\zeta_+(t)$ ya que el término de convección introduce una asimetría en el problema.

TEOREMA 1: Sean $m>1$, $2\lambda \geq m+1$ y u la solución del problema (1). Entonces

$$\exists t^*>0 \text{ tal que } u(t,\zeta_-(0))=0 \quad \forall t \in [0,t^*] \iff \tag{15}$$

$$\iff \limsup_{x\to\zeta_-(0)} \int_{-\infty}^{x} u_0(s)ds \cdot |x-\zeta_-(0)|^{\frac{m+1}{m-1}} < +\infty$$

DEMOSTRACION: Si el límite superior es infinito por el resultado de J.L. Vázquez |3| y el Corolario 1, concluímos que no existe tiempo de espera. Por otro lado si el límite superior es menor que infinito concluímos que hay tiempo de espera utilizando el lema 1 y comparando la solución con supersoluciones de variable separada del tipo

$$\overline{u}(x,t) = (A(x-\zeta_-(0)))^{\frac{2}{m-1}} \left(\frac{c}{c-t}\right)^{\alpha} \tag{16}$$

con A, c y α constantes positivas adecuadas. ∎

A continuación daremos un resultado para la interfase $\zeta_+(t)$.

TEOREMA 2: Sean $m>1$, $2\lambda \geq m+1$ y u la solución del problema (1). Entonces

$$\begin{cases} \text{"Si } \limsup\limits_{x\to\zeta_+(0)} \displaystyle\int_{x}^{+\infty} u_0(s)ds \cdot |x-\zeta_+(0)|^{\frac{m+1}{m-1}} < \infty \text{ se tiene} \\ \text{que } \exists t^*>0 \text{ tal que } u(\zeta_+(0),t) = 0 \quad \forall t \in [0,t^*]\text{"} \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} \text{"Si } \lim\limits_{x\to\zeta_+(0)} \displaystyle\int_{x}^{+\infty} u_0(s)ds\,|x-\zeta_+(0)|^{\frac{m+1}{m-1}} = +\infty \\ \text{entonces } u(\zeta_+(0),t) > 0 \quad \forall t > 0\text{"} \end{cases} \tag{18}$$

DEMOSTRACION: La conclusión (17) se prueba exáctamente igual que en el Teorema 1. La propiedad (18) se concluye por comparación usando el Lema 1 con una familia de subsoluciones (introducidas por los autores en |1|) del tipo

$$\underline{u}(x,t;K,\overline{x}) = |K^2t-KM_1(1-M_2t)(x-\overline{x})|_+^{\frac{1}{m-1}} \tag{19}$$

con K, M_1 y M_2 adecuadas. ∎

NOTA 2: Es posible completar un estudio análogo para las otras regiones del espacio de parámetros (m,λ), generalizando así las hipótesis puntuales sobre u_0 supuestas en |1| .

REFERENCIAS:

|1| L. Alvarez, J.I. Díaz y R. Kersner: "On the initial growth of the interfaces in nonlinear diffusion-convection processes". Nonlinear difussion equation, Actas de Congreso celebrado en Berkeley (USA) Septiembre 1986. Springer (aparecerá).

|2| J. Bear: Dynamics of Fluids in Porous media. American Elsevier Publishing Company, New York, 1972.

|3| J. Buckmaster: "Viscous sheets advancing over dry beds". J. Fluid. Mech. 81 (1977), 735-756.

|4| J.I. Díaz y R. Kersner: "On a nonlinear degenerate parabolic equation in infiltration or evaporation through a porous medium". J. Differential Equations 69 (1987), 368-403.

|5| B.H. Gilding: "Improved theory for a nonlinear degenerate parabolic equation". Twente University of Technology Deparment of Applied mathematics, Memorandum 587 (1986), 42 p.p.

|6| J.R. Phillip: "Evaporation and moïsture and heat fields in the soil". Journal of meteorology, 14, (1957), 354-366.

|7| P. Rosenau y S. Kamin: "Thermal waves in an absorbing and convective medium". Physica 80 (1983), 273-283.

|8| J.L. Vázquez: "The interface of one-dimensional flows in porous media". Trans. Amer. Math. Soc. 285 (1984), 717-737.