JORNADAS HISPANO-FRANCESAS
SOBRE

CONTROL DE SISTEMAS DISTRIBUIDOS

Octubre 1990

SOBRE LA CONTROLABILIDAD APROXIMADA DE PROBLEMAS NO LINEALES DISIPATIVOS.

por

Jesus Ildefonso DIAZ

Departamento de Matemática Aplicada

Universidad Complutense de Madrid

28040, Madrid.

1. Introducción. El objeto de esta comunicación es el estudio de la controlabilidad de algunos problemas no lineales de tipo disipativo (o parabólico). A diferencia del caso conservativo (ecuación de ondas), ya en el caso lineal es bien conocido (LIONS [7]) que la controlabilidad es solo posible en términos de densidad (controlabilidad aproximada en contraste a contrabilidad exacta). Tal tipo de cuestiones parecen ser de una importancia relevante en el estudio de la irreversibilidad de los cambios para el Sistema Global del Planeta Tierra (LIONS [8]). Nuestro objetivo es poner de manifiesto que a diferencia del caso lineal las respuestas para formulaciones no lineales puede ser de distinto tipo incluso aunque tal formulación sea "bastante concreta". Esta filosofía será ilustrada mediante la consideración del Problema de Obstáculo así como ciertas ecuaciones parabólicas semilineales. Estos resultados han sido presentados en [4].

2. Sobre la controlabilidad aproximada de Inecuaciones Variacionales Parabólicas. Para fijar ideas comenzaremos considerando el problema de la controlabilidad aproximada (por controles sobre el borde) del Problema de Obstáculo

$$
\text{(IV)}\quad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y \geq f, \; y \geq 0 \\ y\left(\dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y - f\right) = 0 \end{array}\right\} \text{ en } Q \\ y(t,x) = v(t,x) \qquad \text{en } \Sigma \\ y\,(0,x) = y_0(x) \qquad \text{en } \Omega, \end{cases}
$$

donde Ω representa un abierto acotado regular de $\mathbb{R}^N$, $N\geq 1$, $T>0$, $Q=(0,T)\times\Omega$ y $\Sigma=(0,T)\times\partial\Omega$. La existencia, unicidad y regularidad de y solución debil de (IV) son bien conocidas bajo distintas hipótesis sobre los datos f, y_0 y sobre los controles v. Para el caso en el que v depende de t basta suponer (ver BARBU [1]) $f\in L^2(Q)$, $y_0\in L^2_+(\Omega)$ con

$$L^2_+(\Omega) = \{w\in L^2(\Omega) : w\geq 0 \text{ c.p.t.p. de } \Omega\}$$

y $v\in X$ con

(1) $$X = \{v\in W_2^{3/4,3/2}(\Sigma) : v\geq 0 \text{ sobre } \Sigma\}$$

para tener una única solución $y\in H^1(0,T:L^2(\Omega))\cap L^2(0,T:H^1(\Omega))$. (Otras elecciones de X son también posibles; ver DIAZ [5]). Nuestro interés se cifra en el <u>conjunto de alcanzabilidad en el instante T</u>.

$$E^{IV}(T:X) = \{y(T,.:v) \mid y \text{ solución de (IV), } v\in X\}$$

En el caso del problema lineal

(L) $$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f & \text{en } Q \\ y=v & \text{en } \Sigma \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

es bien conocido (LIONS [7]) que si $X=L^2(\Sigma)$ entonces el conjunto de alcanzabilidad asociado

$$E^L(T:X) = \{y(T,.:v) \mid y \text{ solución de (L), } v\in X\}$$

es un subespacio afin <u>denso</u> en $L^2(\Omega)$. Se dice entonces que hay <u>Controlabilidad Aproximàda</u> (en $L^2(\Omega)$).

Para el estudio de propiedades similares para el Problema de Obstaculo (IV) algunas precisiones preliminares se hacen necesarias. En primer lugar es claro que $E^{IV}(T:X)\subset L^2_+(\Omega)$. Además, por el principio de comparación (vease p.e. BREZIS [2]), se sabe que $y(t,.:v)\geq y(t,.:0)$ dado que $v\geq 0$. La cuestión que se plantea ahora es la siguiente: ¿Bajo que hipótesis el conjunto $E^{IV}(T:X)$ es denso en $\{y(T,.:0)\}+L^2_+(\Omega)$?.

Veremos que aparece una alternativa: (a) Si f es "poco negativa" la respuesta es afirmativa; (b) Si f es "muy negativa" la respuesta es negativa.

El estudio del primer caso pasa por un refinamiento de los resultados existentes para el caso lineal.

TEOREMA 1. Sean $f\in L^2(Q), y_0\in L^2_+(\Omega)$ *y* $v\in X$ *tal que los problemas* (L) *e* (IV) *admiten una única solución tal que* $y(T,.:v)\in L^2(\Omega)$. *Supongamos que*

(2) X *es denso en* $L^2_+(\Sigma)$.

Entonces se tiene lo siguiente:

(i) $E^L(T:X)$ *es denso en* $\{y(T,.:0)\}+L^2_+(\Omega)$, *con* y *solución de* (L).

(ii) *Sea* y *solución de* (IV) *y sean* f *e* y_0 *tales que la función*

(3) $$z(t,.)=S(t)y_0(.)+\int_0^t S(t-s)f(s,.)ds$$

verifique

(4) $$z(T,.)>0 \quad \text{c.p.t.p. de } \Omega,$$

siendo $S(t)$ *el semigrupo en* $L^2(\Omega)$ *asociado al operador* $Au=\Delta u$, $D(A)=H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. *Entonces* $E^{IV}(T:X)$ *es denso en* $\{y(T,.;0)\}+L^2_+(\Omega)$.

Observación 1. Por el principio fuerte del maximo la hipótesis (4) se verifica si $f\geq 0$ c.p.t.p. de Q. Tal condición es también satisfecha para ciertas funciones f cambiando de signo. Este es el caso, por ejemplo, de cuando de supone $y_0>0$ sobre Ω, $f\geq -\varepsilon$ en Q y T suficientemente pequeño. Una hipótesis algo mas general que (4) puede encontrarse en DIAZ [5].

Idea de la demostración. Para mostrar (i) basta comprobar que el conjunto

$$F \equiv F^L(T:X)=\{y(T,.;v)-y(T,.:0) \mid y \text{ solución de (L)}, \ v\in X\}$$

es denso en $L^2_+(\Omega)$ si se toma, por ejemplo, $X\subset C^\infty(\Sigma)$. Observemos que $F^L(T:X)=\{z(T,.:v) \mid v\in X$ y z satisface $z_t-\Delta z=0$ en Q, $z=v$ en Σ y $z(0,.:v)=0$ en $\Omega\}$. Supongamos, por el contrario, que existe $g\in L^2_+(\Omega)$, $g\equiv 0$ tal que $g\notin\overline{F}$. Por el teorema de la proyección, como F es un cono convexo, existirá una única $u\in\overline{F}$ tal que

(5) $$(g-u,e)\leq 0 \qquad \forall e\in\overline{F}$$

y

(6) $$(g-u,u)=0$$

(vease por ejemplo [7]). Consideremos $q\in C([0,T]:L^2(\Omega))$ solución única del problema

(7) $$\begin{cases} -\dfrac{\partial q}{\partial t} - \Delta q = 0 & \text{en } Q \\ q = 0 & \text{en } \Sigma \\ q(T,x)=g(x)-u(x) & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Una simple integración por partes muestra que (4) y (5) conducen a

$$(8) \qquad 0\geq\int_{\Sigma}(-\frac{\partial q}{\partial n})v \quad \forall v\in X \qquad y \qquad \int_{\Sigma}(-\frac{\partial q}{\partial n})v^0=0$$

siendo $v^0\in X$ (resp. $v^0\in L^2(\Sigma)$) si $u\in F$ (resp. $u\in\overline{F}$) con $u=z(T,.:v^0)$. De (2) y (8) se concluye que $\frac{\partial q}{\partial n}v^0=0$ en Σ. No es difícil mostrar que el resultado queda demostrado si se supone (sin pérdida de generalidad) que $g>0$ en un entorno de $\partial\Omega$. En ese caso existe $\delta>0$ tal que $v^0>0$ en $\Sigma_\delta^T\equiv(T-\delta,T)x\partial\Omega$. Por tanto $\frac{\partial q}{\partial n}=0$ en Σ_δ^T y empleando un resultado bien conocido de Mizhoata (vease LIONS [7]) se concluye que $q\equiv0$ en $[T-\delta,T]x\Omega$ y de aquí la contradicción. Para demostrar (ii) basta observar que por (4) se tiene que $z(t,.)=y(t,.;0)$ con y solución de (IV). Por el principio de comparación $y(t,.:v)\geq z(t,.)>0$ (pues $v\geq0$) y así y es solución también de (L). El resultado es pues una consecuencia de (i). ▫

<u>Observación 2</u>. Resultados de una naturaleza similar son también posibles para el problema de la controlabilidad aproximada por controles en el interior

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t}-\Delta y\geq f+v\chi_\omega \quad , \quad y\geq0 \\ y(\frac{\partial y}{\partial t}-\Delta y-f-v\chi_\omega)=0 \end{array}\right\} & \text{en } Q \\ y=0 & \text{en } \Sigma \\ y(0,.)=y_0(.) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

siendo ω abierto regular tal que $\omega\subset\subset\Omega$. Una exposición detallada será dada en DIAZ [5] donde también se podrá encontrar un análisis de Inecuaciones Variacionales de tipo "elasto-plastico".

Consideremos ahora el caso de una función f "muy negativa" en un entorno de $\partial\Omega$. Sea $d(x)=d(x,\partial\Omega)$.

TEOREMA 2. Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ *con* $N>4$. *Sea* $f\in H^1(0,T:L^2(\Omega))$ *con* $f_t(t,.)\geq0$ c.p.t. $t\in(0,T)$ *en* Ω *y tal que existen* $\lambda>0$, $C_1>0$, $C_2\geq0$ y $2<\alpha<N/2$ *tales que*

$$(9) \qquad f(t,x)\leq-C_1d(x)^{-\alpha}e^{-\lambda t}+C_2e^{-\lambda t} \text{ c.p.t.p. de } \Omega,\ \forall t\in(T-\varepsilon,T).$$

Sea $y_0\in H^2(\Omega)$, $y_0\geq0$ *en* Ω *tal que* $\Delta y_0+f(0,.)\geq0$ c.p.t.p. *de* Ω. *Entonces existen* $C_3>0$ y $C_4\geq0$ *tales que*

(10) $\qquad 0\le y(t,.:v)\le C_3e^{-\lambda t}d(x)^{2-\alpha}+C_4e^{-\lambda t}$,

$\forall t\in(T-\varepsilon,T]$, c.p.t.p. *de* Ω *y* $\forall v\in C^2(\Sigma)$. *En particular* $E^{IV}(T:X)$ *no es denso en* $\langle y(T,.:0)\rangle+L^2_+(\Omega)$ *si* $X\subseteq L^2_+(\Sigma)$.

Idea de la demostración. Sin pérdida de generalidad se puede suponer

(11) $\qquad v\in C^2(\Sigma)$ con $v_t(t,.)\ge 0 \quad \forall t\in(0,T)$, en Σ.

En efecto, por un argumento de aproximación es fácil ver que $\forall \hat{v}\in C^2(\Sigma)$ existe v satisfaciendo (11) tal que $\hat{v}\ge v$ y por tanto $0\le y(t,.:\hat{v})\le y(t,.:v)$. Una vez supuesto (11) se muestra que $y_t(t,.:v)\ge 0$ c.p.t. $t\in(0,T)$ en Ω. Esto se obtiene aproximando y por y_ε soluciones del problema asociado a la aproximación del grafo maximal monótono

(12) $\qquad \beta(r)=\phi$ si $r<0$, $\beta(r)=\{0\}$ si $r>0$, $\beta(0)=(-\infty,0]$

por sus aproximaciones Yosida. Derivando la ecuación aproximada respecto a t y utilizando (11) se concluye tras paso al límite que $y_t\ge 0$. Introduzcamos ahora el cambio de variable $\hat{y}(t,x)=e^{\lambda t}y(t,x)$ y definamos $\overline{y}_\infty(x)=C_3d(x)^{2-\alpha}+C_4$. Utilizando que Δd es una función acotada y que $|\nabla d|=1$ en un entorno de $\partial\Omega$, se pueden elegir C_3 y C_4 tales que

$$-\Delta\overline{y}_\infty+\lambda\overline{y}_\infty\ge -C_1d(x)^{-\alpha}+C_2 \quad \text{en } \Omega.$$

Pero como

$$-\Delta\hat{y}(t,.)+\lambda\hat{y}(t,.)+\beta(\hat{y}(t,.))\ni e^{\lambda t}f(t,.)-\hat{y}_t(t,.) \qquad \text{en } \Omega$$

$$\hat{y}(t,.)=v(t,.)\le\overline{y}_\infty(.) \qquad \text{en } \partial\Omega$$

(β dado por (12)) se concluye que $\hat{y}(t,.)\le\overline{y}_\infty(.)$ en Ω. c.p.t. $t\in(T-\varepsilon,T)$, lo que muestra el resultado. ∎

Observación 3. La hipótesis $N>4$ sólo ha sido utilizada para garantizar que una función f satisfaciendo (9) pueda pertenecer al espacio $L^2(0,T:L^2(\Omega))$.

3. Algunas observaciones sobre la controlabilidad aproximada de otros problemas parabólicos no lineales. Consideremos ahora el problema parabólico semilineal

$$(SL)\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y+f(y)=0 & \text{en } Q \\ y=v & \text{en } \Sigma \\ y(0,x)=y_0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Nuestro objetivo es obtener hipótesis sobre $f(y)$ para que el problema (SL) verifique la propiedad de controlabilidad aproximada. Para fijar ideas nos centraremos en el caso particular de

(13) $\qquad f(r)=\lambda|r|^{p-1}r \qquad \forall r\in\mathbb{R}$

con $\lambda>0$ y $p>0$. Se tiene

TEOREMA 3. Sean $y_0\in L^2_+(\Omega)$ y $v\in X$ *con* X *dado por* (1). *Entonces, si* f *está dado por* (13) *el problema* (SL) *satisface la propiedad de la controlabilidad aproximada si y solamente si* $p\leq 1$.

Sobre la demostración del anterior resultado nos limitaremos a indicar que la controlabilidad aproximada para $p<1$ se deduce de la aplicación de un resultado de SEIDMAN [10] ($p=1$ es bien conocido).La respuesta negativa para $p>1$ se deduce de la estimación "a priori" universal del tipo

(14) $\qquad \hat{y}(t,x)\leq\psi_1(\psi_2(d(x)^{-1})+\psi_3(t^{-1}))$

con ψ_i funciones crecientes adecuadas, satisfecha por toda solución no negativa $\hat{y}$ de (SL) si $p>1$. Tal tipo de estimaciones son bien conocidas desde hace ya algunos años (vease por ejemplo VERON [11] y BREZIS-FRIEDMAN [3]).

Observación 4. Resultados de una naturaleza similar al Teorema 3 para controles del flujo sobre una parte del borde

$$\frac{\partial y}{\partial n} = v \quad \text{en } \Sigma_1, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \Sigma_2 \text{ con } \Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$$

son debidos a J. HENRY (caso del $p<1$ [6]) y A. BAMBERGER (contraejemplo por un método de energía para el caso $p>1$, vease [6]).

Observación 5. Estimaciones universales del tipo (14) son también satisfechas para otras ecuaciones cuasilinieales parabólicas. En tales casos se tienen de manera automática respuestas negativas a la cuestión de la controlabilidad aproximada para esas ecuaciones. Así por ejemplo, consideremos la ecuación de Burger (que puede ser entendida como una simplificación de la de Navier-Stokes al caso de una dimensión y con gradiente de presiones nulo)

$$\begin{cases} y_t+yy_x-\mu y_{xx}=0 & \text{en } (0,T)\times(0,L) \\ y(t,0)=h \ , \ y(t,L)=v(t) & \text{en } (0,T) \\ y(0,x)=y_0(x) & \text{en } (0,L). \end{cases}$$

Siguiendo la idea de la demostración del Teorema 2 no es difícil mostrar que si $v(t)\geq 0$, $h\geq 0$ y si se supone $y_0(.)\geq 0$ adecuada, entonces

$$0\leq y(t,x)\leq C_1(L-x)^{-1}+C_2 \qquad \forall t\in(0,T),\ \forall x\in(0,L).$$

Otra clase de ecuaciones para la que es posible obtener estimaciones universales es la dada por

$$y_t-\operatorname{div}(\nu_0\nabla y+\nu_1|\nabla y|\nabla y) = f$$

con $\nu_0\geq 0$, $\nu_1>0$ que aparece en fenómenos de turbulencia (modelo de Smagorinsky) (vease C. PARES [9]). Un desarrollo de estos temas podrá encontrarse en DIAZ [5].

Agradecimientos. El autor agradece a J.L. LIONS por haberle sugerido este tipo de cuestiones durante su estancia en Madrid en Enero de 1990. El autor también agradece a E. ZUAZUA por haberle indicado la referencia [10] y a A. VALLE por su amable invitación a participar en estas II Jornadas Hispano-Francesas sobre Control de Sistemas Distribuidos.

Referencias

[1] V. BARBU. Optimal control of variational inequalities. Pitman Research Notes in Mathematics n^0 100. 1984.

[2] H. BREZIS. Problémes Unilateraux. J. Math. Pures et Appl. 51, (1972), 1-168.

[3] H. BREZIS y A. FRIEDMAN. Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions, J. Math. Pures et Appl. 62 (1983), 73–97.

[4] J.I. DIAZ. Sur la controlabilité approchée des inequations variationelles et d'autres problémes paraboliques non lineaires. Aparecerá en C.R. Acad. Sci. Paris, 1991.

[5] J.I. DIAZ. Artículo detallado en preparación.

[6] J. HENRY. Etúde de la controlabilité de certaines equations paraboliques non lineaires. Tesis de Estado. Universidad de Paris VI. 1978.

[7] J.L. LIONS, Contrôle optimal de systemes gouvernés par des equations aux derivées partielles. Dunod 1968.

[8] J.L. LIONS, El Planeta Tierra. Publicaciones del Instituto de España, 1991.

[9] C. PARES. Existence, uniqueness and regularity of solution of the equations of a turbulence model for incompressible fluids. Preprint. Univ. de Málaga, 1990.

[10] T.I. SEIDMAN. Invariance of the reachable set under nonlinear perturbations, SIAM J. Control and Optimization, 25 (1987), 1173-1191.

[11] L. VERON. Effects regularisants de semigroupes non lineaires dans les espaces de Banach. Annales Fac. des Sciences de Toulouse, 1 (1979), 171–200.