J.I. Díaz y L. Tello

Sobre un modelo bidimensional en Climatología

1. Introducción.

El presente trabajo tiene como objetivo el tratamiento matemático de un modelo de evolución temporal de la temperatura sobre la superficie de la Tierra obtenido a partir de un balance de energía.

Los modelos climatológicos de balance de energía (EBM) fueron introducidos en 1969 por Budyko y Sellers, de forma independiente. Se caracterizan por ser de carácter global (e.d. atañen a toda la superficie de la Tierra y no sólo a una zona, país o continente) y por referirse a las escalas de tiempo muy grandes en comparación con el tiempo de predicción (e.d. del orden de siglos o milenios).

2. Modelización.

El balance de energía sobre la superficie de la Tierra se expresa puntualmente (tras un proceso standar de promedios) como Incremento de Calor $= R_a - R_e + D$ donde R_a es la energía absorbida por la Tierra, R_e es la energía emitida por la Tierra y D la redistribución del calor. La energía absorbida R_a depende del **albedo** o reflexividad de la superficie en ese punto; es claro que las zonas cubiertas de hielo reflejan más la luz solar que los océanos, y que por tanto la energía absorbida es menor en las primeras. La función albedo α se suele tomar con valores comprendidos entre 0 y 1, y por tanto la llamada función **coalbedo** $\beta \equiv 1 - \alpha$ representa la fracción de luz absorbida. En Budyko [1969] y Sellers [1969] se supone que $R_a = Q\beta(u)$ donde u es la temperatura y Q una constante positiva llamada **constante solar**. Budyko[1969] propone como función coalbedo una función discontinua del tipo

$$\beta(u)=\begin{cases} b_i & u<u_s \\ b_w & u>u_s \end{cases} \tag{1}$$

donde b_i y b_w representan los coalbedos de la zona helada y del océano respectivamente, $0<b_i<b_w<1$ y como temperatura crítica u_s se suele tomar $u=-10°C$. Por su parte, Sellers [1969] supone $\beta(u)$ continua, del estilo de $\beta(u)=b_w+1/2(b_i-b_w)(1+\tan\gamma u)$. La energía liberada por la Tierra R_e se suele suponer función creciente en u y se representa por una función afín en el modelo de Budyko, $R_e=A+Bu$ y por $R_e=A+B|u|^3u$ en el modelo de Sellers, con A y B parámetros positivos, obtenidos mediante observación, pudiendo depender fuertemente de fenómenos tales como el efecto invernadero, etc.

Budyko y Sellers consideraron un operador de difusión lineal (de hecho el operador de Laplace). Sin embargo, en 1974, los climatólogos Held y Suarez propusieron un operador no lineal que aquí adoptaremos en un sentido más general.

El modelo final es el dado por una EDP de difusión no lineal sobre la superficie de la Tierra (e.d. S^2) o más en general sobre una variedad riemanniana $\mathcal{M}$ compacta, bidimensional y sin borde (por lo que no se requerirá condición de contorno alguna). Más concretamente, a lo largo de esta comunicación consideraremos el problema

$$(P)\begin{cases} u_t-\Delta_p u\in Q\beta(u)-R_e(u) & \text{en } (0,T)\times\mathcal{M} \\ u(0,x)=u_0(x), & \text{sobre } \mathcal{M} \end{cases}$$

donde para mayor generalidad supondremos que β es un grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$. El operador pseudolaplaciano Δ_p (motivado por Held-Suarez [1974] con $p=3$) es el operador dado por

$$\Delta_p u=\operatorname{div}_{\mathcal{M}}(|\operatorname{grad}_{\mathcal{M}}u|^{p-2}\operatorname{grad}_{\mathcal{M}}u)$$

donde el gradiente y la divergencia deben entenderse en el sentido de las derivadas covariantes sobre $\mathcal{M}$.

Debido a la complejidad de la formulación, varios autores han estudiado modelos simplificados considerando la temperatura sólo dependiente de la latitud (e.d. tomando medias sobre cada paralelo). En ese caso, si se definen $x=\operatorname{sen}\phi$ y $\rho(x)=(1-x^2)$, (P) conduce al problema

$$(P_1)\begin{cases} u_t-(\rho(x)|u_x|^{p-2}u_x)_x\in Q\beta(u)-R_e(u) & (t,x)\in(0,T)\times(-1,1) \\ u(0,x)=u_0(x) & x\in(-1,1). \end{cases}$$

El tratamiento matemático de (P_1) fue llevado a cabo en J.I.Díaz [1993] (véase también Hetzer [1990] y Xu [1991] para $p=2$). El objeto de nuestro trabajo es la extensión a dimensión dos de algunos de esos resultados.

3. Existencia de soluciones.

La posible discontinuidad de la función *coalbedo* hace que el modelo no tenga (en general) soluciones clásicas. Se introduce por ello el concepto de solución débil, para lo cual definimos el espacio de energía $\mathcal{V} = \{u \in L^2(\mathcal{M}) : \nabla u \in (L^p(\mathcal{M}))^2\}$. Es fácil ver que $\mathcal{V}$ es un espacio de Banach con la norma

$$\| u \|_{\mathcal{V}} = \| u \|_{L^2(\mathcal{M})} + \| \nabla u \|_{L^p(\mathcal{M})} .$$

Definición. Diremos que u es una solución débil acotada de (P) si $u \in C([0,T]; L^2(\mathcal{M})) \cap L^\infty((0,T) \times \mathcal{M})) \cap L^p(0,T;\mathcal{V})$ y existe $z \in L^\infty((0,T) \times \mathcal{M})$, $\quad z(t,x) \in \beta(u(t,x))$ a.e. $(t,x) \in (0,T) \times \mathcal{M}$ tal que

$$\int_{\mathcal{M}} u(T,x)v(T,x) - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} u(t,x)v_t(t,x) + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v +$$

$$+ \int_0^T \int_{\mathcal{M}} R_e(u)v = \int_0^T \int_{\mathcal{M}} Qz(t,x)v + \int_{\mathcal{M}} u_0(x)v(0,x)$$

$$\forall v \in L^p(0,T;\mathcal{V}) \cup L^\infty((0,T) \times \mathcal{M}) \text{ tal que } v_t \in L^{p'}(0,T;\mathcal{V}').$$

El objetivo de esta sección es probar el siguiente

Teorema 1

Dado $u_0 \in L^\infty(\mathcal{M})$ existe al menos una solución débil acotada de (P).

Idea de la demostración: Seguiremos el método de Díaz-Vrabie [1987] que es especialmente útil si β es multivoco. Siguiendo la teoría de operadores no lineales (Brezis [1973]) se define $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset L^2(\mathcal{M}) \longrightarrow L^2(\mathcal{M})$, $\mathcal{A}u = -\Delta_p u + R_e(u)$. Se comprueba que $\mathcal{A}$ es un operador **m-acretivo** en $L^2(\mathcal{M})$ y que genera un **semigrupo compacto.** La existencia de solución u se basa ahora en la aplicación de una variante del Teorema de Punto fijo de Schauder-Tychonov para un operador $\mathcal{Q}$ construido como sigue:

Definimos

$$\mathcal{Q} : K \longrightarrow 2^{L^p(0,T;L^2(\mathcal{M}))}$$

donde $K = \{z \in L^p(0,T;L^2(\mathcal{M})) : \| z(t) \|_{L^\infty(\mathcal{M})} \leq C_0 \text{ a.e. } t \in (0,T)\}$ se comprueba sin dificultad que K es convexo y débilmente compacto en $L^p(0,T : L^2(\mathcal{M}))$. A continuación se introduce el operador $I_0 : K \longrightarrow C([0,T]; L^2(\mathcal{M})$, $I_0(z) = v$ siendo v la solución de $\frac{dv}{dt}(t) + \mathcal{A}(v) = z$, $v(0) = u_0$. También definimos el operador de selección, $\mathcal{F}$ dado por

$$\begin{array}{rcccc} \mathcal{F} & : & L^2(\mathcal{M}) & \longrightarrow & 2^{L^2(\mathcal{M})} \\ & & v & \longrightarrow & \{h \in L^2(\mathcal{M}) : h(x) \in \beta(v(x)) \text{ a.e. } x \in \mathcal{M}.\} \end{array}$$

Finalmente $\mathcal{Q}(z) = \{h \in L^p(0,T;L^2(\mathcal{M})) : h(t) \in \mathcal{F}(I_0(z)(t)) a.e.t\}$. Comprobamos que $\mathcal{Q}$ es débil$\times$débil cerrado, lo que por una variante del Teorema de Schauder-Tychonov permite concluir que $\mathcal{Q}$ tiene al menos un punto fijo. Sin dificultad se comprueba que es una solución débil acotada de (P). ∎

4. Criterios de unicidad.

Si β es unívoco (como en el modelo de Sellers) se obtiene la unicidad mediante procedimientos standar (véase Díaz [1993]).
Por el contrario si β es multívoco (modelo de Budyko) pese a ser un problema parabólico pueden darse casos de no unicidad. Ya en Feireisl-Norbury [1991] se estudia un "problema discontinuo" que aparece en combustión y se obtienen resultados de distinta naturaleza.
Para el problema (P_1) un estudio de la unicidad fue realizado en Díaz [1993], mostrandose criterios de unicidad y no unicidad. Los resultados son del siguiente tipo: Criterios de no unicidad: existen infinitas soluciones si el dato inicial es simétrico y "atraviesa el nivel $u = -10$ de manera plana". [Dado que toda solución de (P_1) genera una solución de (P), tenemos así automáticamente un criterio de no unicidad para (P), para adecuados datos iniciales]. Criterios de unicidad: en Díaz [1993] se obtiene la unicidad bajo hipótesis de *no degeneración*. En el caso bidimensional introducimos la siguiente noción:
Definición: Diremos que $w \in L^\infty(\mathcal{M})$ satisface la *propiedad de no degeneración fuerte* si $\exists C > 0 \quad \exists \epsilon_0 > 0$ t.q. $\forall \epsilon \in (0, \epsilon_0)$

$$|\{x \in \mathcal{M} : \quad |w(x) + 10| \leq \epsilon\}| \leq C\epsilon^{p-1}.$$

Se tiene
Teorema 2
Supongamos β dado por (1), $p \geq 2$ y $u_0 \in L^\infty(\mathcal{M})$. Si existe una solución de (P) tal que $u(t,\cdot)$ verifica la propiedad de no degeneración $\forall t \in [0,T]$ entonces u es la única solución débil acotada de (P). $\square$

Teorema 3
Supongamos $p \geq 2$ y $u_0 \in C^1(\mathcal{M})$ simétrico con respecto al Ecuador y que verifica la propiedad de no degeneración fuerte. Entonces existe una única solución débil acotada de (P). $\square$

Idea de la demostración del Teorema 2: La demostración se basa en la idea de que aunque β es discontinua genera un operador continuo de L^∞ en L^q sobre funciones que verifican la propiedad de no degeneración fuerte. Más concretamente, se prueba que
Lema
Sean $w, \hat{w} \in L^\infty(\mathcal{M})$ y t.q. w satisface la propiedad de no degeneración, entonces

$$\forall q \in [1, \infty) \quad \exists \hat{C} > 0 \text{ t.q. } \forall z \in \beta(w), \quad \hat{z} \in \beta(\hat{w})$$
$$\| z - \hat{z} \|_q \leq (b_w - b_i) \min\{\hat{C} \| w - \hat{w} \|_\infty^{(p-1)/q}, |\mathcal{M}|^{1/q}\}. \quad \square$$

Supongamos ahora que existan $u, \hat{u}$ soluciones de (P). Por la monotonía de R_e se tiene

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{M}} |u(t) - \hat{u}(t)|^2 + \int_{\mathcal{M}} (|\nabla u(t)|^{p-2}\nabla u(t) - |\nabla \hat{u}(t)|^{p-2}\nabla \hat{u}(t))(\nabla u(t) - \nabla \hat{u}(t))$$

$$\leq Q \int_{\mathcal{M}} (z(x,t) - \hat{z}(x,t))(u(x,t) - \hat{u}(x,t))$$

para algún $z, \hat{z} \in L^\infty((0,T) \times \mathcal{M})$ con $z(x,t) \in \beta(u(t,x))$, $\hat{z}(t,x) \in \beta(\hat{u}(t,x))$ para casi todo $(t,x) \in (0,T) \times \mathcal{M}$.

Si $p > 2$, por las inclusiones de Sobolev sobre variedades (Aubin [1982]), aplicando el Lema anterior obtenemos

$$\frac{d}{dt} \parallel u - \hat{u} \parallel^2_{L^2(M)} \leq (QC_1 - \frac{1}{2^p C_2}) \parallel u - \hat{u} \parallel^p_{L^\infty(\mathcal{M})} + C_3 \parallel u - \hat{u} \parallel^2_{L^2(\mathcal{M})}$$

Haciendo el *cambio de escala* $\hat{r} = \alpha r$, $|\mathcal{M}_\alpha| = \alpha^2 |\mathcal{M}|$ deducimos que

$$\frac{d}{dt} \parallel u - \hat{u} \parallel^2_{L^2(M_\alpha)} \leq (QC_4\alpha^2 - \frac{\alpha^{-p-2}}{2^p C_5}) \parallel u - \hat{u} \parallel^p_{L^\infty(\mathcal{M}_\alpha)} + C_3(\alpha) \parallel u - \hat{u} \parallel^2_{L^2(\mathcal{M}_\alpha)}$$

con C_4, C_5 constantes positivas independientes de α. Así para α suficientemente pequeño se tiene que $(QC_1\alpha^2 - \frac{\alpha^{-p-2}}{2^p C_2}) < 0$ lo que implica la unicidad por argumento de tipo Gronwall.

Si $p = 2$, la inclusión $H^1(\mathcal{M}) \subset L^r(\mathcal{M})$ $\forall r \in [1, \infty)$ garantiza el éxito del argumento anterior; dado que u y $\hat{u}$ son soluciones débiles acotadas, $u - \hat{u} \in L^\infty(\mathcal{M})$ y $\forall \delta > 0$ existe $r_0 > 0$ tal que si $r > r_0$ se tiene que

$$\big| \|u - \hat{u}\|_{L^\infty(\mathcal{M})} - \|u - \hat{u}\|_{L^r(\mathcal{M})} \big| \leq \delta. \qquad \blacksquare$$

5. Estabilidad de la solución.

En esta sección estudiamos el comportamiento de las soluciones de (P) cuando $t \to +\infty$. Dada u solución débil y acotada de (P), definimos el conjunto *w-límite* $w(u) = \{v \in \mathcal{V} \cap L^\infty(\mathcal{M}) : \exists t_n \to +\infty \text{ t.q. } u(t_n, \cdot) \to u_\infty \text{ en } L^2(\mathcal{M})\}$. Se tiene

Teorema 4

(i) *Si* $u \in L^\infty(0, +\infty; \mathcal{V}) \Rightarrow w(u) \neq \emptyset$

(ii) *Si* $u_\infty \in w(u)$ *y* $\exists t_n \to +\infty$ *t.q.* $u(t_n + s, \cdot) \to u_\infty$ *en* $L^2((-1,1), L^2(\mathcal{M}))$ *entonces* u_∞ *solución débil del problema estacionario.*

(iii) $\forall u_\infty \in w(u)$ $\exists \{\hat{t_n}\} \to +\infty$ *t.q.* $u(\hat{t_n}, \cdot) \to u_\infty$ *fuerte en* $\mathcal{V}$ $\square$

Idea de la demostración: Inspirados en Díaz-Thelin [1993], se construyen funciones test v del tipo $v(t,x) = \xi(x)\varphi(t - t_n)$ con $\xi \in \mathcal{V} \cap L^\infty(\mathcal{M})$ y $\varphi \in \mathcal{D}(-1,1)$, $\varphi \geq 0$, $\int_{-1}^1 \varphi = 1$. Tras el cambio de variable $s = t - t_n$, se muestra que $U_n(s,x) = u(t_n + s, x)$ verifica las siguientes estimaciones a priori

$$\parallel U_n \parallel_{L^\infty(-1,1;\mathcal{V})} \leq C_1$$
$$\parallel \nabla U_n \parallel_{L^\infty(-1,1:(L^p(\mathcal{M}))^2)} \leq C_2$$
$$\parallel z_n(s,x) \parallel_{L^\infty(-1,1;L^\infty(\mathcal{M}))} \leq 1$$

con C_1 y C_2 independientes de n. Finalmente se pasa al límite en la formulación variacional utilizando la monotonía del operador Δ_p y ciertas propiedades de los grafos maximales monótonos.

$\blacksquare$

REFERENCIAS.

Aubin,T. [1982]: *Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampere Equations.* Springer-Verlag.

Brezis,H. [1973]: *Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* North Holland, Amsterdam.

Budyko,M.I. [1969]: *The efects of solar radiation variations on the climate of the Earth*, Tellus, 21, pp 611-619.

Díaz,J.I. [1993]: *Mathematical Analysis of some diffusive energy balance climate models.* En el libro *"Mathematics , Climate and Environment"*, Masson.

Díaz,J.I. and **de Thelin,F.** [1993]: *On a nonlinear parabolic problem arising in some models related to turbulent flows.* To appear in SIAM J. Math. Analysis.

Díaz,J.I. and **Vrabie,I.I.** [1987]: *Existence for reaction diffusion systems.* To appear in Journal of Math. Analysis and Applications.

Feireisl, E. and **Norbury, J.** [1991]: *Some Existence, Uniqueness, and Non uniqueness Theorems for solutions of Parabolic Equations with Discontinuous Nonlinearities.* Proc. Royal. Soc. Edinburgh. 119 A, pp. 1-17.

Held, I.M. and **Suarez, M.J.** [1974]: *Simple Albedo Feedback models of the icecaps.* Tellus, 36.

Hetzer, G. [1990]: *The structure of the principal component for semilinear diffusion equations from energy balance climate models.* Houston Journal of Math. 16, pp. 203-216.

Sellers, W.D. [1969]: *A global climatic model based on the energy balance of the earth-atmosphere system.* J. Appl. Meteorol. 8, pp. 392-400.

Vrabie, I.I. [1987]: *Compactness methods for nonlinear evolutions*, Pitman Longman. London.

Xu, X. [1991]: Existence and Regularity Theorems for a Free Boundary Problem Governing a Simple Climate Model. *Aplicable Anal.* 42,pp. 33-59.

J.I. DIAZ y L. TELLO
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid
28.040 Madrid, España.