J.I. DIAZ y J.F. PADIAL

Soluciones en el espacio BV de un problema parabólico no lineal asociado a modelos de flujos turbulentos.

1 Introducción. Noción de Solución en BV$_t$.

El principal propósito de esta comunicación es el estudio de la unicidad de la solución del siguiente problema de difusión no lineal

$$
\begin{aligned}
b(u)_t - \mathrm{div}\phi(\nabla u - k(b(u))\mathbf{e}) + g(x,u) &= f(t,x) \quad \text{en } (0,\ T)\times\Omega = Q_T, &(1)\\
u(t,\ x) &= 0 \quad \text{en } (0,\ T)\times\partial\Omega, &(2)\\
u(0,\ x) &= u^0(x) \quad \text{en } \Omega, &(3)
\end{aligned}
$$

donde Ω es un abierto acotado de $I\!R^N$, $T > 0$, b es una función continua no decreciente, k y $g(x,\ \cdot)$ son funciones continuas y ϕ es la función vectorial

$$\phi(\xi) = |\xi|^{p-2}\xi \qquad \forall\ \xi \in I\!R^N,\ p > 1. \tag{4}$$

Por $\mathbf{e}$ notamos un vector unitario de $I\!R^N$ prefijado de antemano.

La ecuación (1) aparece en diferentes modelos físicos relativos a flujos turbulentos. Veamos dos de ellos. El primero se refiere a la *filtración* de un fluido incompresible en régimen turbulento a través de un medio poroso, cuya ecuación es $\theta_t - \mathrm{div}\Big(|\nabla\varphi(\theta) - k(\theta)\mathbf{e}|^{p-2}(\nabla\varphi(\theta) - k(\theta)\mathbf{e})\Big) = 0$, donde θ es el contenido volumétrico de humedad, $k(\theta)$ es la conductividad hidráulica, $\varphi(\theta)$ es el potencial hidrostático y $\mathbf{e}$ el vector unitario en la dirección vertical (**Bear** [1972]). El segundo modelo se refiere a la *descarga* en un conducto largo de un gas en régimen turbulento. Si ρ, P y v son la densidad, la presión y la velocidad respectivamente, de las leyes de conservación de la masa $\rho_t + (\rho v)_x = 0$, del momento lineal $\rho v_t + \rho v v_x + \mathrm{P}_x = -\frac{\lambda}{2}\rho|v|v$ se obtiene que $\rho v_t + \rho v v_x \approx 0$ para t grande, lo que da lugar al problema (ref1.1) con P$= b(u) = u^{1/2}\mathrm{sign}u$, $k = f = g = 0$ y p$= 3/2$ (**Díaz-Liñan** [1984]).

Volviendo al problema de partida, en **Díaz–Thelin** [1993] se obtuvieron resultados de existencia y unicidad suponiendo $b(u)_t \in L^1((0,\ T)\times\Omega)$ y otras hipótesis adicionales. El objetivo de esta comunicación es mostrar la unicidad bajo hipótesis más generales. Para ello se trabaja en la clase de funciones tales que $\frac{\partial b(u)}{\partial t} \in \mathrm{BV}_t$.

Inspirados en los trabajos de **Vol'pert–Hudjaev** [1969, 1985] y **Jingxue** [1990, 1992] introducimos los siguientes conceptos:

Definición 1 *Decimos que* $w \in BV_t(Q_T)$ *si* $w \in L^1(Q_T)$ *y* $\frac{\partial w}{\partial t}$ *es una medida de Radón finita sobre* Q_T.

Definición 2 *Diremos que* **u es una solución en** $\mathbf{BV_t}$ *del problema (1), (2) y (3) si*

$$u \in L^p(0,\ T; \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty((0,\ T) \times \Omega),\ b(u) \in BV_t(Q_T) \tag{5}$$

y se verifica

$$< \frac{\partial b(u)}{\partial t},\ \varphi > + \int_\Omega b(u^0(x))\varphi(0,\ x) =$$
$$= \iint_{Q_T} \phi(\nabla u - k(b(u))\mathrm{e}) \cdot \nabla\varphi + \iint_{Q_T} g\varphi dx dt - \iint_{Q_T} f\varphi,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty([0,\ T];\ C^\infty(\Omega))$ *tal que* $\varphi(T,\ x) = 0$ *en* Ω.

Supondremos las siguientes hipótesis:

$$b : I\!R \to I\!R,\quad \text{continua, creciente y } b(0) = 0; \tag{6}$$
$$b^{-1}\quad \text{localmente lipschitz;} \tag{7}$$
$$k : I\!R \to I\!R,\quad \text{continua,} \tag{8}$$
$$|k(b(s_1)) - k(b(s_2))| \le C|s_1 - s_2|^\gamma\ \ \forall s_1,\ s_2 \in I\!R, \tag{9}$$
$$\gamma \ge \frac{1}{p} \text{ si } 1 < p < 2,\ \gamma \ge \frac{1}{2} \text{ si } p > 2;$$
$$g : \Omega \times I\!R \to I\!R \text{ función de Caratheodory,} \tag{10}$$
$$|g(x,\ s)| \le \beta(|s|)(1 + d(x)) \text{ con } d \in L^1(\Omega),\ \beta \text{ continua y creciente;}$$
$$g(x, s_1) - g(x, s_2) \ge -C^*(b(s_1) - b(s_2))\quad \forall s_1,\ s_2 \in I\!R \text{ y } s_1 > s_2; \tag{11}$$
$$f \in L^1((0,\ T) \times \Omega),\ u^0 \in L^1(\Omega). \tag{12}$$

2 Resultado principal. Unicidad de soluciones en $\mathbf{BV}_t$.

La unicidad será consecuencia del siguiente resultado más general.

Teorema 1 *Sean* b, k *y* g *funciones que verifican las hipótesis dadas anteriormente, si* u_1 *y* u_2 *son dos soluciones en* BV_t *para datos* f_1, u_1^0 *y* f_2, u_2^0 *verificando (12), entonces se tiene que para todo* $t \in (0,\ T)$:

$$\int_\Omega \Big(b(u_1(t,\ x)) - b(u_2(t,\ x))\Big)_+ \le\ e^{C^*t}\Big\{\int_\Omega \Big(b(u_1^0(x)) - b(u_2^0(x))\Big)_+ +$$
$$+\ \iint_{0\,\Omega}^{t} e^{C^*t}\Big(f_1(t,\ x) - f_2(t,\ x)\Big)_+\Big\}. \square$$

A partir del Teorema anterior se obtienen las siguientes consecuencias

Corolario 1 *En las hipótesis del Teorema anterior se verifica*

$$\begin{aligned}\|b(u_1(t,\ x)) - b(u_2(t,\ x))\|_{L^1(\Omega)} \leq\ & e^{C^*t}\Big\{\|b(u_1^0(x)) - b(u_2^0(x))\|_{L^1(\Omega)} + \\ +\ & \|e^{C^*t}\Big(f_1(t,\ x) - f_2(t,\ x)\Big)\|_{L^1((0,\ t)\times\Omega)}\Big\} \cdot \square\end{aligned}$$

Corolario 2 *A lo más existe una única solución en BV_t del problema (1).* $\square$

Demostración: Llamando $z = b(u_1) - b(u_2)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} =\ & \operatorname{div}\Big\{\phi(\nabla u_1 - k(b(u_1))\mathbf{e}) - \phi(\nabla u_2 - k(b(u_2))\mathbf{e})\Big\} - \\ & - (g(x,\ u_1) - g(x,\ u_2)) + f_1(t,\ x) - f_2(t,\ x) \qquad \text{en } Q_T \\ z(0,\ x) =\ & b(u_1^0(x)) - b(u_2^0(x)) = z^0 \qquad \text{c.t. } x \in \Omega \\ z(t,\ x) =\ & 0 \qquad (t,\ x) \in (0,\ T) \times \partial\Omega.\end{aligned} \tag{13}$$

Para cada $n > 0$ como en **Díaz** [1984], definimos $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $T_n(s) = 0, s \leq 0; \frac{n^2s^2}{2},\ 0 < s \leq \frac{1}{n};\ 2ns - \frac{n^2s^2}{2} - 1,\ \frac{1}{n} < s \leq \frac{2}{n};\ 1,\ s > \frac{2}{n}$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq \varphi \in C_0^\infty((0,\ T))$ definimos el funcional

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_n(u_1,\ u_2,\ \varphi) =& \iint_{Q_T} T_n(u_1 - u_2) z \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \\ & - \iint_{Q_T} \Big\{(g(x,\ u_1) - g(x,\ u_2)) + (f_1 - f_2)\Big\}\varphi T_n(u_1 - u_2).\end{aligned} \tag{14}$$

Multiplicando (13) por $T_n(u_1 - u_2)\varphi$ e integrando en Q_T

$$\begin{aligned}\iint_{Q_T} \varphi T_n(u_1 - u_2)\frac{\partial z}{\partial t} =& -\iint_{Q_T} \varphi T_n'(u_1 - u_2)[\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)]\nabla(u_1 - u_2) - \\ & - \iint_{Q_T} \Big\{(g(x,\ u_1) - g(x,\ u_2)) + (f_1 - f_2)\Big\}\varphi T_n(u_1 - u_2),\end{aligned} \tag{15}$$

con $\xi_1 = \nabla u_1 - k(b(u_1))\mathbf{e}$ y $\xi_2 = \nabla u_2 - k(b(u_2))\mathbf{e}$. La demostración del teorema se desarrolla ahora viendo que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{J}_n(u_1,\ u_2,\ \varphi) \geq 0$. Distinguimos tres etapas.

ETAPA 1. Se verifica la desigualdad

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{Q_T} \varphi T_n'(u_1 - u_2)[\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)] \cdot [\nabla u_1 - \nabla u_2] dx dt \geq 0 \tag{16}$$

(similar a la de T-acretividad en L^1 del operador de difusión) o bien

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{Q_T} \varphi T_n'[\phi(\xi_1) - \phi(\nabla \xi_2)] \cdot [\nabla u_1 - \nabla u_2] = \lim_{n\to\infty} I_1(n) + I_2(n) \geq 0,$$

con

$$I_1(n) = \iint_{Q_T} \varphi T_n'[\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)][\xi_1 - \xi_2] \ \text{ y}$$

$$I_2(n) = \iint_{Q_T} \varphi T_n'[\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)][\mathsf{e}(k(b(u_1)) - k(b(u_2)))].$$

Buscamos una estimación de $|I_2(n)|$ en términos de $I_1(n)$, para ello distinguimos el caso $1 < p \leq 2$ y el caso $p > 2$. En ambas situaciones necesitamos de la desigualdad

$$|\phi(\eta_1) - \phi(\eta_2)|^{p'} \leq C\Big\{(\eta_1 - \eta_2) \cdot (\phi(\eta_1) - \phi(\eta_2))\Big\}^{\frac{\beta}{2}} \cdot \Big\{|\eta_1|^p + |\eta_2|^p\Big\}^{1-\frac{\beta}{2}} \quad (17)$$

donde $\beta = 2$ si $1 < p < 2$ y $\beta = p'$ si $p \geq 2$, que se obtiene como consecuencia de la desigualdad de Tartar aplicada a $\phi(\eta) = |\eta|^{p-2}\eta$.

• **Caso** $1 < p \leq 2$: Considerando la desigualdad de Young

$$\begin{aligned}|I_2(n)| \;&\leq\; \iint_{Q_T} |\varphi T_n'[\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)] \cdot \mathsf{e}(k(b(u_1)) - k(b(u_2)) \qquad (18)\\ &\leq\; \frac{\varepsilon}{p'} \iint_{Q_T} \varphi T_n'(u_1 - u_2)|\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)|^{p'} + \\ &\quad+\frac{1}{p\varepsilon} \iint_{Q_T} \varphi T_n'(u_1 - u_2)|k(b(u_1)) - k(b(u_2))|^p\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Aplicando (17) y considerando la hipótesis (8) se obtiene

$$|I_2(n)| \leq \frac{\varepsilon C}{p'} I_1(n) + \frac{C}{\varepsilon p} \iint_{\{(t,x):0 \leq u_1 - u_2 \leq \frac{2}{n}\}} \varphi \frac{2}{n} n |u_1 - u_2|^{\gamma p - 1},$$

lo que prueba (16).

• **Caso** $p > 2$: Aplicando la desigualdad de Hölder al segundo miembro de (18) se obtiene que

$$\begin{aligned}|I_2(n)| \leq \;& \Big\{\iint_{Q_T} \varphi T_n'(u_1 - u_2)|\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)|^{p'}\Big\}^{\frac{1}{p'}} \cdot \qquad (19)\\ & \cdot\Big\{\iint_{Q_T} \varphi T_n'(u_1 - u_2)|k(b(u_1)) - k(b(u_2))|^p\Big\}^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Utilzando la desigualdad (17) con $\beta = p'$ y $\eta_1 = \xi_1$, $\eta_2 = \xi_2$, posteriormente Hölder con exponentes $\frac{2}{p'}$ y $\frac{2}{2-p'}$ y considerar (8) se tiene que $|I_2(n)| \leq 2^\gamma \mathcal{A}(n) I_1^{\frac{1}{2}}(n) n^{\frac{2-p'}{2p'} + \frac{1-p\gamma}{p}}$ con

$\mathcal{A}(n) = C\Big(\iint_{\{0 \leq u_1 - u_2 \leq 2/n\}} \varphi(|\xi_1|^p + |\xi_2|^p) dx dt\Big)^{\frac{2-p'}{2p'}}$ lo que implica (16).

ETAPA 2. Una expresión equivalente de $\mathbf{J}_n$ y positividad del límite. En la obtención de una nueva expresión para $\mathbf{J}_n$ se utilizaran las propiedades del espacio BV_t (vease **Vol'pert–Hudjaev**[1969–1985], **Jingxue** [1990]). Ya que u_1 y u_2 son soluciones rn BV_t, $b(u_1)$, $b(u_2) \in BV_t(Q_T)$ y $u_i \in BV_t(Q_T)$, $i = 1, 2$ por ser b^{-1} es localmente Lipschitz. Por la regularidad de T_n, $T_n(u_1 - u_2)$, $\varphi T_n(u_1 - u_2) \in BV_t(Q_T)$. Por otra parte (aunque no para las propias funciones de BV_t) se verifican las reglas de derivación de un producto, de la composición y la formula de Green para sus funciones simétricas (que identificaremos mediante una barra superior) respecto a t (vease **Vol'pert–Hudjaev** [1985]). Se tiene entonces que

$$\iint_{Q_T} T_n(\overline{u}_1-\overline{u}_2)\overline{z}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \iint_{Q_T}\overline{z}\frac{\partial\varphi T_n(u_1-u_2)}{\partial t} - \iint_{Q_T}\varphi\overline{z}\frac{\partial T_n(u_1-u_2)}{\partial t}. \quad (20)$$

$$\begin{aligned}\iint_{Q_T}\overline{z}\frac{\partial\varphi T_n(u_1-u_2)}{\partial t} &= -\iint_{Q_T}(f_1(t,\ x)-f_2(t,\ x))\varphi T_n(u_1-u_2)+ \quad (21)\\ &+\iint_{Q_T}\varphi T_n'(u_1-u_2)[\phi(\xi_1)-\phi(\xi_2)][\nabla u_1-\nabla u_2].\end{aligned}$$

Tomando (21) en (20) y sustituindo en (14)

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_n(u_1,\ u_2,\ \varphi) &= \iint_{Q_T}\varphi T_n'(u_1-u_2)[\phi(\xi_1)-\phi(\xi_2)]\cdot[\nabla u_1-\nabla u_2]- \quad (22)\\ &-\iint_{Q_T}\varphi\overline{z}\frac{\partial T_n(u_1-u_2)}{\partial t}.\end{aligned}$$

Considerando las propiedades de T_n , de b y de BV_t se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}-\iint_{Q_T}\varphi\overline{z}\frac{\partial}{\partial t}T_n(u_1-u_2) &= \lim_{n\to\infty}\iint_{Q_T}T_n(\overline{u}_1-\overline{u}_2)\frac{\partial\varphi z}{\partial t}= \quad (23)\\ &= \lim_{n\to\infty}-\iint_{Q_T}\varphi\overline{z}T_n'(\overline{z})\frac{\partial z}{\partial t}dxdt=0.\end{aligned}$$

Combinando las expresiones (14) y (22) de $\mathbf{J}_n$, la desigualdad (16) de la Etapa 1 y el límite (23), para todo $\varphi\in C_0^\infty((0,\ T))$ es

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\mathbf{J}_n(u_1,\ u_2,\ \varphi)=\iint_{Q_T}(z)_+\frac{\partial\varphi}{\partial t}- \quad (24)\\ &+\iint_{Q_T}\Big\{(g(x,\ u_1)-g(x,\ u_2))\mathrm{sign}_+(z)\varphi+(f_1-f_2)\Big\}\mathrm{sign}_+(z)\varphi dxdt\geq 0.\end{aligned}$$

ETAPA 3. Fin de la demostración. Gracias a (24) resulta que

$$-\frac{d}{dt}\int_\Omega(z)_+dx-\int_\Omega\Big\{(g(x,\ u_1)-g(x,\ u_2))+(f_1-f_2)\Big\}\mathrm{sign}_+(z)dx\geq 0.$$

Integrando respecto de t, como $\mathrm{sign}_+(b(u_1(t,\ x))-b(u_2(t,\ x)))=\mathrm{sign}_+(u_1(t,\ x)-u_2(t,\ x))$ se obtiene

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(b(u_1(t,\ x))-b(u_2(t,\ x)))_+\leq\int_\Omega(b(u_1^0(x))-b(u_2^0(x)))_++\\ &\leq\ -\iint_{Q_t}\Big\{(g(x,\ u_1)-g(x,\ u_2))+(f_1-f_2)\Big\}\mathrm{sign}_+(b(u_1)-b(u_2)).\end{aligned}$$

Para establecer el resultado del teorema necesitamos distinguir dos casos: que la constante dada en (11) sea $C^*=0$, obteniendo directamente la conclusión del teorema; o bien que $C^*>0$. Entonces se definen $v_j(t,\ x)=e^{-C^*t}b(u_j(t,\ x))$ con $j=1,\ 2$, obteniendo para $\hat{v}=v_1-v_2$ una desigualdad como la anterior, que al expresarla en términos de u da el resultado.

■

3 Referencias.

Bear, J. [1972] *Dynamics of fluids in Porous Media.* Elsevier, New York.

Díaz, J.I. [1984] *Nonlinear partial differential equations and free boundaries.* Pitman.Londres.

Díaz, J.I and Liñan, A. [1989] *Tiempo de descarga en oleoductos o gaseoductos largos: Modelización y estudio de una ecuación parabólica doblemente no lineal.* En Actas de la Reunión Matemática en Honor a A.Dou. Univ. Complutense, 95-120.

Díaz, J.I. and Thelin, F. de [1993] *On a nonlinear parabolic problem arising in some models related to turbulent flows.* To appear in SIAM J. Math. Analysis.

Jingxue, Yin [1990] *On a class of quasilinear parabolic equations of second order with double-degeneracy.* J.Partial Diff. Equ. Vol **3**, No. 4 49-64

Jingxue, Yin [1992] *Solutions with compact support for nonlinear diffusion equations.* Nonlinear Analysis, Thry.Meth.App. Vol. **19**, No.4 309-321.

Vol'pert A.I. and Hudjaev S.I. [1969] *Cauchy's problem for degenerate second order quasilinear parabolic equations.* Mat.Sb., t. **78** (120) No. 3.

Vol'pert A.I. and Hudjaev S.I. [1985] *Analysis in classes of discontinous functions and equations of mathematical physics.* Mechanics: analysis. Martinus Nijholl Publishers.

Díaz J.I. y Padial J.F.
Dpto. Matemática Aplicada.
Fac. CC. Matemáticas U.C.M.
28040 Madrid