J.I. DIAZ

UN PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE EN EL ESTUDIO DEL EQUILIBRIO MAGNETOHIDRODINAMICO DE UN PLASMA EN UNA CONFIGURACION STELLARATOR

1. INTRODUCCION.

En este trabajo se exponen diversos resultados sobre el tratamiento matemático del equilibrio de un plasma confinado magnéticamente en un Stellarator. Aunque el problema de partida es de caracter tridimensional la formulación que aquí abordaremos es bidimensional gracias a las técnicas de promedio desarrolladas en Hender-Carreras (1984). Por otra parte, dado que la localización exacta de la región ocupada por el plasma es desconocida "a priori" el modelo matemático es formulado como un problema de frontera libre, es decir, como un problema de contorno planteado sobre un dominio conocido que encierra la región del plasma teniendo esta última como borde la frontera libre.

En la sección 2 se presenta la obtención del modelo. Partiendo de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica, se analizan las coordenadas contravariantes y covariantes del campo magnético **B** en términos de las coordenadas de Boozer en el vacio. Se obtiene una ecuación no lineal en derivadas parciales (del tipo de la de Grad-Shafranow) para el flujo poloidal ψ despues de aplicar el proceso de promedios de Hender-Carreras. Se introduce la formulación de tipo frontera libre y se analizan las propiedades de la función desconocida $F(\psi)$ a través de la condición de corriente nula en el interior de cada superficie magnética.

Las secciones 3 y 4 recogen algunos resultados matemáticos sobre la existencia de soluciones. La Sección 3 comienza mostrando la elipticidad del operador en derivadas parciales y después aborda una primera formulación del problema. Se trata de una versión simplificada en la que la función $F(\psi)$ se supone conocida y además la condición de corriente nula solo es requerida sobre el interior de las superficies magnéticas $\psi = cte$ que encierran al plasma (Díaz, 1991).

La Sección 4 aborda el problema en su completa generalidad, formulándolo como un problema no local gracias a la noción de reordenamiento relativo de una función (Díaz, 1992). Finalmente se presentan los recientes resultados de Díaz-Rakotoson (1993) obtenidos para esta formulación general.

2. Descripción del problema con frontera libre tridimensional

Uno de los problemas más importantes en fusión termo-nuclear controlada es la detección de las condiciones bajo las cuales un plasma puede ser confinado por un campo magnético sin entrar en contacto con las paredes de la cámara que le contiene.

La teoría del equilibrio analiza las condiciones en las que la presión del plasma en cada punto se equilibra con la fuerza electromagnética.

Supondremos que la descripción macroscópica del plasma viene dada por el modelo ideal de la Magnetohidrodinámica (MHD) en el que las incógnitas son:

$p(x)\in\mathbb{R}$, la presión del plasma

$B(x)\in\mathbb{R}^3$, el campo magnético,

$J(x)\in\mathbb{R}^3$, la densidad de corriente eléctrica.

El modelo ideal de MHD en regimen estacionario viene dado por el sistema de ecuaciones

$$\nabla p=J\times B \tag{2.1}$$

$$\nabla . B=\mathrm{div}B=0 \tag{2.2}$$

$$\nabla\times B=\mathrm{rot}B=\mu_0 J \tag{2.3}$$

donde μ_0 es el coeficiente de permeabilidad magnética, que <u>supondremos en lo que sigue</u> $\mu_0=1$, dado que μ_0 es una constante irrelevante.

Las anteriores ecuaciones tienen lugar sobre la región

$$\Omega^*_p\subset\mathbb{R}^3 \tag{2.4}$$

ocupada por el plasma.

Siguiendo a Freidberg (1982) podemos asociar dos tipos de problemas de contorno al sistema (2.1), (2.2), (2.3):

(a) <u>paredes perfectamente conductoras</u>: en este caso se supone que el plasma se extiende en Ω_p hasta un borde $\partial\Omega_p$ <u>conocido "a priori"</u> supuesto conductor perfecto. Las condiciones de contorno resultan de expresar que el campo tangencial y el campo magnético normal se anulan en la pared conductora.

$$n.B=0 \tag{2.5}$$

donde n es el vector normal exterior en $\partial\Omega^*_p$.

(b) <u>región de aislamiento o de vacío</u>. Una situación más realista corresponde a cuando se supone el plasma aislado de las paredes conductoras por medio de una región de vacío. El sistema plasma- vacío es entonces un <u>problema de frontera libre</u> dado que la región ocupada por el plasma Ω^*_p no es conocida a priori y por tanto aparece una superfície o frontera libre separando Ω_p de la región de vacío que pasa a ser una incógnita más del problema. Llamemos

$$S=\partial\Omega^*_p$$

a esa frontera libre y supongamos, de momento, que es una superfície regular admitiendo un vector normal exterior a Ω^*_p que denotaremos por $\hat{\mathbf{n}}$.

Comencemos describiendo la llamada <u>formulación</u> <u>fuerte</u>: partimos de unas paredes perfectamente conductoras $\partial\Omega^*$ que delimitan una región abierta y regular

$$\Omega^*\subset\mathbb{R}^3.$$

El problema es hallar $p:\Omega^*_p\to\mathbb{R}$ y , $\mathbf{B}$, $\mathbf{J}$ $:\Omega\to\mathbb{R}^3$y una región $\Omega^*_p\subset\Omega^*$ de borde $S=\partial\Omega^*_p$ tales que se verifiquen (2.1), (2.2) y (2.3) sobre Ω^*_p. Si denotamos por $\hat{p}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{J}}$ a la restricción de las incógnitas sobre la región de vacío $\Omega^*_v=\Omega^*-\bar{\Omega}^*_p$ y mantenemos p, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{J}$ para la restricción sobre Ω^*_p, se ha de verificar que

$$\left.\begin{array}{l}\nabla.\hat{\mathbf{B}}=0 \qquad (2.6)\\ \nabla\mathrm{x}\hat{\mathbf{B}}=0 \qquad (2.7)\end{array}\right\}\text{ en }\Omega^*_v$$

Por definición la superfície S es una superfície de presión constante por lo que ha de verificarse que

$$\hat{\mathbf{n}}.\hat{\mathbf{B}}=\hat{\mathbf{n}}.\mathrm{B}=0 \text{ en } S \qquad (2.8)$$

Además utilizando la ley de Ampere se llega (Freidberg (1982) p.816) a que ha de ser

$$p+\frac{B^2}{2}\bigg|_S=\hat{B}^2\bigg|_S. \qquad (2.9)$$

En muchos problemas de frontera libre la formulación fuerte (tal cual) no admite solución por lo que conviene introducir una <u>formulación</u> <u>débil</u> en la que la frontera libre viene dada solo de manera implícita. La idea es tomar como incógnitas las funciones anteriores pero ahora extendidas a todo Ω^* e.d.

$$p:\Omega^*\to\mathbb{R},\ \mathbf{B},\ \mathbf{J}:\Omega^*\to\mathbb{R}^3$$

de manera que satisfagan un sistema global, e.d. definido en todo Ω^* y compatible con las ecuaciones de la formulación fuerte e.d.

$$\left.\begin{array}{l}\nabla p=\mathrm{JxB} \qquad (2.1^*)\\ \nabla.\mathrm{B}=0 \qquad (2.2^*)\\ \nabla\mathrm{xB}=\mathrm{J} \qquad (2.3^*)\end{array}\right\}\text{ en }\Omega^*$$

La región de vacío vendría dada entonces por

$$\Omega^*_v=\{x\in\Omega^*: \mathbf{J}(x)=\mathbf{0}\}$$

y se tendría por tanto que

$$\nabla p=0 \text{ en } \Omega^*_v.$$

La condición (2.8) resultaría solo de la exigencia de que **B** fuese una función continua en Ω^*, o más en general $\mathbf{B}\in(H^1(\Omega^*))^3$ (espacio de Sobolev sobre $L^2(\Omega^*)$). La función "presión" está definida salvo una constante aditiva. Por tanto podemos tomar dicha constante de manera que sobre $\partial\Omega^*_v=S$ se tenga

$$p=0 \text{ en } S \tag{2.10}$$

con lo que la condición (2.9) se reduce ahora a

$$B^2=\hat{B}^2 \text{ en } S \tag{2.9*}$$

Finalmente las condiciones de contorno sobre Ω^* expresan la codición de pared perfectamente conductora, e.d.

$$\mathbf{n}.\mathbf{B}=0 \text{ en } \partial\Omega^*. \tag{2.5*}$$

Mas adelante veremos una formulación bidimensional derivada de la tridimensional y con la gran ventaja de su expresión en términos de un problema de contorno para una ecuación de tipo elíptico sobre una incógnita escalar: el flujo poloidal promediado.

Con el fin de determinar las componentes de **B** es comodo sustituir el sistema standard de coordenadas cilíndricas por una parametrización adecuada: las coordenadas del flujo en el vacío (Boozer (1982)).

Se parte del campo magnético $\mathbf{B}_v$ creado en el vacío en ausencia del plasma. De nuevo las ecuaciones de partida son las del sistema (MHD) (2.1), (2.2) y (2.3) pero ahora con $\mathbf{J}_v\equiv 0$. Observemos que, en general, de la ecuación (2.1) se deduce que **B** y **J** son ortogonales a ∇p, e.d.

$$\mathbf{B}.\nabla p=0 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{J}.\nabla p=0$$

Luego las líneas de campo (de igual valor de B) y de corriente (de igual valor de **J**) están sumergidas en las superficies isobaras (de igual valor de p).

Las líneas de campo asociadas a $\mathbf{B}_v$ permaneceran en superficies toroidales anidadas (Kruskal-Kulsrud, 1958) y las denotaremos por ρ=cte. Son las llamadas superfícies magnéticas y vienen determinadas por la condición

$$\mathbf{B}_v . \nabla\rho=0 \tag{2.16}$$

La superficie correspondiente a $\rho=0$ es un toro que degenera en una curva: el eje magnético.

Sobre cada una de estas superfícies definiremos otras dos coordenadas (θ,ϕ) que son denotadas por

θ= ángulo poloidal y ϕ= ángulo toroidal.

Cada punto P de coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) se puede escribir en términos de (ρ,θ,ϕ) una vez conocida la transformación de coordenadas

$$x_i=x_i(\rho,\theta,\phi)$$

y su inversa

$$\rho=\rho(x_1,x_2,x_3),\quad \theta=\theta(x_1,x_2,x_3),\quad \phi=\phi(x_1,x_2,x_3)$$

Repasemos brevemente algunas nociones de Geometría Diferencial.

Las superficies ρ=cte, θ=cte y ϕ=cte son llamadas superficies de coordenadas. Las curvas formadas al intersectar dos de las anteriores superficies forman una curva que se denomina curva de coordenadas de la restante variable. Asociadas a cada punto de esas superficies podemos definir dos bases de vectores

- base covariante: $\{\mathbf{e}_i\}$

$$\mathbf{e}_1=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho},\quad \mathbf{e}_2=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta},\quad \mathbf{e}_3=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi},$$

siendo $\mathbf{r}=\sum_{j=1}^{3} x_j\mathbf{i}_j$ el vector de posición de un punto P. Dado que las derivadas se toman cuando las otras variables son constantes se deduce que

$\mathbf{e}_1$ es tangente a la curva de coordenadas ρ

$\mathbf{e}_2$ es tangente a la curva de coordenadas θ

$\mathbf{e}_3$ es tangente a la curva de coordenadas ϕ

(nótese que no son necesariamente ortogonales entre sí ni de norma unidad).

- base contravariante $\{e^i\}$. Se definen como los vectores normales a las superficies de coordenadas: así,

$$e^1=\nabla\rho=\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_1},\ \frac{\partial\rho}{\partial x_2},\ \frac{\partial\rho}{\partial x_3}\right),\quad e^2=\nabla\theta,\quad e^3=\nabla\phi$$

De la anterior definición se deduce fácilmente que

$$e_i\,.\,e^i=0 \quad \text{si } i\neq j$$

De hecho

$$e_1=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho}=\frac{\partial x_1}{\partial\rho}\mathbf{i}_1+\frac{\partial x_2}{\partial\rho}\mathbf{i}_2+\frac{\partial x_3}{\partial\rho}\mathbf{i}_3$$

$$e_2=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}=\frac{\partial x_1}{\partial\theta}\mathbf{i}_1+\frac{\partial x_2}{\partial\theta}\mathbf{i}_2+\frac{\partial x_3}{\partial\theta}\mathbf{i}_3$$

$$e_3=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi}=\frac{\partial x_1}{\partial\phi}\mathbf{i}_1+\frac{\partial x_2}{\partial\phi}\mathbf{i}_2+\frac{\partial x_3}{\partial\phi}\mathbf{i}_3\ ,$$

Por tanto se tiene que

$$e_i\,.\,e^j=\delta_{ij}. \tag{2.17}$$

En particular para cada permutación cíclica (i,j,k) se obtiene que

$$e_i=D(e^j x e^k)$$

siendo

$$D=(e^1.\,e^2xe^3)^{-1}=(\nabla\rho.\,\nabla\theta x\nabla\phi)^{-1} \tag{2.18}$$

y que no es otra cosa que el Jacobiano del cambio de variables de cartesianas a las coordenadas (ρ,θ,ϕ) e.d.

$$D=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho}\ x\ \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\ .\ \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi}$$

Dado un vector **A**, gracias a (2.16), podemos descomponerlo en cada una de esas bases obteniendo sus coordenadas contravariantes A^i

$$\mathbf{A}=\sum A^i e_i \qquad \text{con } A^i:=\mathbf{A}.\,e^i,\ \text{e.d.},\ A^1=\mathbf{A}.\,\nabla\rho,\ A^2=\mathbf{A}.\,\nabla\theta,\ A^3=\mathbf{A}.\,\nabla\phi$$

y sus coordenadas covariantes A_i

$$\mathbf{A}=\sum A_i e^i \qquad ,\ A_i=\mathbf{A}.\,e_i$$

e.d., $A_1=DA.\nabla\theta x\nabla\phi$, $A_2=DA.\nabla\phi x\nabla\rho$, $A_3=DA.\nabla\rho x\nabla\theta$

En el caso concreto del campo de vectores $\mathbf{B}_v$, de (3.1) deducimos que $B_v^\rho=\mathbf{B}_v.\nabla\rho=0$ y por tanto

$$\mathbf{B}_v=B_v^\theta\mathbf{e}_2+B_v^\phi\mathbf{e}_3=D(B_v^\theta\nabla\phi x\nabla\rho+B_v^\phi\nabla\rho x\nabla\theta)= \qquad (2.19)$$
$$\nabla\rho x(DB_v^\phi\nabla\theta-DB_v^\theta\nabla\phi).$$

Recordemos también que si $A=\sum A^i\mathbf{e}_i$ es un campo regular de vectores por la regla de la cadena se obtiene que

$$\nabla.A=\frac{1}{D}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(DA^\rho)+\frac{\partial}{\partial\theta}(DA^\theta)+\frac{\partial}{\partial\phi}(DA^\phi)\right]$$

En el caso concreto del campo $\mathbf{B}_v$, como $B_v^\rho=0$ obtenemos que

$$\nabla.\mathbf{B}_v=\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(DB_v^\theta)+\frac{\partial}{\partial\phi}(DB_v^\phi)\right]\nabla\rho.\nabla\theta x\nabla\phi$$

Por tanto la condición (2.2) conduce a

$$\frac{\partial(DB_v^\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(DB_v^\phi)}{\partial\phi}=0 \qquad (2.20)$$

Aplicando ahora el Teorema de caracterización de los campos conservativos (vease p.e., Marsden-Tromba (1991) p.518) al campo $DB^\phi\mathbf{e}_2-DB^\theta\mathbf{e}_3$ se concluye la existencia de una función escalar $\lambda:\Omega^*\to\mathbb{R}$ tal que

$$DB_v^\theta=-\frac{\partial\lambda}{\partial\phi} \qquad y \qquad DB_v^\phi=\frac{\partial\lambda}{\partial\theta} \qquad (2.21)$$

De esta manera podemos escribir (2.19) en los siguientes términos

$$\mathbf{B}_v=\nabla\rho x\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}\nabla\theta+\frac{\partial\lambda}{\partial\phi}\nabla\phi\right)=\nabla\rho x\nabla\lambda \qquad (2.22)$$

De la definición de λ en (2.21) se deduce que λ está bien definida salvo una función aditiva de ρ. Nótese también que las lineas de campo de $\mathbf{B}$ vienen dadas como la intersección de las superficies

ρ=cte y λ=cte.

Observemos ahora que aunque las funciones DB_v^{θ} y DB_v^{ϕ} son periodicas en los "ángulos" θ y ϕ pero que esto no implica que lo sea la función λ. Una manera de pasar a otras coordenadas periódicas es la siguiente: se comienza definiendo

$$P(\rho,\theta,\phi):=\frac{1}{2\Pi}[\lambda(\rho,\theta+2\Pi,\phi)-\lambda(\rho,\theta,\phi)]:=\frac{1}{2\Pi}[\lambda]_{\theta}^{\theta+2\pi}$$

$$T(\rho,\theta,\phi):=\frac{1}{2\Pi}[\lambda(\rho,\theta+2\Pi,\phi)-\lambda(\rho,\theta,\phi)]:=\frac{1}{2\Pi}[\lambda]_{\phi}^{\phi+2\pi}$$

Utilizando (2.21)

$$\frac{\partial P}{\partial\theta}=\frac{1}{2\Pi}[DB_v^{\phi}]_{\theta}^{\theta+\pi}=0 \qquad , \qquad \frac{\partial P}{\partial\phi}=\frac{1}{2\Pi}[-DB_v^{\theta}]_{\theta}^{\theta+\pi}=0 \qquad (2.23)$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta}=\frac{1}{2\Pi}[DB_v^{\phi}]_{\theta}^{\theta+\pi}=0 \qquad , \qquad \frac{\partial P}{\partial\phi}=\frac{1}{2\Pi}[-DB_v^{\phi}]_{\phi}^{\phi+\pi}=0 \qquad (2.24)$$

De (2.23) y (2.24) se concluye que

$$P=P(\rho) \qquad y \qquad T=T(\rho).$$

Definamos ahora

$$\tilde{\lambda}(\rho,\theta,\phi):=\lambda(\rho,\theta,\phi)-P(\rho)-T(\rho)\phi. \qquad (2.25)$$

Se tiene que $\tilde{\lambda}$ es una función periódica de θ y ϕ pues

$$[\tilde{\lambda}]_{\theta}^{\theta+2\pi}=[\lambda]_{\theta}^{\theta+2\pi}=0$$

$$[\tilde{\lambda}]_{\phi}^{\phi+2\pi}=[\lambda]_{\phi}^{\phi+2\pi}-T(\rho)2\Pi=0.$$

En conclusión de (2.25) deducimos que

$$\lambda(\rho,\theta,\phi)=P(\rho)\theta+T(\rho)\phi+\tilde{\lambda}(\rho,\theta,\phi)$$

con $\tilde{\lambda}$ periódica en θ y ϕ.

Las funciones $P(\rho)$ y $T(\rho)$ admiten una importante interpretación geométrica. Comencemos por escribir

$$P(\rho)=z'(\rho) \qquad y \qquad T(\rho)=t'(\rho). \qquad (2.26)$$

Entonces

$$\begin{aligned} B_v&=\nabla\rho x\nabla(P\theta+T\theta+\lambda)=\nabla\rho x(P\nabla\theta+T\nabla\phi+\nabla\tilde{\lambda}) \qquad (2.27)\\ &=\nabla zx\nabla\theta+\nabla tx\nabla\phi+\nabla\rho x\nabla\tilde{\lambda}\\ &=\nabla x(\nabla z\nabla\theta+t\nabla\phi-\tilde{\lambda}\nabla\rho)\end{aligned}$$

Por el Teorema de Stokes se tendrá pues que

$$\int_A B_v \cdot d\sigma=\oint_{\partial A}(z\nabla\theta+t\nabla\phi-\lambda\tilde{\nabla}\rho).dl=\oint_{\partial A}(zd\theta+td\phi-\tilde{\lambda}d\rho), \tag{2.28}$$

siendo A un elemento de area toroidal infinitesimal alrededor de ϕ=cte y de sección la corona definida por ρ y $\rho+d\rho$. De (2.28) se concluye que si definimos la función <u>flujo</u> <u>toroidal</u> $\psi_t(\rho)$ por

$$\int_A B_v \cdot d\sigma \equiv 2\Pi\psi_t(\rho)$$

entonces

$$2\Pi\psi'_t(\rho)d\rho=\int_0^{2\Pi}(z+P\delta\rho)d\theta-\int_0^{2\Pi}zd\theta=2\Pi P(\rho)d\rho$$

e.d.

$$P(\rho)=\psi'_t(\rho). \tag{2.29}$$

Si definimos analogamente el <u>flujo</u> <u>poloidal</u> $\psi_p(\rho)$ por

$$\int_A B_v \cdot d\sigma \equiv 2\Pi\psi_p(\rho)$$

con A un elemento de area poloidal infinitesimal de sección θ=cte entre ρ y $\rho+\delta\rho$ se llega a que

$$T(\rho)=\psi'_p(\rho). \tag{2.30}$$

De esta manera la relación (3.10) se puede escribir en la forma

$$\lambda(\rho,\theta,\phi)=\psi'_t(\rho)\theta+\psi'_p(\rho)\phi+\tilde{\lambda}(\rho,\theta,\phi). \tag{2.31}$$

Finalmente, si se define la <u>transformada</u> <u>racional</u>

$$\iota(\rho)=\frac{\psi'_p(\rho)}{\psi'_t(\rho)} \tag{2.32}$$

se concluye que

$$\lambda(\rho,\theta,\phi)=\psi'_t(\theta-\iota\phi)+\tilde{\lambda} \tag{2.33}$$

En la práctica interesa tomar un conjunto de coordenadas (ρ,θ_m,ϕ_m) distinto, llamadas <u>coordenadas</u> <u>magnéticas</u> de manera que la función $\tilde{\lambda}_m$ asociada sea tal que $\tilde{\lambda}_m$=0. En ese caso se tiene la descomposición

$$\begin{cases} B_v=\nabla\rho x\nabla\lambda_m \\ \lambda_m(\rho,\theta_m,\phi_m)=\psi'_t(\rho)\theta_m+\psi'_p(\rho)\phi_m. \end{cases} \tag{2.34}$$

Para encontrar esas coordenadas basta tomar

$$\theta_m=\theta+\frac{\tilde{\lambda}+F(\rho)}{\psi'_t(\rho)}+\iota\tilde{f}$$

$$\phi_m=\phi+\tilde{f}$$

con $F(\rho)$ y $\tilde{f}$ (función periódica) arbitrarias. Por ejemplo $\tilde{f}\equiv 0\equiv F$. (Vease Miyamoto (1989) pag 171).

Como consecuencia de (2.34) se tiene que

$$\begin{aligned} B_v&=\nabla\rho x(\psi'_t(\rho)\nabla\theta_m+\psi'_p(\rho)\nabla\phi_m) \\ &=\nabla\psi_t x\nabla\theta_m+\nabla\psi_p x\nabla\phi_m \\ &=\nabla\psi_t x\nabla(\theta_m-\iota\phi_m) \end{aligned} \tag{2.35}$$

En la práctica conviene redefinir ρ de otra manera. Observemos que en el caso de que las superficies magnéticas fueran toros regulares de sección circular se tendría que $\psi_t=\frac{B_0 p^2}{2}$. Por tanto se toma $\rho=\sqrt{2\psi_t}$ y así (2.35) se puede escribir como

$$B_v=B_0\rho\nabla\rho x\nabla(\theta-\iota\phi)$$

Las lineas de campo de B_v son ahora

$$\begin{cases} \rho=cte \\ \lambda_m=cte \quad \text{e.d.} \quad \theta_m=\iota\phi_m+cte. \end{cases}$$

e.d. la relación entre λ_m y θ_m es afin (y las lineas de campo de B_v son rectas en el plano (θ_m,ϕ_m).

Estudiemos ahora las <u>coordenadas</u> <u>covariantes</u> de B_v e.d. tales que

$$B_v=B_{v\rho}\nabla_\rho+B_{v\theta}\nabla\theta+B_{v\phi}\nabla_\phi.$$

Analicemos previamente el caso de unos campos genéricos **B** y **J** verificando la ecuación (2.3). Se tendrá entonces que

$$\mu_0 J=\nabla xB=\nabla B_\rho x\nabla\rho+\nabla B_\theta x\nabla\theta+\nabla B_\phi x\nabla\phi \tag{2.36}$$

Ahora bien, se verifica que

$$J.\nabla\rho=0 \tag{2.37}$$

pues **J** es ortogonal a **B**. Por tanto de (2.36) se deduce que

$$-\frac{\partial B_\theta}{\partial \phi}+\frac{\partial B_\phi}{\partial \theta}=0 \tag{2.38}$$

De nuevo, por la caracterización de los campos conservativos existirá una función escalar $\chi(\rho,\theta,\phi)$ tal que

$$B_\theta=\frac{\partial \chi}{\partial \theta} \qquad \text{y} \qquad B_\phi=\frac{\partial \chi}{\partial \phi}\ .$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} B&=B_\rho\nabla\rho+\frac{\partial\chi}{\partial\theta}\nabla\theta+\frac{\partial\chi}{\partial\phi}\nabla\phi \\ &=\beta\nabla\rho+\nabla\chi \end{aligned} \tag{2.39}$$

con

$$\beta=B_\rho-\frac{\partial\chi}{\partial\rho} \tag{2.40}$$

Utilizando la periodicidad de **B** respecto de los "angulos" θ y ϕ como se hizo en el caso de coordenadas contravariantes se llega a que

$$\chi(\rho,\theta,\phi)=I(\rho)\theta+G(\rho)\phi+\tilde{\chi}(\rho,\theta,\phi)$$

con $\tilde{\chi}$ periódica en θ y ϕ. Observemos también que las funciones χ(y $\tilde{\chi}$) y β están definidas salvo una función de ρ arbitraria.

Por el teorema de Stokes, (2.36) y (2.39) se tiene que

$$\int_A \mathbf{J}.d\sigma=\oint_{\partial A}\mathbf{B}.dl=\oint_{\partial A}(\beta d\rho+d\chi)$$

Si la curva ∂A está sumergida en una superficie magnética con ρ=cte, entonces

$$\int_A \mathbf{J}.d\sigma=\oint_{\partial A}d\chi=\Delta\chi=I(\rho)\Delta\theta+G(\rho)\Delta\phi$$

donde Δ simboliza a un incremento. En consecuencia si tomamos la superficie A de manera que $\Delta\theta=2\Pi$ y $\Delta\phi=0$ se obtiene la caracterización

$$I(\rho)=\frac{1}{2\Pi}\int_{tor}\mathbf{J}.d\sigma \tag{2.41}$$

y de ahí que a $I(\rho)$ se le llame <u>corriente</u> <u>toroidal</u>. Si por el contrario se elige A de manera que $\Delta\theta=0$ y $\Delta\phi=2\Pi$ entonces resulta

$$G(s)=\frac{\mu_0}{2\Pi}\int_{pol} \mathbf{J}.d\sigma \qquad (2.42)$$

<u>Definición</u>. Las <u>coordenadas</u> <u>magnéticas</u> <u>de</u> <u>Boozer</u> (ρ,θ_m,ϕ_m) son aquellas en las que $\tilde{\lambda}_B=0$ y $\tilde{\chi}_B=0$ e.d.

$$\mathbf{B}=\nabla\rho x\nabla\lambda_B \quad \text{con } \lambda_B=\psi'_t(\rho)\theta_B+\psi'_p(\rho)\phi_B \qquad (2.43)$$

$$\mathbf{B}=\beta_B\nabla\rho+\nabla\chi_B \quad \text{con } \chi_B=I(\rho)\theta_B+G(\rho \qquad (2.44)$$

Observese que esto requiere que

$$\begin{cases} \psi'_t\theta_B+\psi'_p\phi_B=\psi'_t\theta+\psi'_p\phi+\tilde{\lambda} \\ I\theta_B+G\phi_B=I\theta+G\phi+\tilde{\chi}. \end{cases} \qquad (2.45)$$

Este es un sistema de dos ecuaciones lineales en θ_B y ϕ_B de solución única la dada por

$$\begin{cases} \theta_B=\theta+\dfrac{G\tilde{\lambda}-\psi'_p\tilde{\chi}}{G\psi'_t-I\psi'_p} \\ \phi_B=\phi+\dfrac{\psi'_t\tilde{\chi}-I\tilde{\lambda}}{G\psi'_t-I\psi'_p} \end{cases} \qquad (2.46)$$

La forma covariante de B en coordenadas magnéticas de Boozer es

$$\mathbf{B}=\beta_*\nabla\rho+I\nabla\theta_B+G\nabla\phi_B \qquad (2.47)$$

siendo

$$\beta_*=\beta_B+I'\theta_B+G'\phi_B$$

En ese caso se tiene que

(a) las lineas de campo de **B**, ρ=cte y λ_B=cte son

$$\theta_B=\iota\phi_B+\text{cte}$$

(b) las lineas de $\nabla\rho x\mathbf{B}$, e.d. ρ=cte y χ_B=cte son

$$\phi_B=-\frac{I}{G}\theta_B+\text{cte}.$$

e.d. <u>las lineas de campo de **B** y sus perpendiculares sobre las superficies magnéticas vienen ahora representadas por lineas rectas</u>.

Volvamos ahora al campo $\mathbf{B}_v$ <u>en el vacio</u>. Como $\mathbf{J}_v=0$ se tienen que I y G son constantes. Además como

$$\nabla x \mathbf{B}_v = \nabla\beta_* x \nabla\rho = \mathbf{0}$$

se obtiene que $\beta_*=\beta_*(\rho)$. Si además suponemos que en el interior de las superficies magnéticas solo hay el vacio se tendrá que

$$I\equiv 0$$

Bajo simetría de stellarator, para $\theta=0$ y $\phi=0$ se tiene que los vectores $\nabla\rho$ y $\mathbf{r}$ (vector de posición) y $\mathbf{e}_\phi$ son paralelos y por tanto

$$0=\mathbf{B}_v.\nabla\rho=\beta_*(\rho)(\nabla\rho)^2+G\nabla\phi.\nabla\rho$$

luego

$$\beta_*(\rho)=0$$

con lo que

$$\mathbf{B}_v=G\nabla\phi$$

con G constante, que en lo que sigue denominaremos F_v e.d.

$$\mathbf{B}_v=F_v\nabla\phi. \qquad (2.48)$$

Siguiendo el trabajo de Hender-Carreras (1984), con el fin de evitar singularidades en el tensor de la métrica g del cambio de coordenadas, conviene tomar como nuevas coordenadas $(\rho,\rho\theta,\phi)$ y así no es difícil verificar que el Jacobiano es

$$D=[\nabla\rho x \nabla(\rho\theta)].\nabla\phi=\frac{|\mathbf{B}_v|^2}{B_0 F_v}. \qquad (2.49)$$

Debido a la geometría peculiar de los stellarators una gran parte de las funciones que aparecen en las secciones anteriores son funciones periódicas de ϕ (debido a la estructura toroidal) así como de $M\phi$ donde M es el número de simetrías parciales (toroidal fields periods) que se supondrá siempre $M>>1$ (en el TJ-II, M=4). Aparece pues un primer parámetro pequeño

$$\varepsilon=1/M \qquad (2.50)$$

y así un buen número de funciones A se podrán escribir como

$$A=A(\rho,\theta,\phi,\frac{\phi}{\varepsilon}). \qquad (2.51)$$

En (2.51) hay pues una dependencia respecto al angulo "rápido" $\frac{\phi}{\varepsilon}$ y el angulo "lento" ϕ. La idea central del proceso de "promedios", desarrollado de manera sistemática por Bogolyubov y Mitropolskij (1974), radica en la descomposición

$$A=\langle A\rangle+\tilde{A} \tag{2.52}$$

donde

$$\langle A\rangle=\frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\pi} A d\phi \tag{2.53}$$

es la parte promediada y $\tilde{A}$ la rapidamente oscilante. Ahora $\langle A\rangle$ pasa a ser una función constante en ϕ. Una justificación detallada de las simplificaciones que encierra este método puede encontrarse en Morozov-Solovev (1971) o Hale (1970).

En virtud de la descomposición del campo magnético en el vacío $\mathbf{B}_v$ vista anteriormente y de la expresión del jacobiano D_v se tiene que

$$B_v^{\rho}=0 \tag{2.54}$$

$$B_v^{\theta}=B_0\rho\iota_v D \tag{2.55}$$

$$B_v^{\phi}=B_0 D. \tag{2.56}$$

De la estructura de D (vease (2.49). Resulta que conviene aplicar la descomposición (2.52) en la forma

$$\frac{B^i}{D} = \left\langle\frac{B^i}{D}\right\rangle+\widetilde{\left(\frac{B^i}{D}\right)} \tag{2.57}$$

donde $i=\rho_v,\theta_v,\phi_v$ y $\mathbf{B}$ es el campo magnético en presencia del plasma. Las hipótesis de ordenes de magnitud son

$$\left\langle\frac{B^{\theta}}{D}\right\rangle\sim\varepsilon \quad , \left\langle\frac{B^{\phi}}{D}\right\rangle\sim 1 \quad , \left\langle\frac{B^{\rho}}{D}\right\rangle \sim \beta \sim \varepsilon \tag{2.58}$$

donde se ha supuesto que

$$\beta\sim\varepsilon,\ \text{siendo}\ \beta=\frac{p}{\frac{1}{2}|B|^2}$$

Aquí ε representa "the inverse aspect ratio"

$$\varepsilon=\frac{a}{R_0} \tag{2.59}$$

con radio menor medio y R_0 radio mayor medio de las superficies toroidales. En el sistema de coordenadas en el vacio podemos dar ordenes de magnitud a los elementos de la métrica asociada. Se toma también como hipótesis que los elementos de la métrica verifican

$$(g^{\rho\rho})\sim(g^{\theta\theta})\sim(g^{\rho\theta})\sim(g^{\phi\phi})\sim\delta \qquad (2.60)$$

con

$$\varepsilon\sim\delta^2 \quad \text{y} \quad M\sim\frac{1}{\varepsilon}$$

Esto permite concluir que

$$\left(\frac{B^{\rho}}{D}\right)\sim\left(\frac{B^{\theta}}{D}\right)\sim\varepsilon\delta. \qquad (2.61)$$

en base a consideraciones de tipo fisico (vease Hender-Carreras (1984)).

Es importante señalar que las hipótesis de ordenes de magnitud coinciden con las de Green-Johnson (1961). Sin embargo, el tomar como sistema de coordenadas las del flujo en el vacio tiene importantes ventajas frente a las coordenadas toroidales fijas tomadas en Green- Johnson (1961). Así por ejemplo, la relación de equilibrio

$$\mathbf{B}.\nabla p=0$$

al descomponerla en sus partes promediadas y rapidamente oscilantes da

$$\langle\mathbf{B}\rangle.\nabla\langle p\rangle+\langle\tilde{\mathbf{B}}.\nabla\tilde{p}\rangle=0 \qquad (2.62)$$

y

$$\tilde{\mathbf{B}}.\nabla\langle p\rangle+\langle\mathbf{B}\rangle.\nabla\tilde{p}=0 \qquad (2.63)$$

(Estas relaciones so obtienen dado que $\langle\tilde{\mathbf{B}}\rangle=0$ y $\langle\nabla\tilde{p}\rangle=0$ y por suponer $(\tilde{\mathbf{B}}.\nabla\tilde{p})$ despreciable). Utilizando las hipótesis se comprueba que el término $\langle\tilde{\mathbf{B}}\nabla\tilde{p}\rangle$ debe ser explicitamente despreciado al encontrar las ecuaciones de equilibrio y esto evita otros razonamientos adicionales necesarios en el caso de coordenadas fijas (vease Green-Johnson (1961)).

La componente radial de la ecuación de equilibrio (2.1) conduce, por medio del término dominante de su desarrollo en potencias de ε, a la ecuación

$$-\left\langle\frac{B^{\phi}}{D}\right\rangle\frac{\partial}{\partial\rho}\langle B_{\phi}\rangle-\left\langle\frac{B^{\theta}}{D}\right\rangle\left[\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\ (\rho\langle B_{\theta}\rangle)-\ \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\ \langle B_{\rho}\rangle\right] \qquad (2.64)$$

$$=\left\langle\frac{1}{D}\right\rangle\frac{\partial\langle P\rangle}{\partial\rho}$$

Observese que los términos de productos de funciones fluctuantes no se han retenido por ser de orden superior en ε. Las componentes en θ y ϕ de la relación (2.1) conducen, en su término relevante, a las ecuaciones

$$\left\langle\frac{B^{\rho}}{D}\right\rangle\left[\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\ \langle B_{\theta}\rangle)-\ \frac{1}{\rho}\ -\ \frac{\partial}{\partial\theta}\ \langle B_{\rho}\rangle\right]-\ \left\langle\frac{B^{\theta}}{D}\right\rangle\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\langle B_{\phi}\rangle}{\partial\theta} \qquad (2.65)$$

$$=\left\langle\frac{1}{D}\right\rangle\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\langle P\rangle}{\partial\theta}$$

$$\left\langle\frac{B^{\rho}}{D}\right\rangle\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\langle B_{\phi}\rangle}{\partial\theta}\ +\ \left\langle\frac{B^{\rho}}{D}\right\rangle\ \frac{\partial\langle B_{\phi}\rangle}{\partial\rho}\ =\ 0 \qquad (2.66)$$

Tomando promedios en la ecuación (2.2) y despreciando los términos oscilantes en ϕ se concluye que $\langle\nabla.\mathbf{B}\rangle=0$ y por tanto

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\ \left\langle\frac{B^{\rho}}{D}\right\rangle\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\ \left(\left\langle\frac{B^{\theta}}{D}\right\rangle\right)=0$$

Aplicando el teorema de caracterización de campos conservativos existirá una función ψ (que llamaremos <u>flujo</u> <u>poloidal</u> <u>promediado</u>) tal que

$$\left\langle\frac{B^{\rho}}{D}\right\rangle=\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\quad ,\quad \left\langle\frac{B^{\theta}}{D}\right\rangle=-\ \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \qquad (2.67)$$

De las ecuaciones (2.66) y (2.67) deducimos que $\nabla\langle B_{\phi}\rangle$ es paralelo a $\nabla\psi$ (donde ahora el símbolo ∇ se refiere al gradiente bidimensional). Por lo tanto $\langle B_{\phi}\rangle$ no depende mas que ψ

$$\langle B_{\phi}\rangle\equiv F(\psi)$$

con F desconocida "a priori". Analogamente, de la condición $\langle\underline{B}\rangle.\nabla\langle p\rangle=0$ y la definición de ψ volvemos a concluir que $\nabla\langle p\rangle$ es paralelo a $\nabla\psi$ y por tanto p es función solo de ψ y escribiremos

$$\langle p\rangle=p(\psi).$$

Las ecuaciones (2.64) y (2.65) se pueden escribir entonces como

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho <B_\theta>)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}<B_\rho> = <\frac{B^\phi}{D}>\frac{dF}{d\psi}+<\frac{1}{D}>\frac{dp}{d\psi} \quad (2.68)$$

Escribiendo (2.68) en términos de los elementos de la métrica g se concluye (vease Hender-Carreras (1984)) la ecuación

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho <g^{\rho\rho}>\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+<g^{\rho\theta}>\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(<g^{\rho\theta}>\frac{\partial\psi}{\partial\rho} +$$

$$+ \frac{<g^{\theta\theta}>}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}) = -\frac{B_0F(\psi)}{F_v}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\iota<g^{\rho\rho}>)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho\iota<g^{\rho\theta}>)\right] \quad (2.69)$$

$$-\frac{F_v}{B_0}<\frac{1}{D}>\frac{dp}{d\psi}(\psi)-F(\psi)\frac{dF}{d\psi}(\psi).$$

La ecuación (2.69) se ha obtenido promediando las ecuaciones (2.1) y (2.3) que se verifican sobre la región ocupada por el plasma. Como **B** y $\mathbf{B}_v$ difieren "poco" sobre la zona de vacio Ω^*_v, podemos suponer que la región de plasma Ω^*_p está contenida en la región limitada por una superficie magnética del campo $\mathbf{B}_v$, $\rho=C_p$. Tomamos ahora como Ω^* una región que contenga a ese dominio y que venga delimitada por otra superficie magnética de $\mathbf{B}_v$, e.d.

$$\Omega^*=\{(\rho,\theta,\phi):0\le\rho<C_1\}$$

con $C_1>C_p$. Se tendrá entonces que

$$\Omega^*_v=\{(\rho,\theta,\phi):C_p<\rho<C_1\}.$$

En el proceso de promedios esos conjuntos de transformaran en los dominios bidimensionales

$$\Omega=\{(\rho,\theta):0\le\rho<C_1\}$$

$$\Omega_p=\{(\rho,\theta):0\le\rho<C_p\}$$

$$\Omega_v=\{(\rho,\theta):C_p\le\rho<C_1\}.$$

La ecuación (2.69) se ha de verificar pues sobre la región Ω_p. Tal y como se comentó anteriormente, en la región de vacío Ω^*_v se tienen tambien el mismo sistema de ecuaciones (2.1*), (2.2*), (2.3*) dado que en esa región se puede tomar $p\equiv0$ y $J\equiv0$. Denominemos $\mathcal{L}\psi$ al operador

$$\mathscr{L}\psi=\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}(a_{\rho\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho})+\frac{\partial}{\partial\rho}(a_{\rho\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta})+\frac{\partial}{\partial\theta}(a_{\theta\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\theta})+\frac{\partial}{\partial\theta}(a_{\theta\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta})\right\} \tag{2.70}$$

siendo

$$\begin{cases} a_{\rho\rho}(\rho,\theta)=\rho<g^{\rho\rho}>(\rho,\theta) \\ a_{\rho\theta}(\rho,\theta)=<g^{\rho\theta}>(\rho,\theta) \\ a_{\theta\rho}(\rho,\theta)=<g^{\rho\theta}>(\rho,\theta) \\ a_{\theta\theta}(\rho,\theta)=\dfrac{<g^{\theta\theta}>(\rho,\theta)}{\rho} \end{cases} . \tag{2.71}$$

Entonces sobre Ω_p se tiene que

$$-\mathscr{L}\psi=b_0(\rho,\theta)F(\psi)+F(\psi)\frac{dF}{d\psi}(\psi)+b_1(\rho,\theta)\frac{dp}{d\psi}(\psi) \tag{2.72}$$

mientras que en Ω_v se tiene que

$$-\mathscr{L}\psi=b_0(\rho,\theta)F_v \tag{2.73}$$

dado que

$$F(\psi(\rho,\theta))=F_v \qquad \text{en } \Omega_v. \tag{2.74}$$

La anterior relación se tiene de la identificación de B con B_v al restringirlo sobre Ω_v. Mas tarde veremos otra justificación de este hecho. En las anteriores fórmulas se ha utilizado la siguiente notación:

$$\begin{cases} b_0(\rho,\theta) = \dfrac{B_0}{\rho F_v}\left[\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\iota<g^{\rho\rho}>+\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\rho\iota<g^{\rho\theta}>)\right] \\ b_1(\rho,\theta) = \dfrac{F_v}{B_0}<\dfrac{1}{D}>(\rho,\theta). \end{cases} \tag{2.75}$$

Analicemos ahora las condiciones de contorno. Tal y como se indicó anteriormente, se debe exigir la condición (2.5*) lo que conduce a

$$<B>.n=0 \qquad \text{en } \partial\Omega \tag{2.76}$$

con $n=(n_\rho,n_\theta)$ vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$. De la definición de ψ en (2.76) concluimos que

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\ n_\rho - \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\ n_\theta = 0 \qquad \text{en} \quad \partial\Omega.$$

No es difícil comprobar que esto equivale a pedir que

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = 0 \qquad \text{en } \partial\Omega \tag{2.77}$$

donde τ es el vector unitario tangente a $\partial\Omega$. Por tanto concluimos que ψ es constante en $\partial\Omega$. Además en virtud de (2.8) de manera análoga se concluye que ψ es también constante sobre $\partial\Omega_p$.

Como ψ está definida modulo una constante aditiva podemos adoptar el criterio de que

$$\psi=0 \qquad \text{en } \partial\Omega_p \tag{2.78}$$

y

$$\psi=cte=\gamma \qquad \text{en } \partial\Omega. \tag{2.79}$$

con γ desconocida "a priori".

La función $p(\psi)$ no puede ser determinada con la sola ayuda de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica y por tanto se interpreta como una "ley de estado" o constitutiva del plasma. En la práctica se ha comprobado que leyes del tipo

$$p(\psi)=a\psi^m \text{ si } \psi>0 \text{ con } m>1 \text{ y } a>0 \text{ y } p(\psi)\equiv 0 \text{ si } \psi\le 0 \tag{2.80}$$

dan resultados numéricos concordes con los experimentos. En cualquier caso parece natural suponer (vease Temam (1975)

$$P(\psi)=\frac{\lambda}{2}(\psi_+)^2 \quad \text{con } \lambda>0 \tag{2.81}$$

siendo $\psi_+=\psi$ si $\psi>0$, $\psi_+=0$ si $\psi\le 0$.

Con respecto a la función $F(\psi)$ conviene señalar que también es desconocida "a priori" aunque existen varios argumentos adicionales que parecen determinarla de manera univoca. La condición adicional que resulta más útil a este respecto es la que corresponde al hecho de que en stellarators la corriente total a lo largo de cada superficie de flujo debe ser nula por la disposición de las bobinas externas. Dado que la densidad de corriente viene determinada por la expresión

$$- F(\psi)\frac{dF}{d\psi}(\psi) - b_1(\rho,\theta)\,\frac{dp}{d\psi}(\psi)$$

la citada condición se debe enunciar como

$$\begin{cases} I=-\displaystyle\int_{\{\psi\geq c\}}\left\{F(\psi)\frac{dF}{d\psi}(\psi)+b_1(\rho,\theta)\frac{dp}{d\psi}(\psi)\right\}\rho d\rho d\theta=0 \\ \text{para todo valor de } c\in[\inf_{\Omega}\psi,\ \sup_{\Omega}\psi]. \end{cases} \tag{2.82}$$

Observemos que como b_1 es una función positiva la igualdad en (2.82) solo puede ser posible si

$$F(\psi)\frac{dF}{d\psi}(\psi)=0 \text{ si } \psi\leq 0 \quad y \quad F(\psi)\frac{dF}{d\psi}(\psi)<0 \quad \text{si} \quad \psi>0 \tag{2.83}$$

Como por otra parte se suele tomar $F(\psi)=F_v>0$ si $\psi\leq 0$ [vease (2.74)] encontramos que un conjunto de hipótesis naturales es

$$F(\psi)\geq 0 \qquad \forall\psi \tag{2.84}$$

$$\frac{dF}{d\psi}(\psi)\leq 0 \quad \forall\psi. \tag{2.85}$$

y por tanto podemos suponer que

$$\begin{cases} F(\psi)=F_v>0 \text{ si } \psi\leq 0 \text{ y } F(\psi) \text{ es una función} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{estrictamente decreciente} \\ \text{con } F(\psi)>0 \text{ si } \psi>0 \end{cases} \tag{2.86}$$

Dado que $0\leq F(\psi)\leq F_v$ $\forall\psi\in\mathbb{R}$, observemos que al ser $F\in C^1(\mathbb{R})$ con $F'\leq 0$ deducimos que el rango F' es también acotado y por tanto

$$0\geq F'(\psi)\geq -C \quad \text{para algún } C>0. \tag{2.87}$$

3. Análisis matemático del modelo bidimensional prefijando la función $F(\psi)$.

El problema con frontera libre obtenido en la sección anterior y definido por las relaciones (2.72), (2.74), (2.79), (2.82) es de una gran complejidad y hasta ahora no ha sido abordado mas que mediante algoritmos numéricos (vease Hender-Carreras (1984), García-Carreras-Dominguez (1988) y García et al. (1989)). En los trabajos citados se analiza unicamente el problema de tipo "paredes perfectamente conductoras" e.d. prefijando "a priori" la región ocupada por el plasma. Bajo estas condiciones el método numérico seguido consta de dos etapas

A. Se "aproxima" ψ solución de la ecuación (de tipo Grad-Shafranov) (2.72) supuesta conocidas las funciones $p(\psi)$ y $F(\psi)$. Como condiciones de contorno se toman en $\partial\Omega_p$.

B. Se modifica $F(\psi)$ de manera iterativa utilizando la aproximación sobre ψ de la etapa A, exigiendo que se cumpla la condición de corriente nula (2.82).

El propósito de esta sección es dar un sentido riguroso a la etapa A, incorporando además la formulación en forma de problema de frontera libre, lo que se ajusta más a la realidad dado que en la práctica la localización de la zona ocupada por el plasma no es conocida "a priori".

El primer resultado básico concierne a la naturaleza del operador $\mathscr{L}\psi$ supuesto que el parámetro ε es suficientemente pequeño

Proposición 1

El operador $\mathscr{L}\psi$ dado por (2.70) es un operador uniformemente elíptico y simétrico.

Demostración. La parte principal de $\mathscr{L}\psi$ (e.d. los términos en derivadas segundas de ψ) viene dada por

$$a_{\rho\rho}\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + 2a_{\rho\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho\partial\theta} + a_{\theta\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} .$$

Por tanto la elipticidad uniforme del operador $\mathscr{L}\psi$ equivale a mostrar (vease p.e. F. John (1971)) que

$$a_{\rho\rho}a_{\theta\theta}-(a_{\rho\theta})^2>0 \tag{3.1}$$

que de la definición (2.71) equivale a

$$<g^{\rho\rho}><g^{\theta\theta}>-<g^{\rho\theta}>^2 > 0. \tag{3.2}$$

Para mostrar (3.2) es conveniente recordar que si $g=(g_{ik})$ es el tensor métrico entonces los elementos (g^{ik}) vienen definidos por la matriz inversa de g e.d.

$$g^{ik}=\frac{G^{ik}}{D} \tag{3.3}$$

siendo G^{ik} el menor ik de la matriz g y D su determinante. Si utilizamos la caracterización de los elementos de g al pasar de las nuevas coordenadas $(\rho,(\rho\theta),\phi)$ a las coordenadas cilíndricas usuales (R,z,ζ), podemos escribir que

$$g_{\rho\rho}=\left(\frac{\partial R}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2+R^2\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)^2$$

$$g_{\rho\theta}=\frac{\partial R}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\theta}+\frac{\partial z}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\theta}+R^2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}$$

$$g_{\theta\theta}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2+R^2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)^2$$

Recordando la construcción del sistema de coordenadas $(\rho,(\rho\theta),\phi)$ y que

$$D=\det g=\frac{|B_v|^2}{B_0F_0} \tag{3.4}$$

se obtiene (García (1991)) la caracterización

$$g^{\rho\rho}=\frac{|B_v|^2}{4}\,g_{\theta\theta}$$

$$g^{\rho\theta}=\frac{|B_v|^2}{4}\,g_{\rho\theta}$$

$$g^{\theta\theta}=\frac{|B_v|^2}{4}g_{\theta\theta}+\frac{|B_v|^2}{F_v^2}\rho^2(\iota_v)^2 .$$

Dado que

$$g^{\theta\theta}\geq\frac{|B_v|^2}{4}g_{\rho\rho} ,$$

bastara probar que

$$<\frac{|\mathbf{B}_v|^2}{4}g_{\theta\theta}><\frac{|\mathbf{B}_v|^2}{4}g_{\rho\rho}>-<\frac{|\mathbf{B}_v|^2}{4}g_{\rho\theta}>^2 > 0\ . \tag{3.4}$$

Comencemos comprobando que

$$|\mathbf{B}_v|^2 g_{\theta\theta}|\mathbf{B}_v|^2 g_{\rho\rho}-\left(|\mathbf{B}_v|^2 g_{\rho\theta}\right)^2>0 \tag{3.5}$$

En efecto, se tiene que

$$g_{\rho\rho}g_{\theta\theta}-g_{\rho\theta}^2=\left(\frac{\partial R}{\partial\rho}\right)^2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2+R^4\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)^2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)^2$$

$$+\left(\frac{\partial R}{\partial\rho}\right)^2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial R}{\partial\rho}\right)^2R^2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2R^2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial}\right)$$

$$+R^2\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)^2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\theta}\right)^2+R^2\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)^2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2-\left(\frac{\partial R}{\partial\rho}\right)^2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\theta}\right)^2$$

$$-\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2-R^4\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)^2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)^2-2\frac{\partial R}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\theta}\frac{\partial z}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\theta}$$

$$-2\frac{\partial R}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\theta}R^2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}-2\frac{\partial z}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\theta}R^2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}$$

Aplicando la desigualdad de Young

$$ab\le\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2,$$

con la desigualdad estricta si y solo si $a\neq b$, se concluye que

$$2\frac{\partial R}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\theta}\frac{\partial z}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\theta}\le\left(\frac{\partial R}{\partial\rho}\right)^2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\theta}\right)^2\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right),$$

$$2\frac{\partial R}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\theta}R^2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\le\left(\frac{\partial R}{\partial\rho}\right)^2R^2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\theta}\right)^2R^2\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)^2$$

$$2\frac{\partial z}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\theta}R^2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\le\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2R^2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2R^2\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)^2$$

Además, alguna de las anteriores desigualdades es estricta pues en otro caso se tendrían las igualdades

$$\frac{\partial R}{\partial \rho}\,\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial R}{\partial \theta}\,\frac{\partial z}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \rho}\,\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} = \frac{\partial R}{\partial \theta}\,\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \rho}\,\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial \theta}\,\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}$$

con lo cual se obtienen las relaciones

$$\frac{\dfrac{\partial z}{\partial \rho}}{\dfrac{\partial z}{\partial \theta}} = \frac{\dfrac{\partial \zeta}{\partial \rho}}{\dfrac{\partial \zeta}{\partial \theta}} = \frac{\dfrac{\partial R}{\partial \rho}}{\dfrac{\partial R}{\partial \theta}} ,$$

lo que indica que los vectores

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \rho} , \frac{\partial R}{\partial \theta}\right) , \left(\frac{\partial z}{\partial \rho} , \frac{\partial z}{\partial \theta}\right) \text{ y } \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} , \frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)$$

son paralelos y por tanto lo que contradice la elección de las variables ρ y θ. En consecuencia, (3.5) queda demostrado. Utilizando ahora la hipótesis (2.60) se concluye que

$$0< \left(<\frac{|B_v|^2}{4}g_{\theta\theta}>+\frac{|B_v|^2}{4}g_{\theta\theta}\right)\left(<-\frac{|B_v|^2}{4}g_{\rho\rho}>+\frac{|B_v|^2}{4}g_{\rho\rho}\right)$$

$$\left(<\frac{|B_v|^2}{4}g_{\rho\theta}>+\frac{|B_v|^2}{4}g_{\rho\theta}\right)^2 =$$

$$=\left(<\frac{|B_v|^2}{4}g_{\rho\theta}><\frac{|B_v|^2}{4}g_{\rho\rho}> - <-\frac{|B_v|^2}{4}g_{\rho\theta}>^2+0(\varepsilon)\right.$$

lo que implica (3.1) y por tanto la elipticidad uniforme de $\mathscr{L}\psi$. Finalmente, de la definición (2.71) es obvio que $a_{\theta\rho}=a_{\rho\theta}$ y por tanto $\mathscr{L}\psi$ es simétrico. ▩

Abordaremos ahora la justificación rigurosa de la etapa A antes indicada. Observemos que dado que en $\partial\Omega$ se tiene que $\psi=\gamma$ con γ constante desconocida, necesitaremos alguna condición adicional y que obviamente no puede ser la (2.82) dado que $F(\psi)$ se supone prefijada. En cualquier caso observemos que derivando formalmente en (2.83) respecto de c se concluye que

$$\oint_{\{\psi=c\}}\left[F(\psi)\frac{dF}{d\psi} + b_1(\rho,\theta)\ \frac{dp}{d\psi}(\psi)\right]\rho d\rho d\theta = 0$$

y en particular deducimos que

$$F(c)\frac{dF}{d\psi}(c)=\frac{-\ \dfrac{dp}{d\psi}\ (c)\ \oint_{[\psi=c]}\dfrac{b_1(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta}{|\nabla\psi(\rho,\theta)|}}{\oint_{[\psi=c]}\dfrac{d\rho d\theta}{|\nabla\psi(\rho,\theta)|}}\ . \tag{3.6}$$

Una demostración rigurosa de (3.6) exige suponer que ψ no tiene "rellanos" e.d. que $|\{(\rho,\theta):|\nabla\psi(\rho,\theta)|=0\}|=0$ y es consecuencia de la fórmula co-área de Federer (véase la sección 4). En particular, en la región de vacío se tiene que $p(\psi)\equiv0$ y por tanto de (3.6) deducimos que para que se verifique (2.82) es necesario que en esa zona sea $F(\psi)$=cte. Dado que B es muy próximo a B_v sobre Ω_v, de la descomposición (2.48) parece natural suponer que

$$F(\psi(\rho,\theta))=F_v \qquad \forall(\rho,\theta)\in\Omega_v$$

Como además $\psi=0$ en $\partial\Omega_p$ esto nos lleva al siguiente grupo de hipótesis:

$$\Omega_p=\{(\rho,\theta)\in\Omega:\psi(\rho,\theta)>0\} \tag{3.7}$$

$$\Omega_v=\{(\rho,\theta)\in\Omega:\psi(\rho,\theta)<0\} \tag{3.8}$$

$$P(\psi)=\frac{\lambda}{2}\psi_+^2 \qquad (3.9)=(2.81)$$

Motivado por la condición (3.6) supondremos también que

$$\left\{\begin{array}{l} F:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ es una función de clase } C^2(\mathbb{R}) \text{ tal que:} \\ 0\le F(\psi)\le F_v\ \ \forall\psi\in\mathbb{R},\ F(\psi)\equiv F_v \text{ si } \psi\le0,\ F \text{ es estrictamente} \\ \text{decreciente en } (0,\infty) \text{ y } 0\le -F'(\psi)\le C\ \forall\psi\in\mathbb{R}, \text{ para algún } C \end{array}\right. \tag{3.10}$$

El problema que nos planteamos ahora es el siguiente: Hallar $\psi:\Omega\to\mathbb{R}$ y γ constante (negativa) tal que

$$-\mathcal{L}\psi=b_0(\rho,\theta)F(\psi)+F(\psi)\frac{dF}{d\psi}(\psi)+b_1(\rho,\theta)\psi_+ \quad \text{en } \Omega \tag{3.11}$$

$$\psi=\text{constante} \quad \text{en } \partial\Omega \tag{3.12}$$

$$\int_{[\psi\geq 0]}\left(F(\psi)\frac{dF}{d\psi}(\psi)+b_1\psi_+\right)\rho d\rho d\theta=0. \tag{3.13}$$

La condición (3.13) expresa que la <u>corriente</u> <u>total</u> sobre el plasma es nula. Observese que dado que $\frac{dF}{d\psi}=p=0$ en $\psi\leq 0$, la condición (3.13) se puede escribir también como

$$\int_{\Omega}\left(F(\psi)\frac{dF}{d\psi}(\psi)+b_1\psi_+\right)\rho d\rho d\theta=0. \tag{3.14}$$

Para el desarrollo posterior necesitaremos suponer la condición de signo

$$b_1(\rho,\theta)>0 \quad \text{si} \quad \rho>0 \quad \text{y} \quad \theta\in[0,2\pi], \tag{3.17}$$

que se deduce de (4.26) y de que B_0 y F_v son positivos. Por otra parte, en congruencia con el caso de métricas con coeficientes constantes, dado que $B_0>0$, $F_v>0$ y que en la práctica se tiene que $\rho\iota_v(\rho)$ es una función creciente de ρ, supondremos como hipótesis que

$$b_0(\rho,\theta)\geq 0 \quad \text{si} \quad \rho>0 \quad \text{y} \quad \theta\in[0,2\pi]. \tag{3.18}$$

En una primera etapa comenzaremos analizando las soluciones del problema

$$-\mathcal{L}\psi=\lambda b_1(\rho,\theta)\psi_+ +f(\rho,\theta) \quad \text{en } \Omega \tag{3.19}$$

$$\psi=\text{cte} \quad \text{en} \quad (3.20)=(3.12)$$

$$\lambda\int_{\Omega}b_1\psi_+\rho d\rho d\theta=I \tag{3.21}$$

con $I>0$ número fijado y $f\in L^2_\rho(\Omega)$ dada.

Tal y como sucede en numerosos problemas de frontera libre, no cabe esperar soluciones clásicas (e.d. $\psi\in C^2$) dado que pueden aparecer singularidades de las segundas derivadas de ψ sobre la frontera libre $\partial\Omega_p$. Para definir la noción de <u>solución</u> <u>débil</u> se hace necesario adaptar el procedimiento comunmente utilizado ya que este se refiere a formulaciones en coordenadas cartesianas. La estructura de las nuevas coordenadas sugiere trabajar sobre el espacio con peso.

$$L^2_\rho(\Omega)=\{f:\Omega\to\mathbb{R} \text{ medible: } \int_\Omega |f(\rho,\theta)|^2\rho d\rho d\theta<+\infty\}$$

Tal espacio es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(f,g)_\rho=\int_\Omega f(\rho,\theta)g(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta \tag{3.22}$$

y es un caso particularmente sencillo de los espacios con peso (vease p.e. Triebel [1978], Adams [1975] y Kufner [1980]). Una dificultad que aparecía en la introducción del "espacio de energía" (espacio de las derivadas) es la siguiente: La elección de $L^2_\rho(\Omega)$ y la estructura del término $a_{\rho\rho}$ justifica exigir que

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\in L^2_\rho(\Omega) \qquad \text{i.e.} \qquad \int_\Omega\left|\frac{\partial\psi}{\partial\rho}(\rho,\theta)\right|^2\rho d\rho d\theta.$$

Sin embargo la estructura de los términos $a_{\rho\theta}$ y $a_{\theta\rho}$ es distinta y así el operador $\mathscr{L}$ sólo "conduce" a pedir que

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\in L^2(\Omega), \quad \text{o equivalentemente,} \quad \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\in L^2_\rho(\Omega)\ .$$

Se ve pues que se generan términos singulares para $\rho=0$ (vease $a_{\theta\theta}$). El espacio de energía natural es dado por

$$\bar{H}^1_\rho(\Omega)=\{f\in L^2_\rho(\Omega): \frac{\partial f}{\partial\rho}\in L^2_\rho(\Omega),\ \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial f}{\partial\theta}\in L^2_\rho(\Omega)\}$$

con el producto escalar

$$(f,g)_{\bar{H}^1_\rho(\Omega)}=(f,g)_{L^2_\rho}+\left(\frac{\partial f}{\partial\rho},\frac{\partial g}{\partial\rho}\right)_{L^2_\rho}+\left(\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial f}{\partial\theta},\ \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial g}{\partial\theta}\right)_{L^2_\rho}$$

se define la forma bilineal de manera que se tenga

$\bar{a}(\psi,\varphi)=(-\mathscr{L}\psi,\varphi) \qquad \forall\varphi\in\bar{H}^1_{\rho,0}(\Omega)$ (e.d. verificando también $\varphi=0$ en $\partial\Omega$).

Esto conduce a

$$\bar{a}(\psi,\varphi)=\int_{\Omega}\left\{<g^{\rho\rho}>\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\ \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+<g^{\rho\theta}>\left(\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+<g^{\theta\rho}>\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\ \left(\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\right.$$

$$\left.<g^{\theta\theta}>\left(\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\left(\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)\right\}\rho d\rho d\theta. \tag{3.23}$$

La (bi)-continuidad de la forma $\bar{a}$ sobre $\bar{H}^1_\rho(\Omega)$ resulta trivialmente de la desigualdad de Hölder. Mostremos que es coercitiva.

Proposición 2.

Existe $\alpha>0$ tal que

$$\bar{a}(\psi,\psi)\geq\alpha|||\psi|||^2_{\bar{H}^1_{\rho,0}(\Omega)} \qquad \forall\psi\in\bar{H}^1_{\rho,0}(\Omega) \tag{3.24}$$

siendo

$$|||\psi|||^2_{\bar{H}^1_{\rho,0}(\Omega)}=\left\|\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\left\|\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \tag{3.25}$$

Demostración. Basta demostrar que existe $\alpha>0$ tal que

$$\int_{\Omega}\left(<g^{\rho\rho}>-\alpha\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)^2\rho d\rho\delta\theta+\int_{\Omega}\left(<g^{\theta\theta}>-\alpha\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2\frac{1}{\rho}d\rho d\theta\geq-2\int_{\Omega}<g^{\rho\theta}>\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\ d\rho d\theta.$$

Ahora bien, se tiene que

$$\left(<g^{\rho\theta}>\right)^2 < <g^{\rho\rho}><g^{\theta\theta}> \tag{3.26}$$

(vease la demostración de la Proposición 1). Por tanto tomando

$$0<\alpha<\underset{\Omega}{\mathrm{Min}}\left|\frac{<g^{\rho\rho}><g^{\theta\theta}>-(<g^{\rho\theta}>)^2}{<g^{\rho\rho}>+<g^{\theta\theta}>}\right|$$

(observese que el denominador es estrictamente positivo por (3.26) y que $<g^{\rho\theta}>\geq0$, $<g^{\theta\theta}>\geq0$). Se obtiene que

$$<g^{\rho\theta}>^2\leq(<g^{\rho\rho}>-\alpha)(<g^{\theta\theta}>-\alpha) \tag{3.27}$$

Aplicando la desigualdad de Young, $ab\le\frac{1}{2}(a^2+b^2)$, resulta

$$-2\int_\Omega <g^{\rho\theta}>\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}d\rho d\theta\le 2\int_\Omega <g^{\rho\theta}>|\sqrt{\rho}\,|\frac{\partial\psi}{\partial\rho}|\,|\frac{1}{\sqrt{\rho}}|\,|\frac{\partial\psi}{\partial\theta}|d\rho d\theta\le$$

$$\le\int_\Omega\left(<g^{\rho\rho}>-\alpha\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)^2 d\rho d\theta+\int_\Omega\left(<g^{\theta\theta}>-\alpha\right)\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2 d\rho d\theta. \quad\blacksquare$$

Con el fin de trabajar con un espacio <u>isótropo</u> e.d. con igual comportamiento en las variables ρ y θ introducimos los espacios

$$W_\rho^{1,p}(\Omega)=\{f\in L_\rho^p(\Omega)\ :\ \frac{\partial f}{\partial\rho}\in L_\rho^p(\Omega)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial\theta}\in L_\rho^p(\Omega)\}$$

donde $1\le p\le\infty$. Es claro que $W_\rho^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach ($\forall p\in[1,\infty]$), reflexivo y separable (si $p\in]1,\infty[$) con las normas

$$\|f\|_{L_\rho^p(\Omega)}=\left(\int_\Omega|f(\rho,\theta)|^p\rho d\rho d\theta\right)^{1/p}$$

$$\|f\|_{W_\rho^{1,p}(\Omega)}=\|f\|_{L_\rho^p(\Omega)}+\|\frac{\partial f}{\partial\rho}\|_{L_\rho^p(\Omega)}+\|\frac{\partial f}{\partial\theta}\|_{L_\rho^p(\Omega)}\ .$$

Un resultado sencillo pero de gran utilidad en nuestro caso es el siguiente

Lema 1. *Supongamos Ω acotado. Entonces existe una constante $C=C(\Omega)$ tal que*

$$\|\frac{\partial f}{\partial\theta}\|_{L_\rho^2(\Omega)}\le C(\Omega)\|\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial f}{\partial\theta}\|_{L_\rho^2(\Omega)}\qquad\forall f\in\overline{H}_\rho^1(\Omega)\qquad(3.28)$$

En particular se tiene $\overline{H}_\rho^1(\Omega)\subset W_\rho^{1,2}(\Omega)$ con inclusión continua.

Demostración. Basta observar que

$$\int_\Omega\left|\frac{\partial f}{\partial\theta}(\rho,\theta)\right|^2\rho d\rho d\theta=\int_\Omega\rho^2\frac{1}{\rho^2}\left|\frac{\partial f}{\partial\theta}(\rho,\theta)\right|^2\rho d\rho d\theta\le C^2(\Omega)\int_\Omega\frac{1}{\rho^2}\left|\frac{\partial f}{\partial\theta}(\rho,\theta)\right|^2\rho d\rho d\theta$$

siendo

$$C^2(\Omega):=\sup\{\rho^2:(\rho,\theta)\in\Omega\}. \quad ■$$

Con el fin de dar sentido a las condiciones de contorno que mencionaremos más adelante supondremos que

$$\partial\Omega=\Gamma_0\cup\Gamma. \tag{3.29}$$

Definimos a continuación el espacio

$$W^{1,p}_{\rho,\Gamma_0}(\Omega)=\overline{\{f\in C^\infty(\Omega)\ :\ f=0 \text{ en } \Gamma_0\}}^{W^{1,p}_\rho(\Omega)}.$$

El anterior conjunto representa al conjunto de funciones de $W^{1,p}_\rho(\Omega)$ que se anulan sobre Γ_0 en sentido de trazas (veanse detalles técnicos en Adams [1975], Triebel [1978] y Kufner [1980]). Se define a continuación

$$|||f|||_{W^{1,p}_{\rho,\Gamma_0}(\Omega)}=\left\|\frac{\partial f}{\partial\rho}\right\|_{L^p_\rho(\Omega)}+\left\|\frac{\partial f}{\partial\theta}\right\|_{L^p_\rho(\Omega)}. \tag{3.30}$$

Se verifica ahora el siguiente resultado

Proposición 3. *Supuesto Ω acotado se verifican las siguientes propiedades:*

(i) $|||\cdot|||_{W^{1,p}_{\rho,\Gamma_0}(\Omega)}$ *define una norma equivalente a* $\|\cdot\|_{W^{1,p}_\rho(\Omega)}$ *sobre el subespacio* $W^{1,p}_{\rho,\Gamma_0}(\Omega)$.

(ii) *Si suponemos que $\exists C>0$ tal que*

$$|\langle g^{\rho\theta}\rangle|\le C\rho,\quad |\langle g^{\theta\theta}\rangle|\le C\rho^2 \tag{3.31}$$

entonces la forma bilineal $\bar{a}$ es continua en $W^{1,p}_{\rho,\Gamma_0}(\Omega)$,

(iii) *La forma bilineal $\bar{a}$ dada por (3.23) es coercitiva sobre el espacio $W^{1,p}_{\rho,\Gamma_0}(\Omega)$.*

Demostración. La propiedad (i) es consecuencia de los resultados de Rakotoson-Simon [1993]. Gracias al Lema 1 es claro que

$$\bar{a}(\psi,\psi)\geq\alpha^{*}|||\psi|||^{2}_{W^{1,2}_{\rho,\Gamma_0}(\Omega)} \qquad \forall\psi\in W^{1,2}_{\rho,\Gamma_0}(\Omega)$$

con $\alpha^{*}=\alpha\min\{1,1/C^{2}(\Omega)\}$, con lo que la forma bilineal $\bar{a}$ es coercitiva lo que muestra (iii). La propiedad (ii) resulta de la aplicación de la desigualdad de Hölder con peso. ▪

Con el fin de evitar la hipótesis (3.31) volvemos a trabajar con el espacio no isótropo $\overline{H}^{1}_{\rho}(\Omega)$. Se tiene el siguiente resultado auxiliar:

Lema 2. *Sea Ω_x el abierto de $\mathbb{R}^2$ en coordenadas cartesianas que al pasar a polares origina Ω. Entonces*

(a) $\overline{H}^{1}_{\rho}(\Omega)=H^{1}(\Omega_x)$

(b) *se tiene la desigualdad de Poincaré*

$$\|f\|_{L^{2}_{\rho}(\Omega)}\leq C(\Omega)|||f|||_{\overline{H}^{1}_{\rho,\Gamma_0}(\Omega)} \tag{3.32}$$

para alguna constante C independiente de f y para toda f en $\overline{H}^{1}_{\rho,\Gamma_0}(\Omega)=\overline{\{f\in C^{\infty}(\Omega)\ :\ f|_{\Gamma_0}=0\}}^{\overline{H}^{1}_{\rho}(\Omega)}$.

Demostración. a) Un simple cálculo (vease p.e. Mikhlin [1968] p. 318) muestra que

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}. \tag{3.33}$$

Por el teorema de cambio de variable en integrales dobles

$$\int_{\Omega}|f(\rho,\theta)|^2\rho d\rho d\theta=\int_{\Omega_x}|f(x)|^2dx \; .$$

Desarrollando (3.33) resulta

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|^2_{L^p(\Omega_x)}+\left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\|^2_{L^p(\Omega_x)}=\left\|\frac{\partial f}{\partial \rho}\right\|^2_{L^p_\rho(\Omega)}+\left\|\frac{1}{\rho}\;\frac{\partial f}{\partial \theta}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \tag{3.34}$$

con lo que (a) resulta trivialmente y (b) es consecuencia de (3.34) y la desigualdad de Poincaré (en cartesianas) para funciones de $H^1(\Omega)$ que se anulan en Γ_0 (vease p.e. Neças [1967]).

∎

Observación. En realidad la desigualdad (3.32) se puede obtener a través de la parte (i) de la Proposición 3 y la desigualdad (3.28).

Sobre el problema en el vacío. En ausencia del plasma las superficies magnéticas vienen dadas (después del proceso de promedios) por las curvas ρ=cte. Si llamamos ψ_v a la función flujo poloidal promediada en el vació se tedrá que

$$-\mathcal{L}\psi_v = b_0F_v \qquad \text{en } \Sigma \tag{3.35}$$

$$\psi_v=\gamma \text{ cte} \qquad \text{en } \partial\Omega \tag{3.36}$$

y las superficies magnéticas generaran las curvas $\{(\rho,\theta):\psi_v(\rho,\theta)=\text{cte}\}$. Como estos han de ser círculos deducimos que necesariamente ψ_v ha de ser radialmente simétrica e.d. $\psi_v=\psi_v(\rho)$. Curiosamente esta propiedad no es "esperada" de la ecuación (3.35) dado que los coeficientes de $\mathcal{L}$ y b_0 dependen, en general, de ρ y θ. Sin embargo, si sabemos que $\psi_v=\psi_v(\rho)$ la ecuación (3.35) conduce a la igualdad

$$\frac{1}{\rho}\left\{<g^{\rho\rho}>\frac{\partial\psi_v}{\partial\rho}+\rho<g^{\rho\rho}>\frac{\partial^2\psi_v}{\partial\rho^2}+\rho\left(\frac{\partial}{\partial\rho}<g^{\rho\rho}>\right)\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}<g^{\rho\theta}>\right)\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right\}=$$

$$=-\frac{B_0F_v}{g_B\rho}\left[2\rho\iota_v<g^{\rho\rho}>+\rho^2\frac{d\iota_v}{d\rho}<g^{\rho\rho}>+\rho^2\left(\frac{\partial}{\partial\rho}g^{\rho\rho}>\right)\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\rho\iota_v\left(\frac{\partial}{\partial\theta}<g^{\rho\theta}>\right)\right] \tag{3.37}$$

Utilizando la propiedad

$$\frac{\partial\psi_v}{\partial\psi} = C\rho\iota_v(\rho) \qquad \text{con} \qquad C = -\frac{2B_0F_v}{g_B} \tag{3.38}$$

se comprueba sin dificultad la identidad (3.37).

Las coordenadas de Boozer conducen, de manera natural, a tomar como Ω_x una bola e.d.

$$\Omega = \{(\rho,\theta):\ 0\le\rho\le R,\ \theta\in[0,2\Pi]\}, \qquad \Omega_x=\{x=(x_1,x_2): x_1^2+x_2^2 \le R^2\}$$

Utilizaremos la notación siguiente:

$\Gamma_0 = \{(R,\theta);\ \theta\in(0,2\Pi)\}$

$\Gamma_p = \{(\rho,0),(\rho,2\Pi)$ siendo $\rho\in(0,R)\}$

$\Gamma_s = \{(0,\theta):\ \theta\in(0,2\Pi)\}$

Recordemos que la región Γ_s se reduce al pasar a cartesianas al origen y por tanto no es necesario dar ninguna condició de contorno sobre Γ_s aunque sí una condición de integrabilidad.

El proceso seguido podría esquematizarse en el siguiente diagrama de flujo: $(1) \underset{(a)}{\Rightarrow} (2) \underset{(b)}{\Rightarrow} (3)$ con $(1) \equiv$ Formulación en $(X,Y,Z)\in\mathbb{R}^3$ (MHD)

(2) $\equiv$ Modelo bidimensional: $\Omega\subset\mathbb{R}^2=\{(\rho,\theta)\}$

(3) $\equiv$ Modelo bidimensional en $\Omega_x\subset\mathbb{R}^2=\{(x,y)\}$

(a) $\equiv$ Coordenadas de Boozer $(\rho(X,Y,Z),\theta(X,Y,Z),\phi(X,Y,Z)$ y promedios en ϕ.

(b) $\equiv$ (ρ,θ) coordenadas polares asociadas a (x,y).

Antes de abordar metas más difíciles es útil estudiar el siguiente problema auxiliar:

$$\left.\begin{array}{ll} -\mathcal{L}\psi=f & \text{en } \Omega_x \\ \psi=\gamma \text{ (constante)} & \text{en } \partial\Omega_x \end{array}\right\} \tag{3.39}$$

Con este fin introducimos los espacios

$$H_c^1(\Omega_x)=\{u\in H^1(\Omega_x): \exists\gamma\in\mathbb{R} \quad \text{tal que } u-\gamma\in H_0^1(\Omega_x)\},$$

$$H^1_{\rho,\Gamma_0}(\Omega)_c=\{u\in H^1_\rho(\Omega): \exists\gamma\in\mathbb{R} \text{ tal que } u-\gamma\in H^1_{\rho,\Gamma_0}(\Omega)\}.$$

(algunos autores utilizan la notación $H^1_c(\Omega_x)=H^1_0(\Omega)\oplus\mathbb{R}$: vease Mossino [1984] p. 81).

Teorema 1. *Sea $f\in L^2_\rho(\Omega)$ y $\gamma\in\mathbb{R}$. Se tienen las siguientes conclusiones:*

(i) Existe un único $\psi\in H^1_c(\Omega_x)$ (e.d. $\psi\in H^1_{\rho,\Gamma_0}(\Omega)_c$) solución débil de (3.39) en el sentido de que $\psi-\gamma\in H^1_0(\Omega_x)$ y se verifica

$$\bar{a}(\psi,\varphi)=(f,\varphi)_{L^2_\rho}-c\int_\Omega f(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta \quad \forall\varphi\in H^1_c(\Omega_x) \text{ con } \varphi=c \text{ en } \partial\Omega_x. \tag{3.40}$$

(ii) La solución ψ es tal que $\psi\in H^2(\Omega_x)$ y la ecuación de (3.39) se verifica c$\forall$ punto de Ω_x.

(iii) Si $f\in L^\infty(\Omega_x)$ entonces $\psi\in W^{2,p}(\Omega_x)$ $\forall p\in[1,\infty)$ (en particular $\psi\in L^\infty(\Omega_x)$).

(iv) Se verifica que

$$\mathcal{L}\psi(\rho,\theta)=0 \qquad c\forall \ (\rho,\theta)\in P_\psi$$

siendo

$$P_\psi=\left\{(\rho,\theta)\in\Omega: \left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho},\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)(\rho,\theta)=(0,0)\right\}.$$

(v) Si $|\{(\rho,\theta)\in\Omega: f(\rho,\theta)=0\}|=0$ entonces $|P_\psi|=0$. En particular ψ es "co-area regular" en el sentido de Almgren-Lieb [1989].

(vi) Si $f\geq0$ en Ω entonces $\psi\geq\gamma$ en Ω.

Demostración. (i). Sustituyendo las fórmulas de inversión

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho}=\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial x}+\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}=-\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\psi}{\partial x}+\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

en la definición de $\bar{a}$ dada en (3.23) se genera otra forma bilineal dada por

$$
\left.\begin{aligned}
a_x(\psi,\varphi)=\int_{\Omega_x} \{a^{1,1}(x,y)\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+a^{1,2}(x,y)\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\\
a^{2,1}(x,y)\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+a^{2,2}(x,y)\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\}dxdy
\end{aligned}\right\} \qquad (3.41)
$$

con la propiedad

$$
a_x(\psi,\varphi)=\bar{a}(\psi,\varphi) \qquad \forall\psi,\varphi\in H^1(\Omega_x)=H^1_\rho(\Omega).
$$

Gracias a (3.24) y (3.34) se tiene que la forma bilineal a_x es coercitiva sobre $H^1_0(\Omega_x)$ (además de acotada). Por tanto, por el teorema de Lax-Milgram (vease p.e. Brezis [1983]) existe una única $\psi^*\in H^1_0(\Omega_x)$ verificando

$$
a_x(\psi^*,v)=(f,v)_{L^2(\Omega_x)} \qquad \forall v\in H^1_0(\Omega_x).
$$

dado que $a_x(\gamma,v)=0 \quad \forall v\in H^1_0(\Omega_x)$ se tiene que la función $\psi\equiv\psi^*+\gamma$ verifica que si $\varphi\in H^1_c(\Omega_x)$ con $\varphi=c$ en $\partial\Omega_x$ entonces

$$
a_x(\psi,\varphi)=a_x(\psi,\varphi-c)=(f,\varphi)_{L^2(\Omega_x)}-c\int_{\Omega_x} fdx
$$

lo que equivale a (3.40). Las conclusiones (i) y (iii) son consecuencia directa del trabajo Agmon-Douglas-Nirenberg [1959]. [Resultados similares obtenidos sobre espacios con pesos se deben a Geymonat y Grisvard (vease p.e. Triebel [1978] página 402)]. La estimación mostrada en la anterior referencia asegura que

$$
\|\psi\|_{W^{2,p}(\Omega_x)} \le C_1\left(\|\mathcal{L}_x\psi\|_{L^p(\Omega_x)}+\|\psi\|_{L^p(\Omega_x)}\right)
$$

donde C_1 es una constante independiente de ψ y donde $\mathcal{L}_x$ es el operador de segundo orden en cartesianas asociado a la forma bilineal a_x dada en (3.41). La conclusión $\psi\in L^\infty(\Omega_x)$ se deriva de las inclusiones de Sobolev (vease p.e. Brezis [1983]). La propiedad (iv) se debe a Stampacchia (vease p.e. Kinderleher-Stampacchia [1980] página 53). Si fuese $|P_\psi|>0$ se llegaría a que $0=\mathcal{L}_x\psi=f$ en P_ψ lo que contradice la hipótesis sobre f y así (v) queda demostrados (el hecho de que ψ sea "co-area regular" es una extensión del trabajo citado de Almgren-Lieb [1989] debida a

Rakotoson [1993]). Por último, la propiedad (vi) se deriva de técnicas ya standar sobre el principio de comparación (vease p.e. Kinderleher-Stampacchia [1980] y Brezis [1983]): Tómese $\varphi=\min(\psi-\gamma,0)$. Se sabe que $\varphi\in H_0^1(\Omega_x)$ y $\nabla_x\varphi=\nabla_x\psi$. Por tanto

$$\alpha\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega_x)}\leq a_x(\varphi,\varphi)=a_x(\psi,\varphi)=\int_{\Omega_x}f\varphi dx\leq 0.$$

Entonces $\nabla_x\varphi\equiv 0$ en Ω_x y como $\varphi=0$ en $\partial\Omega_x$ necesariamente $\varphi\equiv 0$ en Ω_x. ■

Estamos ya en condiciones de definir la noción de solución débil del problema (3.11), (3.12), (3.13) que vamos a abordar. La condición de contorno (3.12) se expresará simplemente mediante la condición

$$\psi\in H_\rho^1(\Omega)_c \quad , \tag{3.42}$$

siendo

$$H_\rho^1(\Omega)_c=\{\psi\in H_\rho^1(\Omega):\ \psi \text{ es constante sobre } \partial\Omega\}. \tag{3.43}$$

Supongamos de momento que ψ es una solución clásica de (3.11), 3.12), (3.13). Multiplicando (3.11) por una función arbitraria $v\in H_\rho^1(\Omega)_c$ e integrando por partes se obtiene

$$a(\psi,v)-v(\partial\Omega)\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\psi}{\partial\nu}dl=\lambda\int_\Omega b_1\psi_+v\rho d\rho d\theta+\int_\Omega fv\rho d\rho d\theta \tag{3.44}$$

siendo, en general,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}:=a_{\rho\rho}n_\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+a_{\rho\theta}n_\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+a_{\theta\rho}n_\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \tag{3.45}$$

con $n=(n_\rho,n_\theta)$ el vector normal exterior a $\partial\Omega$. Observemos ahora que multiplicando (en $L_\rho^2(\Omega)$) la ecuación (3.11) por la función $v\equiv 1$ se obtiene que

$$-\int\frac{\partial\psi}{\partial\nu}dl=I+\int_\Omega f\rho d\rho d\theta:=I_f. \tag{3.46}$$

Por tanto, (3.44) se puede escribir como

$$a(\psi,v)+v(\partial\Omega)I_f=\lambda\int b_1\psi_+v\rho d\rho d\theta \qquad \forall v\in H_\rho^1(\Omega)_c. \tag{3.47}$$

Esto nos conduce a la siguiente

Definición: *Una función* $\psi\in H^1_\rho(\Omega)_c$ *se dirá* *solución débil* *del* problema (3.11), (3.12), (3.13) si se verifica (3.47).

La resolución del problema antes mencionado ha sido llevada a cabo por otros autores en el estudio del equilibrio de un plasma en máquinas tokamak.

Teorema 2 (Blum-Gallouet-Simon (1986))

Supongamos $f\in L^2_\rho(\Omega)$ *e* $I>0$ *dados. Entonces existe un conjunto* C de pares $(\psi,\lambda)\in(H^1_\rho(\Omega)_c\cap\bar{H}^2_\rho(\Omega))\times\mathbb{R}^+$ *satisfaciendo (3.11) y (3.13) tal que* C *es conexo en* $H^2_\rho(\Omega)\times\mathbb{R}^+$ *y tal que* λ *genera* $\mathbb{R}^+-\{0\}$ *cuando* (ψ,λ) *recorre* C.

Observaciones

1. En el anterior enunciado se ha utilizado la notación siguiente

$$H^2_\rho(\Omega)=\left\{\psi\in\bar{H}^1_\rho(\Omega):\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho},\ \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial^2\psi}{\partial\rho\partial\theta}\ ,\ \frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\in L^2_\rho(\Omega)\right\}$$

2. En la referencia citada el enunciado se refiere a un operador genérico elíptico y simétrico descrito en coordenadas cartesianas, sin embargo la adaptación a nuestro caso en una mera formalidad sin dificultad alguna.
3. Es posible mostrar también la existencia de soluciones variacionales de (3.11), (3.12) y (3.13) e.d. minimizando una cierta función energia. Este resultado es una adaptación de los resultados de Temam (1977).

Para continuar en nuestro objetivo final de resolver el problema (3.11), (3.12) y (3.13) necesitaremos las siguientes estimaciones "a priori" sobre las soluciones del problema (3.19), (3.20), (3.21):

Lema 3

Toda solución ψ *de (3.19), (3.20), (3.21) verifica la estimación*

$$|\psi|_{H^2_\rho(\Omega)} \le C\left(\lambda^2+\frac{1}{\lambda}\right)\left(I+\frac{1}{I}\right)\left(1+|f|_{L^2_\rho(\Omega)}\right)^2 \tag{3.48}$$

donde C *depende solo de* Ω.

Demostración. Sea γ el valor constante de ψ sobre $\partial\Omega$. Definamos

$$\Omega_+=\{(\rho,\theta)\in\Omega: \psi(\rho,\theta)>0\}.$$

Dado que $\mathcal{L}$ es uniformemente elíptico, por el Teorema de Lax-Milgram, se concluye que $\mathcal{L}$ es un isomosfismo de $H^1_{\rho,0}(\Omega)\cap H^2_\rho(\Omega)$ sobre $L^2_\rho(\Omega)$, siendo $H^1_{\rho,0}(\Omega)=\{v\in H^1_\rho(\Omega): v=0 \text{ en } \partial\Omega\}$. Denotemos su inverso por B. Entonces

$$\psi-\gamma=\lambda B(b_1\psi_+)+B(f) \tag{3.49}$$

La condición (3.21) equivale a que

$$|b_1\psi_+|_{L^1_\rho(\Omega)}=I/\lambda$$

y por la desigualdad de Sobolev esto implica que

$$|b_1\psi_+|_{H^{-2}_\rho(\Omega)} \le C_1\frac{I}{\lambda}\ .$$

para una cierta constante $C_1=C_1(\Omega)>0$. Como el operador B verifica que $\forall s\le 0$ $\exists\theta_s\in\mathbb{R}$ (dependiendo solo de Ω) tal que

$$|Bv|_{H^{s+2}_\rho(\Omega)} \le \theta_s |v|_{H^s_\rho(\Omega)} \quad \forall v\in L^2_\rho(\Omega), \tag{3.50}$$

de (3.49) se obtiene que

$$|\psi-\gamma|_{L^2_\rho(\Omega)} \le C_2(I+|f|_{L^2_\rho(\Omega)}) \tag{3.51}$$

para una cierta $C_2=C_2(\Omega)$. Por otra parte si $\gamma\le 0$ se tiene que

$$2|\gamma|\psi_+\le(\psi_++|\gamma|)^2=|\psi-\gamma| \quad \text{sobre } \Omega_+\ .$$

Multiplicando por $b_2(\rho,\theta)$ e integrando concluimos que

$$2|\gamma|\frac{I}{\lambda}\leq\int_{\Omega}b_1(\rho,\theta)|\psi-\gamma|^2\rho d\rho d\theta. \qquad (3.52)$$

En el caso de que sea $\gamma>0$ se tiene que

$$\gamma\leq|\psi-\gamma|+\psi_+ \quad \text{en } \Omega.$$

Multiplicando de nuevo por b_2 e integrando obtenemos

$$\gamma|b_1|_{L^1_\rho(\Omega)}\leq\int_{\Omega}b_1|\psi-\gamma|\rho d\rho d\theta+\frac{I}{\lambda} \qquad (3.53)$$

$$\leq|\Omega|^{1/2}\int_{\Omega}b_1|\psi-\gamma|^2\rho d\rho d\theta+\frac{I}{\lambda}\ ,$$

donde se ha utilizado la desigualdad de Hölder con peso $b_1\rho$. Utilizando (3.51) y una simple manipulación algebraica se concluye que

$$|\gamma|\leq C_3(\frac{1}{\lambda}+\lambda)(\frac{1}{I}+I)\left(1+|f|_{L^2_\rho(\Omega)}\right)^2. \qquad (3.59)$$

Finalmente, la estimación buscada (3.48) se deriva de la desigualdad

$$|\psi|_{H^2_\rho(\Omega)}\leq|\gamma|\,|\Omega|^{1/2}+\lambda\theta_0|b_2\psi|_{L^2(\Omega)}+\theta_0|f|_{L^2(\Omega)}$$

(como se deduce a partir de (3.49) y (3.50) y de la estimación (3.54). ■

Escalando en dificultad, consideremos ahora la segunda etapa que consiste en la resolución del problema auxiliar

$$-\mathcal{L}\Psi=b_0F(\psi)+F(\psi)\frac{dF}{d\psi}(\psi)+\lambda b_1\psi_+ \quad \text{en } \Omega \qquad (3.55)$$

$$\psi=\text{cte} \quad \text{en } \partial\Omega \qquad (3.56)$$

$$\lambda\int_{\Omega}b_1\psi_+\rho d\rho d\theta=I \qquad (3.57)$$

con I, λ números positivos dados y $F(\psi)$ verificando (3.10)

Teorema 3

Fijados F, λ *e* I, *el problema (3.40), (3.41), (3.42) admite una solución débil* $\psi \in H^1_\rho(\Omega)_c \cap H^2_\rho(\Omega)$. *Además se verifica que*

$$\|\psi\|_{H^2_\rho(\Omega)} \leq C(I+\frac{1}{I}) \tag{3.58}$$

para una cierta $C>0$ *independiente de* I.

Demostración

Definamos el operador $T: L^2_\rho(\Omega) \to L^2_\rho(\Omega)$ mediante

$$T(\varphi)=u \quad , \quad \varphi \in L^2_\rho(\Omega)$$

con u solución del problema (3.19), (3.20), (3.21) asociada a

$$f=b_0 F(\varphi)+F(\varphi)\frac{dF}{d\psi}(\varphi).$$

Observemos que de las hipótesis supuestas sobre F se deduce que

$$|F(\psi)| \leq C_1|\psi|+C_2 \quad , \quad |F(\psi)\frac{dF}{d\psi}(\psi)| \leq C_3|\psi| \qquad \forall \varphi \in \mathbb{R},$$

de hecho

$$0 \leq F(\psi) \leq F_0 \quad \text{y} \quad |F(\psi)\frac{dF}{d\psi}(\psi)| \leq M \quad \forall \psi \in \mathbb{R}. \tag{3.59}$$

Por tanto, $f \in L^2_\rho(\Omega)$ y la existencia de $u(=T(\varphi))$ está asegurada por el Teorema 2. Observemos también que

$$\left.\begin{array}{l} \psi \text{ es un puntofijodeT} \\ (\text{e.d. } T(\psi)=\psi) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{ \psi \text{ es solución de } (3.55),(3,56),3.57) \right.$$

La demostración se reduce, pues, a la obtención de un punto fijo para el operador T lo que llevaremos a cabo mediante la aplicación del Teorema del punto fijo (abstracto) de Schauder (vease p.e. Deimling (1985) p.60). Hemos de comprobar que se verifican las siguientes hipótesis:

(i) $T(K) \subset K$, para algún subconjunto convexo y cerrado de $L^2_\rho(\Omega)$,

(ii) T es contínuo,

(iii) T(K) es relativamente compacto de $L^2_\rho(\Omega)$.

Como subconjunto K tomaremos

$$K=\{\varphi\in L^2_\rho(\Omega):\ \|\varphi\|_{L^2_\rho(\Omega)}\le R\}\ ,$$

siendo

$$R=C(\lambda^2+\frac{1}{\lambda})(I+\frac{1}{\lambda})(1+|\Omega|(F_0|b_0\rho|_\infty+M|\rho|_\infty)^2) \tag{3.60}$$

con M dado en (3.59) y

$$|b_0\rho|_\infty=\sup_{(\rho,\theta)\in\Omega}|b_0(\rho,\theta)\rho|\ ,$$

Es obvio que K es un convexo cerrado de $L^2_\rho(\Omega)$. Además la estimación del Lema 1 y las expresiones de (3.59) permiten concluir que $T(K)\subset K$. La estimación (3.48) también muestra que T(K) es relativamente compacto de $L^2_\rho(\Omega)$ pues la inclusión $H^2_\rho(\Omega)\subset L^2_\rho(\Omega)$ es compacta (vease p.e. Kufner (1985)). Finalmente T es un operador continuo, pues si $\varphi_n\to\varphi$ en $L^2_\rho(\Omega)$ entonces las funciones asociadas f_n y f son tales que $f_n\to f$ en $L^2_\rho(\Omega)$ (basta utilizar (3.58) y el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue). Finalmente de la estimación (3.48) se concluye que $u_n\to u$ (debilmente en $H^2_\rho(\Omega)$) y por tanto fuertemente en $L^2_\rho(\Omega)$. ∎

Observaciones

1. La demostración del Teorema 3 también puede realizarse mostrando la convergencia del esquema iterativo

$$-\mathscr{L}\psi_n=\lambda b_1\psi_n^++b_0F(\psi_{n-1})+F(\psi_{n-1})\frac{dF}{d\psi}(\psi_{n-1})\qquad \text{en } \Omega \tag{3.61}$$

$$\psi_n=\text{cte}\qquad \text{en } \partial\Omega. \tag{3.62}$$

$$\lambda\int_\Omega b_2(\psi_n)_+\rho d\rho=I. \tag{3.63}$$

De nuevo la convergencia viene asegurada por las desigualdades de (3.59) y la estimación (3.48) del Lema 1.

2. La conclusión del Teorema 3 se tiene incluso para funciones F tales que F y F' no están acotadas

uniformemente, pero satisfacen adecuadas hipótesis.

La última etapa de nuestro programa radica en obtener soluciones verificando la condición global (3.14).

Teorema 4

Supongamos que

$$-F(\psi)\frac{dF}{d\psi}(\psi)\leq M \qquad \forall\psi\in\mathbb{R} \tag{3.64}$$

para algún M>0 *y que existe* T>0 *tal que*

$$|b_1|_\infty\lambda\psi\leq -F(\psi)\frac{dF}{d\psi}(\psi) \qquad \forall\psi\in(0,T) \tag{3.65}$$

Entonces el problema (3.11), (3.12), (3.13) admite una solución débil $\psi\in H^1_\rho(\Omega)_c\cap H^2_\rho(\Omega)$.

Demostración

Definamos el siguiente esquema iterativo

$$-\mathcal{L}\psi=b_0F(\psi_n)+F(\psi_n)\frac{dF}{d\psi}(\psi_n)+\lambda b_1(\psi_n)_+ \quad \text{en } \Omega \qquad (3.66)_n$$

$$\psi_n=\text{cte} \quad \text{en } \partial\Omega \qquad (3.67)_n$$

$$\lambda\int_\Omega b_1(\psi_n)_+\rho d\rho=I_{n-1} \qquad (3.68)_n$$

siendo

$$I_{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}+J_{n-1}, \quad J_{n-1}=-\int_\Omega F(\psi_{n-1})\frac{dF}{d\psi}(\psi_{n-1})\rho d\rho d\theta \quad \forall n\geq 1. \qquad (3.69)_n$$

Comencemos la iteración a partir de una función $\psi_0\in L^2_\rho(\Omega)$. Dado que $I_0\geq 1$, podemos aplicar el Teorema 3 por lo que se tiene asegurada la existencia de ψ_1 solución de $(3.66)_1$, $(3.67)_1$, $(3.68)_1$. Además, la estimación (3.58) arroja

$$\|\psi_1\|_{H^2_\rho}\leq C(I_0+\frac{1}{I_0}).$$

Es claro que la justificación de la existencia de ψ_n se realiza de manera análoga, y que se obtiene la estimación

$$\|\psi_n\|_{H^2_\rho}\le C(I_{n-1}+\frac{1}{I_{n-1}}). \tag{3.70}$$

Observemos que

$$\Lambda(x)=x+\frac{1}{x}$$

es tal que $\Lambda(x)\to+\infty$ si $x\to 0$ o bien si $x\to+\infty$ y que

$$|\Lambda(x)|\le C_D \quad , \text{ con } C_D>0 \quad , \quad \forall x\in D, \tag{3.71}$$

con D acotado de $\mathbb{R}$ tal que $D\subset(0,\infty)$. Por tanto, si mostramos que la sucesión $\{I_n\}$ verifica que

$$0<M_1<I_n<M_2 \qquad \forall n \tag{3.72}$$

con M_1 y M_2 independientes de n, las estimaciones (3.70) y (3.71) permiten asegurar que existe una subsucesión (que seguiremos denotando por ψ_n) convergente débilmente a un cierto ψ en $H^2_\rho(\Omega)$. Es fácil ver que esto implica la convergencia fuerte en $H^1_\rho(\Omega)$ y que también

$$(\psi_n)_+\to\psi \ , \quad F(\psi_n)\to F(\psi) \quad y \quad F(\psi_n)\frac{dF}{d\psi}(\psi_n) \longrightarrow F(\psi)\frac{dF}{d\psi}(\psi) \quad \text{en} \quad L^2_\rho(\Omega).$$

En particular se obtiene que ψ verifica (3.11), (3.12) y también (3.13), lo que concluiría la afirmación del teorema.

Para mostrar (3.72) observemos que de la hipótesis (3.64) se concluye que

$$I_n\le 1+M|\rho|_{L^2_\rho(\Omega)}. \tag{3.73}$$

Por otra parte si suponemos que (5.50) se verifica con T=+∞ entonces

$$J_n=-\int_\Omega F(\psi_n)\frac{dF}{d\psi}(\psi_n)\rho d\rho d\theta\ge|b_1|_\infty\lambda\int_\Omega(\psi_n)_+\rho d\rho d\theta\ge I_{n-1} \tag{3.74}$$

Por tanto, de la construcción de I_n en $(3.69)_n$ deducimos que

$$I_1=\frac{1}{2}+J\ge\frac{1}{2}+I_0$$

$$I_2=\frac{1}{2^2}+J_2\ge\frac{1}{2^2}+KI_1\ge\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}+I_0$$

$$I_3=\frac{1}{2^3}+J_3\geq\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}+I_0$$

$$I_n=\frac{1}{2^n}+J_n\geq\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}+..+\frac{1}{2}+I_0 \qquad (3.75)$$

Observemos que la suma parcial S_n definida en (3.75) verifica que

$$\frac{1}{2}\leq S_n\leq \sum_1^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1 \quad , \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

En conclusión

$$\frac{1}{2}+I_0\leq I_n\leq 1+M|\rho|_{L^2_\rho(\Omega)} \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

con lo que (3.72) queda demostrado. Por último, la hipótesis $F=\infty$ puede ser suprimida con sólo elegir ψ_0 de manera que $\|\psi_n\|_\infty\leq T$ lo que es posible gracias a las estimaciones (3.70) y la inclusión de Sobolev $H^2_\rho(\Omega)\subset L^\infty(\Omega)$. □

Observación

La hipótesis (3.70) indica que la función $-F(\psi)\frac{dF}{d\psi}(\psi)$ se comporta como la función $\lambda\psi_+$ cerca de $\psi=0$. Es fácil ver que bajo la condición adicional de que $F(\psi)\frac{dF}{d\psi}$ sea decreciente en $(0,\infty)$ la hipótesis (3.70) se verifica si

$$\frac{d}{d\psi}(FF')(0)<\lambda|b_1|_\infty$$

Corolario 1.

Bajo las hipótesis anteriores la función ψ obtenida es tal que genera una frontera libre en el sentido de que $\psi_+\not\equiv 0$. Además $\|\psi\|_\infty\leq T$ y las condiciones (3.64) y (3.65) implican que

$$F(\psi(\rho,\theta))F'(\psi(\rho,\theta))+b_1(\rho,\theta)p'(\psi(\rho,\theta))\equiv 0 \quad c\forall(\rho,\theta)\in\Omega \qquad (3.76)$$

con lo que ψ verifica, de manera obvia, la condicion (2.82).

Demostración. De la construcción hecha en la demostración del Teorema 4 se concluye que

$$\frac{1}{2} < \int_\Omega \lambda b_1\psi_+(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta$$

por lo que es imposible que se $\psi_+\equiv 0$. Por otra parte, de (3.65) se deduce que

$$\lambda b_1(\rho,\theta)\psi+F(\psi)F'(\psi)\leq 0 \qquad c\forall(\rho,\theta)\in\Omega, \quad \forall\psi\in(0,T) \tag{3.76}$$

Pero como la solución obtenida es tal que $\|\psi\|_\infty \leq T$ (pues $\psi=\lim \psi_n$ con $\|\psi_n\|_\infty\leq T$), se puede tomar $\psi=(\psi(\rho,\theta))_+$ en (6.8) obteniéndose

$$\lambda b_1(\rho,\theta)(\psi(\rho,\theta))_+ +F(\psi(\rho,\theta))F'(\psi(\rho,\theta)) \leq 0 \qquad c\forall(\rho,\theta)\in\Omega. \tag{3.77}$$

La condición (3.13) dice que la integral (3.77) es nula y por tanto necesariamente se tiene (3.76). ∎

Observación 6.1. Es de interés resaltar que la condición completa (2.82) conduce a la desigualdad

$$|F(\psi)F'(\psi)| \leq |p'(\psi)|\,\|b_1\|_\infty \qquad \forall\psi\in\mathbb{R}$$

y por tanto, si se supone (3.65) se obtiene que

$$-F(\psi)F'(\psi) \leq \|b_1\|_\infty\lambda\psi \qquad \forall\psi\in\mathbb{R}. \tag{3.78}$$

Esto afirma que la hipótesis no es la óptima si lo que se quiere conseguir es (2.82) en vez de (3.13).

El objetivo del resto de esta sección es suprimir la hipótesis (3.65) a la hora de obtener la existencia de ψ. El punto clave radicará en la obtención de estimaciones a priori para las soluciones del problema auxiliar

$$-\mathcal{L}\psi= \lambda b_1\psi_+ +f(\rho,\theta) \qquad \text{en } \Omega \tag{3.79}$$

$$\psi=\text{cte} \qquad \text{en } \partial\Omega \tag{3.80}$$

$$\lambda\int_\Omega b_1\psi_+\rho d\rho d\theta=I, \tag{3.81}$$

donde $I>0$ y $f\in L^2(\Omega)$ se suponen dados. La existencia de ψ solución de (3.79), (3.80), (3.81) fue mostrada en

Blum-Gallouet-Simon (1986). El siguiente resultado es una mejora del Lema 1 del Informe #1.

Lema 4.

Toda solución ψ de (3.79), (3.80),. (3,81) verifica la estimación

$$|\psi|_{H^2_\rho(\Omega)} \le C(I+|f|_{L^2_p(\Omega)}) \tag{3.82}$$

con $C>0$ independiente de ψ.

Demostración. Se γ el valor constante de ψ sobre $\partial\Omega$. Como en el Lema 1.

$$\psi-\gamma = \lambda B(b_1\psi_+)+B(f),$$

siendo B el operador inverso de ℓ con condiciones nulas en $\partial\Omega$. De las propiedades de B se concluye que

$$|\psi|_{H^2_\rho(\Omega)} \le C(|\gamma|+I+|f|_{L^2_\rho(\Omega)}) \tag{3.83}$$

para una cierta constante C>0 que sólo depende de b_1 y Ω. Con el fin de estimar $|\gamma|$ observemos que si v es tal que

$$\ell v = 0 \quad \text{en } \Omega \tag{3.84}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = 1 \quad \text{en } \partial\Omega \tag{3.85}$$

entonces por la fórmula de Green se tiene que

$$\int_\Omega \{(-\mathcal{L}v)v+(\mathcal{L}v)\psi\}\rho d\rho d\theta = a(\psi,v)-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\, v dl - a(v,\psi)+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial\nu}\,\psi dl=$$

$$= \int_\Omega (\lambda b_1\psi_+ +f)v\rho d\rho d\theta \tag{3.86}$$

donde se ha utilizado que la forma bilineal a (vease (3.23)) es simétrica. De (3.86) se concluye que

$$C_1|\gamma| \le 2C_2(I+|f|_{L^1_\rho(\Omega)}) \tag{3.87}$$

siendo

$$C_1=\left|\int_{\partial\Omega} dl\right| , \quad C_2=\|v\|_{C^0(\bar\Omega)} ,$$

y donde se ha utilizado que por resultados standar se tiene que $v \in C^0(\bar{\Omega})$ y que

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\psi}{\partial\nu}\, dl = \int_\Omega \mathcal{L}\psi = \int_\Omega (-\lambda b_1\psi_+ - f)\rho d\rho d\theta = -I - \int_\Omega f\rho d\rho d\theta.$$

Nótese que las constantes C_1 y C_2 son independientesx de ψ por lo que sustituyendo en (3.83) se obtiene la estimación deseada. ■

Observación. El Lema 4 mejora el Lema 1 (véase también un resultado similar en el Lema 2 de Blum-Gallouet-Simon (1986)). En aquella ocasión la estimación era del tipo $(I+1/I)(1+|f|_{L^2_\rho(\Omega)})$ por lo que carecía de interés si $I \to 0$.

Ya estamos en condiciones de obtener un teorema de existencia para la "inner loop" bajo una hipótesis distinta a (3.65).

Teorema 5. *Supongamos $F(\psi)$ y $p(\psi)$ verificando (2.86) y (2.81). Entonces el problema (3.11), (3.12), (3.13) admite una solución débil $\psi \in H^1_\rho(\Omega)_c \cap H^2_\rho(\Omega)$. Si además F verifica*

$$-F(c)F'(c) \geq \lambda^2 \left(\int_\Omega b_1^2 \rho d\rho d\theta\right) c^2 \quad \forall c \in (0,T) \qquad (3.88)$$

para algún $T>0$ entonces si la función ψ antes citada es tal que $|\psi|_\infty < T$ se tiene que $\psi_+ \not\equiv 0$.

Demostración. Seguiremos un proceso paralelo al introducido en la demostración del Teorema 4. 1ª Etapa. Utilizando el Teorema del punto fijo de Schauder se prueba la existencia de $\psi \in H^1_\rho(\Omega)_c \cap H^2_\rho(\Omega)$ solución débil del problema (3.55), (3,56) y (3.57). Además, tal solución verifica que

$$|\psi|_{H^2_\rho(\Omega)} \leq C_1(I + C_2) \qquad (3.89)$$

con $C_1>0$ independiente de I y de ψ y $C_2 = C_2(|\Omega|, b_1, F_v, M)$ pero independiente de ψ. En efecto: basta recordar que el argumento de punto fijo se aplica a

$$f=b_0F(\varphi)+F(\varphi)F'(\varphi) \qquad (3.90)$$

y que por la hipótesis (2,86) se tiene que

$$|f|_{L^2_\rho(\Omega)} \le C_2$$

para una cierta constantes C_2 independiende de I.

2^a Etapa. Como en la demostración del Teorema 4 se define el esquema iterativo (3.61) y (3.62); pero reemplazando (3.63) por

$$\lambda \int_\Omega b_1(\psi_n)_+\rho d\rho = I_{n-1} \qquad (3.91)_n$$

siendo

$$I_{n-1} \equiv -\int_\Omega F(\psi_{n-1})F'(\psi_{n-1})\rho d\rho d\theta. \qquad (3.92)_n$$

Comencemos la iteración a partir de un $\psi_0 \in L^2_\rho(\Omega)$ con la sola condición $I_0=1$. Por la primera etapa se conoce la existencia de ψ_1. Además de la condición $(3.91)_1$ deducimos que $(\psi_1)_+ \not\equiv 0$ y por tanto se sigue que $I_1>0$. De manera análoga se puede repetir el proceso $\forall n\in\mathbb{N}$ obteniéndose ψ_n. Gracias a (3.89) se tendrá que

$$|\psi_n|_{H^2_\rho(\Omega)} \le C_1(I_n+C_2) \le C_1(|\rho|_{L^1(\Omega)} F_v M+C_2)$$

Por tanto existe una subsucesión (que denotamos de nuevo por ψ_n) tal que ψ_n converge (débilmente en H^2_ρ y fuertemente en $H^1_\rho(\Omega)_c$) a una cierta función ψ. Por el teorema de convergencia dnominada de Lebesgue se tiene que

$$(\psi_n)_+ \longrightarrow \psi_+, \quad F(\psi_n) \longrightarrow F(\psi) \text{ y } F'(\psi_n) \longrightarrow F'(\psi) \quad \text{en } L^2_\rho(\Omega)$$

y por tanto ψ es solución del problema buscado.

Veamos ahora que si la solución obtenida ψ es tal que $\|\psi\|_\infty<T$ entonces no es la trivial, e.d., $\psi_+ \not\equiv 0$. Observemos que

$$\frac{I_0}{\lambda} = \int_\Omega b_1(\psi_1)_+\rho d\rho d\theta \le |b_1|_{L^2_\rho} |(\psi_1)_+|_{L^2_\rho}$$

por lo que

$$\int_\Omega (\psi_1)^2 \rho d\rho d\theta \geq \frac{I_0^2}{\lambda^2 \int_\Omega b_1^2 \rho d\rho d\theta}.$$

Como $\|\psi_n\|_\infty \longrightarrow \|\psi\|_\infty$, podemos suponer que $\|\psi_n\|_\infty < T$. Por la hipótesis (3.88) se tiene que

$$I_1 = -\int_\Omega f(\psi_1)F'(\psi_1)\rho d\rho d\theta \geq (\lambda^2 \int_\Omega b_1^2 \rho d\rho d\theta) \int_\Omega (\psi_1)_+^2 \rho d\rho d\theta$$

$$I_0^2 = 1.$$

De manera análoga

$$I_n \geq (I_{n-1})^2 \geq (I_0)^{2n} = 1$$

y por tanto, pasando al límite

$$-\int_\Omega F(\psi)F'(\psi)\rho d\rho d\theta \geq 1$$

lo que implica (por (2.3)) que $\psi_+ \not\equiv 0$. □

Observación. Nótese que incluso si (3.88) no es verificada se tiene que $(\psi_n)_+ \not\equiv 0$ en la anterior demostración. Es claro que esto no asegura que $(\psi_+) \not\equiv 0$. Una manera de salvar esta dificultad es introducir la condición de contacto de la superficie del plasma con un <u>limitador</u> $D \subset \Omega$. La condición de contacto se expresa mediante

$$\sup_{x \in D} \psi(x) = 0 \tag{3.93}$$

El siguiente resultado es una daptación de otro bien conocido para Tokamaks:

Teorema 6 (Blum-Gallouet-Simon (1986)).

Seza $I>0$ y $f \in L^2(\Omega)$. Sea C^* el mayor conjunto de pares $(\psi,\lambda) \in H^2_\rho(\Omega)_c \times \mathbb{R}^+$ para los que satisface (3.79), (3.80), (3.81) y tal que C^* es conexo y λ recorre $\mathbb{R}^+-\{0\}$ cuando (ψ,λ) recorre C^*. Supongamos que

$$\exists (u,v) \in C^* \text{ tal que } u \leq 0 \text{ en } \mathcal{D} \tag{3.94}$$

Entonces existe un par $(\hat{\psi},\hat{\lambda})\in H^2_{\rho}(\Omega)_c \times \mathbb{R}^+$ solución de (3,79), (3.80), (3.81) y tal que se verifica (3.93). ■

Como consecuencia del proceso de demostración del Teorema 5 se tiene:

Corolario 2. *Supongamos que se verifica (3.94) con* $f\in L^{\infty}(\Omega)\|f\|_{L^{\infty}}\leq\|b_0\|_{\infty}F_v+M$. *Entonces* $\exists\lambda>0$ *y* ψ *solución de (3.11), (3.12), (3.13) tal que verifica también (3.94).*

4. EL PROBLEMA GENERAL: FORMULACION NO LOCAL.

El propósito de esta sección es abordar el problema general e.d. hallar ψ y F verificando

$$-\mathcal{L}\psi = b_0(\rho,\theta)F(\psi) + F(\psi)\frac{dF}{d\psi}(\psi) + \lambda b_1(\rho,\theta)\psi_+ \text{ en } \Omega \tag{4.1}$$

$$\psi=\gamma \text{ (cte)} \quad \text{en } \partial\Omega \tag{4.2}$$

$$\int_{\{\psi\geq c\}}[F(\psi)F'(\psi) + b_1(\rho,\theta)p'(\psi)]\rho d\rho d\theta=0 \quad \forall c\in[\inf\psi,\sup\psi]. \tag{4.3}$$

En esta sección supondremos que la constante γ es negativa y está prefijada de antemano. Esto no es ninguna restricción en el caso de Stellators pues el campo magnético en el vacío (e.d. fuera del plasma) puede ser medido "a priori".

Veremos que el problema (4.1), (4.2), (4.3) puede ser reformulado en términos de un problema no local gracias a la noción de reordenamiento simétrico de una función. Comenzaremos recordando un resultado conocido:

Teorema 6 (Fórmula co-area de Federer)

Sea $u:\Omega\to\mathbb{R}$ *una función Lipschitciana y* $f\in L^1(\Omega)$. *Entonces*

$$\int_{\Omega}|\nabla u(x)|f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{u^{-1}(t)}f(x)dH_{N-1}(x) \tag{4.4}$$

donde H_{N-1} *es la medida (N-1)-dimensional de Hausdorff.*

Observacion. Si se sabe que $u\geq c$ sobre Ω entonces se tiene que

$u^{-1}(t)=\phi$ (el conjunto vacío) si $t<c$ y por tanto

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|f(x)dx=\int_c^\infty dt\int_{u^{-1}(t)} f(x)dH_{N-1}(x).$$

Teorema 7.

Supongamos $\psi\in C^\infty(\overline{\Omega})$ verificando la condición (4.3) entonces para casi todo $c\in(\inf\psi, \sup\psi)$ se tiene que

$$F(c)F'(c)=\frac{-p'(c)\displaystyle\int_{\psi^{-1}(c)}\frac{b_1(x)}{|\nabla\psi(x)|}dH_1(x)}{\displaystyle\int_{\psi^{-1}(c)}\frac{dH_1(x)}{|\nabla\psi(x)|}} \tag{4.5}$$

Demostración. Utilizando el Teorema 6 y el teorema de Sard, que asegura que casi para todo c se tiene que $|\nabla\psi(x)|\neq 0$ sobre la variedad 1-dimensional $\psi^{-1}(c)$, se concluye que

$$\int_c^\infty\left(\int_{\psi^{-1}(t)}\frac{F(\psi)F'(\psi)}{|\nabla\psi(x)|}dH_1(x)\right)dt=-\int_c^\infty\left(\int_{\psi^{-1}(t)}\frac{b_1(x)p'(\psi)}{|\nabla\psi(x)|}\,dH_1(x)\right)dt$$

utilizando que sobre el conjunto $\psi^{-1}(t)$ se tiene que

$$F(\psi)F'(\psi)=F(t)F'(t)\quad,\quad p'(\psi)=p'(t)$$

y derivando respecto a c se obtiene (4.5), donde se ha utilizado que $\rho d\rho d\theta=dx$ y la notación usada es $x=(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$ y dH_1 la medida unidimensional de Hausdorff. □

Para concluir la formulación no local de (4.3) observemos que

$$F(c)F'(c)=\frac{1}{2}(F^2(c))'$$

y que si denotamos por

$$Q(c,\psi)=F(c)F'(c)=(3.3) \tag{4.6}$$

entonces se tiene que

$$F(c)=\left[2\int_0^c Q(s,\psi)ds+F_v^2\right]^{1/2}. \qquad (4.7)$$

Corolario 3. Toda solución ψ de (4.1) y (4.3) que sea de clase C^∞ verifica

$$-\mathscr{L}\psi(x)=b_0(x)\left[\int_0^{\psi(x)} Q(s,\psi)ds+F_v^2\right]^{1/2}+$$

$$+p'(\psi(x))\left[b_1(x)-\int_{\{y\in\Omega:\,\psi(y)=\psi(x)\}}\frac{b_1(y)}{|\nabla\psi(y)|}dH_1 \Big/\!\!\Big/ \int_{\{y\in\Omega:\,\psi(y)=\psi(x)\}}\frac{dH_1}{|\nabla\psi(y)|}\right] \qquad (4.8)$$

Observación. Fijada ψ, la cantidad

$$V(c;\psi)=\int_{\{\psi\geq c\}}\rho d\rho d\theta$$

representa el "volumen" (en realidad area) del conjunto $\{\psi\geq c\}$. Por la observación anterior se tiene que si $\psi\in C^\infty(\bar{\Omega})$ entonces casi para todo $c\in[\inf\psi, \sup\psi]$ se cumple que

$$\frac{\partial V}{\partial c}(c:\psi)=-\int_{\psi^{-1}(c)}\frac{dH_1(x)}{|\nabla\psi(x)|}$$

De esta manera la función F viene determinada implicitamente por (4.5) y (4.6) a través de la función $\frac{\partial V}{\partial c}$. La función $\frac{\partial V}{\partial c}$ aparece en varios trabajos relacionados con plasmas en equilibrio (vease por ejemplo, Greene-Johnson (1961) [fórmulas (47) y (50)], Grad-Hu-Stevens (1975). Con frecuencia esos autores invierten la función V como función de ψ escribiendo $\psi(V)$ (en realidad $\psi(c:V)$).

Veamos a continuación como el cociente

$$\int_{\psi^{-1}(c)}\frac{b_1(x)dH_1}{|\nabla\psi(x)|}:\int_{\psi^{-1}(c)}\frac{dH_1}{|\nabla\psi(x)|}$$

puede ser equivalentemente representado en términos de la derivada de la función reordenamiento relativo introducida en

Mossino-Temam [1981] para el tratamiento de la Queer Differential Equation de Grad-Hu-Stevens (1975), y otros problemas estudiados por Mercier (1974). Nuestro desarrollo se fundamenta en Rakotoson (1988).

Definición 1. Dada una función $u\in L^1(\Omega)$ se define la <u>función de distribución de u</u> a la función μ_u: [inf u, sup u]$\longrightarrow(-\infty,\infty)$ dada por

$$\mu_u(t)=\text{med}\{x\in\Omega: u(x)>t\}.$$

<u>El reordenamiento decreciente de u</u> es la función $u_*: [0,|\Omega|]\to\mathbb{R}$ dada por

$$u_*(s)=\text{Inf}\{t\in\mathbb{R},\ \mu_u(t)\le s\}.$$

Observese que $\mu_u(t)$ es siempre una función continua por la derecha y decrece de $\mu_u(-\infty)=|\Omega|$ a $\mu_u(+\infty)=0$, teniendo una discontinuidad cada vez u tiene una "región plana" (flat region) en el nivel t; e.d., $\text{med}\{x\in\Omega: u(x)=t\}$ (que denotaremos también por $|u=t|$) es estrictamente positiva. Si por el contrario u no tiene regiones planas (lo que sucede si por ejemplo $u\in C^\infty$ vía el Teorema de Sard) entonces la función $u_*(s)$ es sencillamente la inversa de μ_u, e.d.

$$\mu_u(u_*(s))=s \qquad \forall s\in[0,|\Omega|].$$

Cuando hay regiones planas $u_*(s)$ es el punto final del intervalo $\mu_u^{-1}(s)=\{t\in\Omega: \mu(t)=s\}$.

Recordemos ahora la noción de reordenamiento relativo introducida en Mossino-Temam (1981):

Definición 2. Dada $v\in L^1(\Omega)$ se define

$$w(s)=\begin{cases} \displaystyle\int_{u>u_*(s)} v(x)dx & \text{si } |u=u_*(s)|=0 \\ \displaystyle\int_{u>u_*(s)} v(x)dx+\int_0^{s-|u>u_*(s)|} \left(v\Big|_{P(s)}\right)_*(\sigma)d\sigma & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde en la última integral v está restringida al conjunto $P(s)=\{u=u_*(s)\}$. Por último, se define el <u>reordenamiento relativo de v respecto de u</u> a la función

$$v_{*_u}(s)=\frac{dw}{ds}(s) \qquad , \; s\in[0,|\Omega|].$$

Observación. En Mossino-Temam (1981) y Mossino-Rakotoson (1980) se muestra que si $v\in L^p(\Omega)$ entonces $w\in W^{1,p}((0,|\Omega|))$ con

$$\left\|\frac{dw}{ds}\right\|_{L^p(0,|\Omega|)}\leq\|v\|_{L^p(\Omega)}$$

y que

$$w(s)=\lim_{\lambda\to 0}\int_0^s\frac{(u+\lambda v)_*(\tau)-u_*(\tau)}{\lambda}d\tau,$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{(u+\lambda v)_*-u_*}{\lambda}=\frac{dw}{ds}=v_{*_u}.$$

Señalemos también que si u es una función constante $u\equiv c$, entonces $v_{*_c}=v_*$; que $c_{*_u}=c$ y que en general v_{*_u} no es una función decreciente.

Siguiendo a Rakotoson (1988) se tiene

Proposición 2. *Sea $v\in L^\infty(\Omega)$ y u Lipschitcian tal que $(1/|\nabla v|)\in L^1(\Omega)$. Entonces*

$$v_{*_u}(s)=\frac{\displaystyle\int_{u=u_*(s)}[v(x)/|\nabla v(x)|]d\Gamma}{\displaystyle\int_{u=u_*(s)}[1/|\nabla u(x)|]d\Gamma} \tag{4.9}$$

casi para todo $s\in(0,|\Omega|)$, siendo $d\Gamma$ la medida (N-1) dimensional de Lebesgue.

Demostración. Por el Teorema de Federer, dados a<b se tiene

$$\mu_u(a)-\mu_u(b)=\int_{a\leq u\leq b}dx=\int_a^b dt\int_{u=t}\frac{d\Gamma}{|\nabla u(x)|}$$

y por tanto

$$\mu'_u(t)=\int_{u=t}\frac{d\Gamma}{|\nabla u(x)|}$$

En particular μ es absolutamente continua y por un resultado de teoría de la medida (vease p.e. Rudin (1979) p. 112) transforma conjuntos de medida nula en conjuntos de medida nula. Como hemos supuesto que $(1/|\nabla v|)\in L^1(\Omega)$ esto implica que el conjunto $\mathcal{E}=\{t\in\mathbb{R}: \nabla u(x)\neq 0 \text{ c.p.t. } x\in u^{-1}(t)\}$ es de medida nula y por tanto $|\mu_u(\mathcal{E})|=0$. En consecuencia, casi para todo $s\in(0,|\Omega|)$ $u_*(s)\in\mathbb{R}-\mathcal{E}$. Sea ahora $h>0$ y s tal que $|u=u_*(s)|>0$.
Entonces

$$w(s+h)-w(s)=\int_{u_*(s+h)\le u\le u_*(s)} v(s)dx\ .$$

Llamando $K_h=\{x: u_*(s+h)\le u(x)\le u_*(s)\}$ se tiene que K_h es compacto, $(1/|\nabla u|)\in L^2(K_h)$ y $(v/|\nabla v|)\in L^1(K_h)$. Por el Teorema 6 se tiene que

$$\frac{w(s+h)-w(s)}{h}=\frac{1}{h}\int_{u_*(s)}^{u_*(s+h)}dt\int_{u=t}\frac{v(x)d\Gamma}{|\nabla u(x)|}$$

Escribiendo

$$u_*(s+h)=u_*(s)+R(s,h) \qquad \text{con } R(s+h)=h\frac{du_*}{ds}(s)+0(h)$$

(du_*/ds existe en ctp pues u_* es decreciente y $R(s,h)\neq 0$ pues $(u_*)^{-1}(s)$ no es una región plana), se llega a que

$$\frac{w(s+h)-w(s)}{h}=\frac{R(s,h)}{h}\ \frac{1}{R(s,h)}\int_{u_*(s)}^{u_*(s)+R(s,h)}dt\int_{u=t}\frac{v(x)d\Gamma}{|\nabla u(x)|}\ .$$

Cuando $h\to 0$ se concluye que

$$v_{*u}(s)=\frac{dw}{ds}(s)=-\frac{du_*}{ds}(s)\int_{u=u_*(s)}\frac{v(x)d\Gamma}{|\nabla u(x)|}$$

Finalmente como $u_*=(\mu_u)^{-1}$, de la fórmula (4.4) deducimos que

$$\frac{du_*}{ds}=-1/\int_{u=u_*(s)}\frac{d\Gamma}{|\nabla u(x)|}$$

con lo que queda demostrado (4.9). $\square$

Corolario 4. *Supongamos* $b_1 \in L^\infty(\Omega)$ *y* ψ *Lipschitz tal que* $(1/|\nabla\psi|) \in L^1(\Omega)$. *Entonces casi para todo* $s \in (0,|\Omega|)$ *se tiene que*

$$\int_{\psi=\psi_*(s)} \frac{b_1(x)dH_1}{|\nabla\psi(x)|} \Bigg/ \int_{\psi=\psi_*(s)} \frac{dH_1}{|\nabla\psi(x)|} = b_{1*\psi}(s) \ . \qquad (4.10)$$

Corolario 5. *Toda solución* ψ *de (4.1), (4.3) Lipschitciana y tal que* $(1/|\nabla\psi(x)|) \in L^1(\Omega)$ *verifica*

$$-\mathcal{L}\psi = b_0(x)\left[\int_0^{\psi(x)} b_{1*\psi}(s)d\mu(\psi(x)) + F_v^2\right]^{1/2} + \qquad (4.11)$$

$$p'(\psi(x))[b_1(x) - b_{1*\psi}(s)]$$

donde $s=\mu_\psi(\psi(x))=med\{y\in\Omega: \psi(y)\geq\psi(x)\}=\mu_\psi(\psi_*(s))$.

Señalemos que el Corolario 5 puede ser generalizado a la sola condición de $\psi \in W_\rho^{2,p}(\Omega)$ para algún $p>1$ y ψ sin rellanos. e.d. tal que

$$|\{(\rho,\theta)\in\Omega \quad \nabla\psi(\rho,\theta)\}|=0$$

Tomando

$$c=\psi_*(s) \qquad , \ s\in(0,|\Omega|)$$

resulta

$$F(\psi_*(s))F'(\psi_*(s))=-p'(\psi_*(s))b_{1*\psi}(s)$$

donde $b_{1*\psi}(s)$ representa el reordenmaiento relativo de b_1 respecto de ψ. Si ahora fijamos $x(\rho,\theta)\in\Omega$ y hacemos coincidir

$$c=\psi(x)=\psi_*(s)$$

se ha de tener

$$s=\mu(\psi(x))=|\psi>\psi(\rho,\theta)|$$

donde se ha utilizado la notación

$$|\psi>\psi(\rho,\theta)|=\mathrm{med}\{(\overline{\iota},\overline{\theta})\in\Omega:\psi(\overline{\rho},\overline{\theta})>\psi(\rho,\theta)\}$$

y así

$$F(\psi(x))F'(\psi(x))=-p'(\psi(x))b_{1*\psi}(|\psi>\psi(\rho,\theta)|) \tag{4.12}$$

La expresión (4.7) pasar a a ser

$$F(\psi(x))=\left[-2\int_0^{\psi_+(x)} p'(c)b_{1*\psi}(|\psi>c|)dc+F_v^2\right]_+^{1/2} . \tag{4.13}$$

(nòtese que a la hora de hallar ψ conviene poner la parte positiva antes de tomar la raiz). Haciendo el cambio de variable $c=\psi_*(s)$ en la integral anterior resulta

$$F(\psi(x))=\left[-2\int_{|\psi>0|}^{|\psi>\psi_+(x)|} b_{1*\psi}(s)p'(\psi_+(s))\frac{d\psi_*}{ds}(s)ds+F_v^2\right]_+^{1/2} , \tag{4.14}$$

donde se ha utilizado que $|\psi>\psi_*(s)|=s$ (μ es la inversa de ψ_* cuando no hay "rellanos" en ψ) y que $0=\psi^*(|\psi>0|)$, $\psi\ (x)=\psi^*(|\psi>\psi\ (x)|)$. Observemos también que

$$p'(\psi_*(s))\frac{d\psi_*}{ds} = \frac{d}{ds}p(\psi_*(s))$$

con lo que obtenemos que

$$F(\psi(x))=\left[F_v^2-2\int_{|\psi>0|}^{|\psi>\psi_+(x)|} p(\psi_*)'(s)(b_{1*\psi}(s)ds\right]_+^{1/2} .$$

Si finalmente suponemos (como es acostumbrado: veanse las referencias a los trabajos de Temam, Berestycki-Brezis, Blum, Mossino, Rakotoson y otros en los Informes #1 y #2) la ley de estado

$$p'(\psi)=\lambda\psi_+ \qquad \text{e.d.} \qquad p(\psi)=\frac{1}{2}(\psi_+)^2$$

el problema (P) para soluciones $\psi\in W_\rho^{2,p}(\Omega)$ sin rellanos se puede enunciar como

$$(P^*)\quad \begin{cases} -\mathscr{L}\psi=b_0\left[F_v-\lambda\int_{|\psi>0|}^{|\psi>\psi_+(x)|}[(\psi_*)_+^2]'(\sigma)b_{1*\psi}(\sigma)d\sigma\right] + \\ +\lambda\psi_+[b_1-b_{1*\psi}(|\psi>\psi(x)|)] & \text{en } \Omega , \\ \psi=\gamma & \text{en } \partial\Omega , \end{cases}$$

donde se ha utilizado que $(\psi_*)^2_+=[(\psi_+)^2]_*$.

No es difícil mostrar que si $\psi\in W^{2,p}_{\rho}(\Omega)$ (tal que no tiene rellanos) verifica (P*) entonces existe F verificando (P). Para ello basta definir F(c) mediante (4.13) y razonar en sentido inverso.

Finalizaremos este trabajo presentando un resultado de existencia de soluciones mostrado en Díaz-Rakotoson (1993).

Teorema 8. *Supongamos* $b_1>0$, $\gamma\leq 0$ *e* $\inf_{\Omega} |b_0|>0$. *Entonces existe* $\Lambda>0$ *tal que si* $\lambda\|b_1\|_\infty<\Lambda$ *existe un par* ψ, F *solución de* (P^*) *y de (4.1), (4.2) (4.3). Además* $\psi\in W^{1,\infty}(\Omega)$, ψ *no tiene rellanos,* $F\in W^{1,\infty}(\inf \psi, \sup \psi)$, $F(c)>0$ *si* $c>0$ *y* F *está enteramente determinada por* ψ.

AGRADECIMIENTOS.

Las investigaciones del autor están parcialmente financiadas por los contratos nº 74/91 de la Asociación EURATOM/CIEMAT.

BIBLIOGRAFIA.

Adams, R. (1975): *Sobolev spaces*, Acad. Press

Agmon, S., Douglas, A., Nirenberg, L. (1959): Estimates near the boundary of solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary value conditions I, *Comm. Pure Appl. Math. 12*, pp. 623-727.

Almgren, F.J., Lieb, E. (1989): Symmetric decreasing rearrangement is sometimes continuous. *Journal of the American Math. Soc. 2*, pp. 683-772.

Brezis, H. (1983): *Analyse Fonctionelle*. Masson.

Diaz, J.I. (1991): Modelos bidimensionales de equilibrio magnetohidrodinámico para Stellarators. Informe #1. Publicaciones del CIEMAT, 38 pp.

Diaz, J. I. (1992): Modelos bidimensionales de equilibrio magnetohidrodinámico para Stellarators. Informe #2. Publicaciones del CIEMAT, 30 pp.

Diaz, J. I., Rakotoson, J.M. (1993): On a two-dimensional stationary free boundary problem arising in the confinement of a plasma in a Stellerator. Aparecerá en *Cont. Rendus. Acad. Sciences Paris.*

Federer, H. (1969): *Geometric Measure Theory.* Springer-Verlag.

Freidberg, J.P. (1982): Ideal magnetohydrodynamic theory of magnetic fusion systems, *Reviews of Modern Physics 54*, pp. 801-902.

García, L. (1993): Application of the averaged method for plasma equilibrium studies. En este volumen.

Hender, T.C., Carreras, B.A. (1984): Equilibrium calculations for helical axis stellarators, *Phys. Fluids 27*, pp. 2101-2120.

Kinderlehrer, D. Stampacchia, G. (1980): *An introduction to variational inequalities and their applications.* Academic Press.

Kufner, A. (1980): *Wieghted Sobolev spaces.* Teuber-Texte zur Mathematik.

Mikhlin, S. (1970): *An advanced course of mathematical physics.* North- Holland.

Mossino, J. (1984): *Inegalités Isoperimetriques et Application en Physique.* Hermann.

Mossino, J., Temam, R. (1981): Directional derivative of the increasing rearrangement mapping and application to a queer differential equation in plasma physics, *Duke Math. 41*, pp. 475-495.

Necas, J. (1967): *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.* Masson.

Rakotoson, J.M. (1993): Relative rearrangement for highly nonlinear equations. Enviado para su publicación.

Rakotoson, J.M., Simon, B. (1993): Relative rearrangement on a measure space. Application to the regularity of weighted monotone rearrangement. Part I. *Appl. Math. Lett. 6*, pp. 75-58. Part II. Appl. Math. Lett. 6 pp. 78-82.

Simon, J. (1985): Asymtptotic behaviour of a plasma induced by an electric current, *Nonlinear Analysis*, 149-169.

Triebel, H. (1978): *Interpolation Theory, Function Spaces Differential Operators*. Deutscher Verlag der Wissenschaffen.

Ziemer, W. (1989): *Weakly differentiable functions*. Springer-Verlag.

J.I. DIAZ
Departamento de Matemática Aplicada
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
28040 - Madrid.