Sobre la convergencia de las soluciones de la MHD a las soluciones de la MHD ideal

M.B. Lerena[1] y J.I. Díaz[2]

Resumen

Estudiamos la convergencia de la solución del sistema evolutivo de la MHD hacia la solución de la MHD ideal en el límite a cero de la resistividad eléctrica y de la viscosidad del fluido, dando tasas explícitas de dicha convergencia y considerando el operador de viscosidad usual y el propuesto por **S.I. Braginskii** en 1965.

Introducción

Cuando un fluido conductor está sometido a la acción de un campo magnético su comportamiento macroscópico viene descrito por el sistema de la magnetohidrodinámica (MHD). El sistema de ecuaciones de la MHD para un fluido viscoso, resistivo e incompresible en $\mathbb{R}^3$ es el resultado del acoplar las ecuaciones pre-Maxwell y Navier-Stokes y se expresa como (veáse, p.e., [5]):

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}-\mathbf{F}(\mathbf{u})+\nabla p+S\nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{B}^2\right)-S\,(\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}=\mathbf{f} & \text{en } (0,T)\times\mathbb{R}^3, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}-(\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}+\nu_m \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{B})=0 & \text{en } (0,T)\times\mathbb{R}^3, \\ \mathrm{div}\mathbf{u}=0, \qquad \mathrm{div}\mathbf{B}=\mathbf{0} & \text{en } (0,T)\times\mathbb{R}^3, \\ \mathbf{u}(0,x)=\mathbf{u}_0(x), \qquad \mathbf{B}(0,x)=\mathbf{B}_0(x) & \text{en } \mathbb{R}^3, \end{array}\right. \tag{1}$$

para $T>0$ dado. Aquí, $\mathbf{u}$ denota la velocidad del plasma, p la presión del mismo, $\mathbf{B}$ el campo magnético y $\mathbf{f}$ es una fuerza de volumen. Denotamos por $\nu_m := \frac{1}{\mathrm{Rm}}$ a la viscosidad magnética donde $\mathrm{Rm} := L_* U_* \sigma\mu$ es el número de Reynolds magnético, siendo μ la permebilidad magnética del fluido, σ la conductividad eléctrica del mismo, L_* y U_* son las cantidades caracteristicas de longitud y velocidad respectivamente; S es una constante proporcional a μ. Finalmente, denotamos por $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ a las fuerzas debidas a la viscosidad del fluido. Habitualmente, en un fluido incompresible esta fuerza se toma como $\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{u}$, siendo Re el número de Reynolds. En este trabajo consideraremos además el caso en el que los efectos de la viscosidad son descritos por el operador de **Braginskii** [1] $\widehat{V}\mathbf{u}$, que aparece con frecuencia en el estudio de plasmas de fusión por confinamiento magnético. El operador $\widehat{V}$ viene dado por $\left(\widehat{V\mathbf{u}}\right)_i = \frac{-\partial\pi_{ij}}{\partial xj}$, $i=1,2$, siendo π_{ij} el tensor definido como

$$\pi_{ij} = \sum_{\alpha=0}^{4} \gamma_\alpha \mu_\alpha W_{\alpha ij} \; (\gamma_\alpha = -1 \text{ si } \alpha = 0,1,2 \text{ y } \gamma_\alpha = 1 \text{ para } \alpha = 3,4)$$

donde $W_{\alpha ij} := A_{\alpha ij,kl}(\mathbf{h})\, W_{kl}$, $W_{kl} = \dfrac{\partial u_k}{\partial x_l} + \dfrac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\delta_{kl}\nabla\cdot\mathbf{u}$. Los coeficientes $A_{\alpha ij,kl}$ son polinomios en la variable dirección del campo magnético $\mathbf{h} = \mathbf{B}/\left|\mathbf{B}\right|$, mientras que coeficientes de viscosidad μ_α, $\alpha = 0, ..., 4$, son positivos y sólo dependen del módulo del campo magnético. Sin embargo, para evitar esta situación patológica, seguiremos el tratamiento realizado por **Spada** y **Wobig** [16] en donde se hace una aproximación de los coeficientes involucrados en $\widehat{V}$ de forma que este operador resulta independiente del campo magnético $\mathbf{B}$. Asimismo, siguiendo nuevamente la referencia anterior, los coeficientes de viscosidad μ_α, $\alpha = 0, 1, ..., 4$, son aproximados por constantes.

Cuando los efectos debidos a la viscosidad del fluido y a la resistividad eléctrica del mismo desaparecen entramos en el marco de la MHD ideal. De este modo, el sistema de ecuaciones de la MHD ideal se expresa como

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial t} + \left(\mathbf{u}^0\cdot\nabla\right)\mathbf{u}^0 + \nabla p + S\nabla\left(\frac{1}{2}\left(\mathbf{B}^0\right)^2\right) - S\left(\mathbf{B}^0\cdot\nabla\right)\mathbf{B}^0 = \mathbf{f} & \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^3, \\ \frac{\partial \mathbf{B}^0}{\partial t} + \left(\mathbf{u}^0\cdot\nabla\right)\mathbf{B}^0 - \left(\mathbf{B}^0\cdot\nabla\right)\mathbf{u}^0 = 0 & \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^3, \\ \mathrm{div}\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}, \qquad \mathrm{div}\mathbf{B}^0 = \mathbf{0} & \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^3, \\ \mathbf{u}^0(0,x) = \mathbf{u}^0_0(x), \qquad \mathbf{B}^0(0,x) = \mathbf{B}^0_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^3, \end{array}\right. \tag{2}$$

En este trabajo nos interesamos por el paso de la MHD a la MHD ideal, aunque nos limitaremos a describir en grandes líneas las demostraciones de los resultados obtenidos, pudiéndose encontrar los detalles en [13] y [7]. Existen dos trabajos previos al nuestro debidos a **Wu** [19] y **Díaz** [8] en los que se hace un estudio similar, pero para el límite Rm$\rightarrow +\infty$, Re$\rightarrow +\infty$ y $S \rightarrow 0$ (lo que equivaldría a suponer que el coeficiente μ de permeabilidad magnética tiende a cero) y considerando en ambos casos como tensor de viscosidad $\mathbf{F} = \Delta$.

Debido a que los fluidos que estamos considerando son incompresibles, trabajaremos con campos solenoidales. De este modo, denotaremos por H_σ al subespacio de $L^2\left(\mathbb{R}^3\right)^3$ formado por los campos de vectores de divergencia nula y cuyo operador de proyección asociado viene dado por la matriz P (véase, p.e., [3]), con $P_{jk} = \delta_{jk} - R_j R_k$, siendo R_j la transformada de Riesz. Es fácil ver, utilizando la transformada de Fourier, que P commuta con los operadores Δ y $\widehat{V}$. Igualmente, denotaremos por H^s_σ a la imagen mediante P de los espacios de Sobolev $\left(W^{2,s}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)^3 = H^s\left(\mathbb{R}^3\right)^3$, $s \geq 0$, esto es, $H^s_\sigma := \left\{\mathbf{v} \in \left(H^s\left(\mathbb{R}^3\right)\right)^3 : \mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0\right\}$. Las normas en estos espacios las denotaremos por $\|\ \|_s$ siendo s el exponente del espacio en el que trabajemos. Bajo las hipótesis hechas para el operador $\widehat{V}$, se comprueba que éste es continuo de H^m_σ a valores en H^{m-2}_σ, con $m \geq 2$.

Existencia

La existencia y unicidad de solución para los sistemas de la MHD y MHD ideal ha sido estudiada en diversos trabajos entre los que citaremos [9] y [18] en el caso de la MHD en un dominio acotado y en todo el espacio $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, con condiciones de contorno periódicas y en ambos casos con un sólo coeficiente de viscosidad; para el sistema de la MHD ideal destacamos los trabajos [14] y [15] para un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ y [17] para datos iniciales analíticos. En este trabajo damos un resultado de existencia y unicidad local de solución clásica para ambos sistemas en todo el espacio $\mathbb{R}^3$, tomando como fuerza debida a la viscosidad del fluido, $\mathbf{F}$, los dos operadores anteriormente introducidos. Este resultado se enuncia como:

Teorema 1 Sean $T > 0$ y $(\mathbf{u}_0, \mathbf{B}_0) \in H^s(\mathbb{R}^3)^3 \times H^s(\mathbb{R}^3)^3$, $s > \frac{5}{2}$, tales que $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = \nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0$. Supongamos $\mathbf{f} \in \mathcal{C}([0,T]; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^1(0,T; H^s_\sigma(\mathbb{R}^3))$. Entonces:
i) existe una única solución $(\mathbf{u}, \mathbf{B})$ del problema (1) con $\mathbf{F}$ dada por Δ o por $\widehat{V}$ tal que

$$(\mathbf{u}, \mathbf{B}) \in \mathcal{C}\left([0,T']; \left(H^s(\mathbb{R}^3)^3\right)^2\right) \cap \mathcal{C}^1\left([0,T']; H^{s-2}(\mathbb{R}^3)^3 \times H^{s-2}(\mathbb{R}^3)^3\right)$$

con $T' \in (0,T]$ dependiendo sólo de los datos iniciales. Además, si $s \geq 4$, $s \in \mathbb{N}$, entonces la solución $(\mathbf{u}, \mathbf{B})$ está acotada en $\mathcal{C}\left([0,T']; (H^{s-1}_\sigma)^2\right)$ uniformemente en Rm y Re o μ_α, $\alpha = 0, ..., 4$, respectivamente.
ii) existe una única solución $(\mathbf{u}^0, \mathbf{B}^0)$ del problema (2) verificando

$$(\mathbf{u}^0, \mathbf{B}^0) \in \mathcal{C}\left([0,T_0]; H^s(\mathbb{R}^3)^3 \times H^s(\mathbb{R}^3)^3\right) \cap \mathcal{C}^1\left([0,T_0]; \left(H^{s-1}(\mathbb{R}^3)^3\right)^2\right)$$

para algún $T_0 > 0$ que sólo depende de los datos iniciales, y tal que $\forall T^* < T_0$ se tiene

$$\int_0^{T^*} \left(\left\|\nabla \mathbf{u}^0(t)\right\|_{L^\infty} + \left\|\nabla \mathbf{B}^0(t)\right\|_{L^\infty}\right) dt < \infty. \tag{3}$$

Además, si $T_0 < \infty$, entonces al menos una de las dos integrales en (3) explota para algún $T^* \leq T_0$.

Damos a continuación un esquema de la demostración del teorema anterior. Una versión detallada puede encontrarse en [13] y [7]. Para ello, hacemos actuar el operador proyección P sobre los sistemas de la MHD y MHD ideal; de esta forma dichos sistemas pueden escribirse como

$$\begin{cases} \dfrac{d\Phi}{dt} + \mathcal{A}(\Phi)\Phi = \mathbf{G}(t), \\ \Phi(0) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{B}_0) \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_A bs$}$$

siendo, $\forall \Phi = (\mathbf{u}, \mathbf{B}) \in H^r_\sigma \times H^r_\sigma$, $r > \frac{3}{2}$, $\mathcal{A}(\Phi) = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2(\Phi)$; $\quad D(\mathcal{A}(\Phi)) = H^2_\sigma \times H^2_\sigma$ con

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} -\mathbf{F} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\mathrm{Rm}}\Delta \end{pmatrix}, \; \mathcal{A}_2(\Phi) = P\begin{pmatrix} (\mathbf{u}\cdot\nabla) & -S(\mathbf{B}\cdot\nabla) \\ -(\mathbf{B}\cdot\nabla) & (\mathbf{u}\cdot\nabla) \end{pmatrix} \tag{A1}$$

en el caso de la MHD, y para la MHD ideal: $\mathcal{A}(\Phi) = \mathcal{A}_2(\Phi)$; $\quad D(\mathcal{A}(\Phi)) = H^1_\sigma \times H^1_\sigma$. Y en ambos casos $\mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} P\mathbf{f}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Se tiene entonces que $(-\mathcal{A}_1, D(\mathcal{A}_1))$ genera un semigrupo $\mathcal{C}^0$ de contracciones en $H_\sigma \times H_\sigma$. En el caso $\mathbf{F} = \frac{1}{\mathrm{Rm}}\Delta$ este resultado es bien conocido (véase, p.e., [4]). Cuando trabajamos con $\mathbf{F} = \widehat{V}$, el mismo resultado continua siendo válido como consecuencia del teorema de Hille-Yosida. En efecto, ya que podemos asociar al operador $\widehat{V}$ la forma bilineal $a: H^1_\sigma \times H^1_\sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = -\left(\widehat{V}\mathbf{v}, \mathbf{v}\right)$, que es continua y coercitiva (véase [16]) de donde obtenemos, via el lema de Lax-Milgram, que $\left(-\widehat{V}, H^2_\sigma\right)$ es m-disipativo en H_σ y, por lo tanto, genera un semigrupo $\mathcal{C}^0$ de contracciones en H_σ. Además, se verifica

$$\left(-\widehat{V}\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) \geq \left(\min_\alpha \mu_\alpha\right) \|\mathbf{v}\|_{L^2}, \ \forall \mathbf{v} \in H^1_\sigma. \tag{4}$$

Por otra parte, se comprueba que para $\mathbf{\Phi} \in H^r_\sigma \times H^r_\sigma$ fijado, con $r > \frac{3}{2}$, el operador $(-\mathcal{A}_2(\mathbf{\Phi}),\ H^1_\sigma \times H^1_\sigma)$ está relativamente acotado respecto a $(-\mathcal{A}_1,\ D(\mathcal{A}_1))$ con norma relativa 0; además, como trabajamos con campos de divergencia nula el operador $(\mathcal{A}_2(\mathbf{\Phi}), H^1_\sigma \times H^1_\sigma)$ es disipativo, de donde se deduce (véase, p.e., [10]) que $(-\mathcal{A}(\mathbf{\Phi}), H^2_\sigma \times H^2_\sigma)$ genera un semigrupo $\mathcal{C}^0$ de contracciones en $H_\sigma \times H_\sigma$.

Finalmente, el operador $(-\mathcal{A}_2(\mathbf{\Phi}), H^1_\sigma \times H^1_\sigma)$ con $\mathbf{\Phi} \in H^r_\sigma \times H^r_\sigma$ fijado, es generador infinitesimal de un grupo de clase $\mathcal{C}^0$ en $H_\sigma \times H_\sigma$. En efecto, sea $\mathbf{u} \in H^r_\sigma$ fijo, es un resultado bien conocido (véase, p.e., [6]) que el operador de transporte $\left((\mathbf{u}\cdot\nabla), H^1(\mathbb{R}^3)^3\right)$ actuando sobre elementos de $L^2(\mathbb{R}^3)^3$ genera un grupo $\mathcal{C}^0$ de isometrías y que, por tanto, el mismo resultado se mantiene para $\left(-(\mathbf{u}\cdot\nabla), H^1(\mathbb{R}^3)^3\right)$. Se deduce de este hecho que el operador $(-\mathcal{A}_2(\mathbf{\Phi}), H^1_\sigma \times H^1_\sigma)$, formado por elementos de la forma $\pm P(\mathbf{u}\cdot\nabla)$ genera un grupo de clase $\mathcal{C}^0$ en $H_\sigma \times H_\sigma$.

Podemos entonces recurrir a los resultados debidos a **Kato** (véase, p.e., [12]) sobre existencia y unicidad de solución local para problemas de Cauchy dados por una ecuación de evolución abstracta de tipo $(\mathcal{P}_{Abs})$, donde la incógnita $\mathbf{\Phi}(t)$ toma valores en un espacio de Banach X y $\mathcal{A}(\mathbf{\Phi})$, con $\mathbf{\Phi} \in Y \subset X$ siendo Y un subespacio de Banach, es un operador lineal en X tal que $(-\mathcal{A}(\mathbf{\Phi}), D(\mathcal{A}(\mathbf{\Phi})))$ genera un semigrupo de clase $\mathcal{C}^0$ en X.

La condición (3) que da el tiempo de existencia de soluciones regulares $\left(H^r(\mathbb{R}^3)^3\right)$ para el sistema de la MHD ideal fue obtenida por Caflish, Kappler y Steele [2].

Convergencia de las soluciones de la MHD a la MHD ideal.

Sean $(\mathbf{u}, \mathbf{B})$ y$(\mathbf{u}^0, \mathbf{B}^0)$ las soluciones de (1) y de (2) respectivamente, con dato inicial $(\mathbf{u}_0, \mathbf{B}_0)$, dadas por el teorema anterior. Denotamos la diferencia entre ambas soluciones por $(\mathbf{v}, \mathbf{C}) := (\mathbf{u}, \mathbf{B}) - (\mathbf{u}^0, \mathbf{B}^0)$. Se tiene:

Teorema 2 Supongamos $(\mathbf{u}_0, \mathbf{B}_0) \in H^s_\sigma \times H^s_\sigma$, $s > \frac{5}{2}$, y $\mathbf{F} = \widehat{V}$ en (1). Entonces

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{v}(t)\|_0^2 + S\,\|\mathbf{C}(t)\|_0^2 \leq \\ &\leq \exp\left(t + 2S' \textstyle\int_0^t \eta(s)\,ds\right) \displaystyle\int_0^t \left[k\,(\mu^*)^2\,\|\mathbf{u}^0\|_2^2 + \tfrac{1}{\mathrm{Rm}^2}\,\|\nabla \mathbf{B}^0\|_0^2\right] ds, \end{aligned} \tag{5}$$

donde k es una constante positiva, $\eta(t) = \|\nabla \mathbf{u}^0(t)\|_{L^\infty} + \|\nabla \mathbf{B}^0(t)\|_{L^\infty}$, $\mu^* := \max_\alpha \mu_\alpha$ y $S' = \max(1, S)$.

Teorema 3 Sean $(\mathbf{u}_0, \mathbf{B}_0)$, S' y $\eta(t)$ como en Teorema 2 y $\mathbf{F} = \Delta$ en (1). Se verifica que

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{v}(t)\|_0^2 + S\,\|\mathbf{C}(t)\|_0^2 \leq \\ &\leq \exp\left(t + 2S' \textstyle\int_0^t \eta(s)\,ds\right) \displaystyle\int_0^t \left[\tfrac{1}{\mathrm{Re}^2}\,\|\nabla \mathbf{u}^0\|_0^2 + \tfrac{1}{\mathrm{Rm}^2}\,\|\nabla \mathbf{B}^0\|_0^2\right] ds. \end{aligned} \tag{6}$$

Observación 1: En particular, de los teoremas anteriores se deduce que, $\forall t \leq T'$, con $T' < +\infty$ verificando (3), $(\mathbf{u}(t), \mathbf{B}(t)) \longrightarrow (\mathbf{u}^0(t), \mathbf{B}^0(t))$ en $L^2(\mathbb{R}^3)^3 \times L^2(\mathbb{R}^3)^3$cuando $\mathrm{Rm} \to +\infty$ y $\mu_\alpha \to 0$, $\alpha = 0, 1, ..., 4$, como $o(\mu^*) + o\left(\frac{1}{\mathrm{Rm}}\right)$ en el primer caso y cuando Re, $\mathrm{Rm} \to +\infty$ como $o\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\right) + o\left(\frac{1}{\mathrm{Rm}}\right)$ para el segundo caso.

Observación 2: La condición (3) nos permite afirmar que la integral de la función $\eta(t)$ que aparece en los teoremas anteriores está acotada en el intervalo de existencia de la solución del sistema de la MHD ideal.

Demostración T^a 2: Tomamos la diferencia entre las ecuaciones de la MHD y las de la MHD ideal obteniendo de este modo el sistema satisfecho por el par $(\mathbf{v}, \mathbf{C})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}^0 + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} - S (\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{B}^0 - S (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{C} \\ \qquad\qquad + \dfrac{S}{2} \nabla (\mathbf{B}^2 - \mathbf{B}^0) - \widehat{V} \mathbf{u} + \nabla p = 0 \\ \dfrac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}^0 + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{C} - (\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{u}^0 - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{\mathrm{Rm}} \Delta \mathbf{B} = 0 \\ \mathrm{div} \mathbf{v} = 0, \mathrm{div} \mathbf{C} = 0; \qquad \mathbf{v}_{/t=0} = \mathbf{C}_{/t=0} = \mathbf{0} \end{array} \right. \tag{7}$$

Multiplicamos la primera y segunda ecuación en el sistema anterior por $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ respectivamente, en la norma de $L^2(\mathbb{R}^3)$. Integrando por partes y utilizando que trabajamos con campos solenoidales, llegamos a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}(t)\|_0^2 = \left(\widehat{V} \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t) \right) - \left((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}^0, \mathbf{v} \right) + S \left((\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{B}^0, \mathbf{v}(t) \right) + \\ + S \left((\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{C}, \mathbf{v}(t) \right) \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{C}(t)\|_0^2 = \frac{1}{Rm} (\Delta \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t)) - \left((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}^0, \mathbf{C} \right) - \left((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{C}, \mathbf{C}(t) \right) + \\ + \left((\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{u}^0, \mathbf{C}(t) \right) + \left((\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{C}(t) \right). \end{aligned} \tag{9}$$

Los operadores $-\widehat{V}$ y $-\Delta$ son disipativos y continuos en $L^2(\mathbb{R}^3)^3$, por tanto, es posible obtener las estimaciones siguientes:

$$\left(\widehat{V} \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t) \right) \leq -(\min_\alpha \mu_\alpha) \|\nabla \mathbf{v}\|_0^2 + \tfrac{k}{2} (\max_\alpha \mu_\alpha) \|\mathbf{u}^0\|_2^2 + \tfrac{1}{2} \|\mathbf{v}\|_0^2,$$
$$\left(\tfrac{1}{\mathrm{Rm}} \Delta \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t) \right) \leq -\tfrac{1}{\mathrm{Rm}} \|\nabla \mathbf{C}(t)\|_0^2 + \tfrac{1}{2\mathrm{Rm}^2} \|\Delta \mathbf{B}^0\|_0^2 + \tfrac{1}{2} \|\mathbf{C}\|_0^2,$$

donde k es la constante de continuidad de $\widehat{V}$ en $L^2(\mathbb{R}^3)^3$. Sustituyendo las expresiones anteriores en (8) y (9) y utilizando las desigualdades de Hölder y Young en los términos no lineales que aparecen en (7) llegamos a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{v}(t)\|_0^2 + S \|\mathbf{C}(t)\|_0^2 \right) + (\min_\alpha \mu_\alpha) \|\nabla \mathbf{v}\|_0^2 + \tfrac{S}{\mathrm{Rm}} \|\nabla \mathbf{C}(t)\|_0^2 \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \left(k (\max_\alpha \mu_\alpha)^2 \|\mathbf{u}^0\|_2^2 + \tfrac{S}{\mathrm{Rm}^2} \|\Delta \mathbf{B}^0\|_0^2 \right) + \tfrac{1}{2} \left(\|\mathbf{v}(t)\|_0^2 + S \|\mathbf{C}\|_0^2 \right) \\ & + \|\nabla \mathbf{u}^0(t)\|_\infty \left(\|\mathbf{v}(t)\|_0^2 + S \|\mathbf{C}\|_0^2 \right) + S \|\nabla \mathbf{B}^0(t)\|_\infty \left(\|\mathbf{v}(t)\|_0^2 + \|\mathbf{C}(t)\|_0^2 \right) \end{aligned} \tag{10}$$

donde hemos utilizado que $((\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{C},\mathbf{v}(t)) = -((\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{v},\mathbf{C}(t))$.
Sea $S' = \max(1,S)$, despreciando los términos positivos en el primer miembro y agrupando términos en el segundo obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{v}(t)\|_0^2 + S\|\mathbf{C}(t)\|_0^2\right) \le \left(k\left(\max_\alpha \mu_\alpha\right)^2 \left\|\mathbf{u}^0\right\|_2^2 + \tfrac{S}{\mathrm{Rm}^2}\left\|\Delta\mathbf{B}^0\right\|_0^2\right) + \\ + \eta(t)\left(\|\mathbf{v}(t)\|_0^2 + S\|\mathbf{C}(t)\|_0^2\right),$$

con $\eta(t) := 1 + 2\|\nabla\mathbf{u}^0(t)\|_\infty + 2S'\|\nabla\mathbf{B}^0(t)\|_\infty$, de donde se concluye el resultado sin más que utilizar la desigualdad de Gronwall en la estimación anterior. ■

Cuando trabajamos en los espacios H_σ^m con $m \ge 4$ número natural, obtenemos un resultado similar:

Teorema 4 Sea $(\mathbf{u}_0,\mathbf{B}_0) \in H_\sigma^m \times H_\sigma^m$ con $m \ge 4$ y supongamos que los efectos de viscosidad en el sistema de la MHD vienen descritos por el operador $\widehat{V}$. Entonces, $\forall t \le T'$, con $T' < +\infty$ verificando (3) el par $(\mathbf{v},\mathbf{C})$ verifica

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{v}(t)\|_{m-2}^2 + S\|\mathbf{C}(t)\|_{m-2}^2 \le \\ &\le \exp\left(2\textstyle\int_0^t \xi(\tau)\,d\tau\right)\int_0^t\left[k(\mu^*)^2\|\mathbf{u}^0\|_m^2 + \tfrac{S}{\mathrm{Rm}^2}\|\mathbf{B}^0\|_m^2\right]d\tau\end{aligned} \tag{11}$$

siendo k es una constante positiva, $\mu^* := \max_\alpha \mu_\alpha$ y $\xi \in C([0,T'])$ independiente de Rm y μ_α.

Observación 3: Como en el caso anterior, de la desigualdad 11 se deduce que $(\mathbf{u}(t),\mathbf{B}(t)) \longrightarrow (\mathbf{u}^0(t),\mathbf{B}^0(t))$ en $H^{m-2}(\mathbb{R}^3)^3 \times H^{m-2}(\mathbb{R}^3)^3$ cuando $\mathrm{Rm} \to +\infty$ y $\mu_\alpha \to 0$, $\alpha = 0,...,4$, como $o(\mu^*) + o\left(\frac{1}{\mathrm{Rm}}\right)$.

Demostración: Como en los casos anteriores consideramos las ecuaciones (??) satisfechas por el par $(\mathbf{v},\mathbf{C}) := (\mathbf{u},\mathbf{B}) - (\mathbf{u}^0,\mathbf{B}^0)$ y las multiplicamos por las propias $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{C}(t)$ con el producto escalar de $H^{m-2}(\mathbb{R}^3)^3$, esto es,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{v}(t)\|_{m-2}^2 = \left(\widehat{V}\mathbf{u},\mathbf{v}\right)_{m-2} + S\left((\mathbf{C}\cdot\nabla)\mathbf{B}^0,\mathbf{v}\right)_{m-2} + S\left((\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{C},\mathbf{v}\right)_{m-2} \\ - \left((\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{u}^0,\mathbf{v}\right)_{m-2} - \left((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v},\mathbf{v}\right)_{m-2}, \tag{12}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{C}(t)\|_{m-2}^2 = \tfrac{1}{\mathrm{Rm}}(\Delta\mathbf{B},\mathbf{C})_{m-2} + \left((\mathbf{C}\cdot\nabla)\mathbf{u}^0,\mathbf{C}\right)_{m-2} + \left((\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{v},\mathbf{C}\right)_{m-2} \\ - \left((\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{B}^0,\mathbf{C}\right)_{m-2} - \left((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{C},\mathbf{C}\right)_{m-2}. \tag{13}$$

Los operadores $-\widehat{V}$ y $-\Delta$ son disipativos en H_σ y por lo tanto tambien en H_σ^{m-2}, ya que commutan con el operador $(1-\Delta)^{\frac{m-2}{2}}$. Llegamos entonces, utilizando la desigualdad de Young a

$$\begin{aligned}\left(\widehat{V}\mathbf{u},\mathbf{v}\right)_{m-2} &= \left(\widehat{V}\mathbf{v},\mathbf{v}\right)_{m-2} + \left(\widehat{V}\mathbf{u}^0,\mathbf{v}\right)_{m-2} \le k''\left(\max_{\alpha=0,\dots,4}\mu_\alpha\right)\left\|\mathbf{u}^0\right\|_m\|\mathbf{v}\|_{m-2} \\ &\le \frac{1}{2}k\left(\max_{\alpha=0,\dots,4}\mu_\alpha\right)^2\left\|\mathbf{u}^0\right\|_m^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{v}\|_{m-2}^2,\end{aligned}$$

y

$$\tfrac{1}{\mathrm{Rm}}(\Delta\mathbf{B},\mathbf{C})_{m-2} =\le \tfrac{-1}{\mathrm{Rm}}\|\nabla\mathbf{C}\|_{m-2}^2 + \tfrac{1}{2\mathrm{Rm}^2}\left\|\mathbf{B}^0\right\|_m^2 + \tfrac{1}{2}\|\mathbf{C}\|_{m-2}^2.$$

Obsevamos ahora que H_σ^{m-2} un álgebra de Banach pues $m-2>\frac{3}{2}$ y que además se verifican las siguientes estimaciones:

Lema ([11]) Se tienen las siguientes desigualdades:

i) $\left\|(\mathbf{w}\cdot\nabla)\,\mathbf{z}\right\|_r \leq c\left\|\mathbf{w}\right\|_r\left\|\mathbf{z}\right\|_{r+1}, \quad r>\frac{3}{2},\ \mathbf{w}\in H_\sigma^r,\ \mathbf{z}\in H_\sigma^{r+1}.$

ii) $\left|\left((\mathbf{w}\cdot\nabla)\,\mathbf{z},\mathbf{z}\right)_r\right| \leq c'\left\|\mathbf{w}\right\|_r\left\|\mathbf{z}\right\|_r^2, \quad r\geq 2,\ \mathbf{w}\in H_\sigma^r,\ \mathbf{z}\in H_\sigma^{r+1},\ r\in\mathbb{N},$

iii) $\left|\left((\mathbf{w}\cdot\nabla)\,\mathbf{z},\mathbf{z}\right)_2\right| \leq c'\left\|\mathbf{w}\right\|_3\left\|\mathbf{z}\right\|_2^2, \quad \mathbf{w},\ \mathbf{z}\in H_\sigma^3$

Aplicando las acotaciones anteriores en (12) y (13) llegamos a:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(S\left\|\mathbf{C}\left(t\right)\right\|_{m-2}^2+\left\|\mathbf{v}\right\|_{m-2}^2\right)\leq \tfrac{1}{2}k\left(\max\nolimits_{\alpha=0,\ldots,4}\mu_\alpha\right)^2\left\|\mathbf{u}^0\right\|_m^2+\tfrac{S}{2\mathrm{Rm}^2}\left\|\mathbf{B}^0\right\|_m^2$$
$$+\left(\left\|\mathbf{v}\right\|_{m-2}^2+S\left\|\mathbf{C}\right\|_{m-2}^2\right)\xi\left(t\right),$$

donde hemos denotado por

$$\xi\left(t\right):=K\left(\left\|\mathbf{u}\left(t\right)\right\|_{m-1}+\left\|\mathbf{B}\left(t\right)\right\|_{m-1}+\left\|\nabla\mathbf{u}^0\left(t\right)\right\|_{m-2}+\left\|\nabla\mathbf{B}^0\left(t\right)\right\|_{m-2}+\tfrac{1}{2}\right),$$

y $K:=\max\left(1,S,3c'S,c'\right)$ constante positiva que sólo depende de S y de m. Debido a la regularidad de las soluciones $(\mathbf{u},\mathbf{B})$ y $(\mathbf{u}^0,\mathbf{B}^0)$, se tiene que $\xi:(0,T')\longrightarrow\mathbb{R}$ está bien definida y es continua. Además, por ser $m\geq 4$ número entero, el teorema 1 nos permite afirmar que ξ está acotada en $[0,T']$ uniformemente en μ_α y Rm, para $\alpha=0,...,4$. Nuevamente una aplicación de la desigualdad de Gronwall en la expresión anterior nos conduce al resultado deseado ■

Finalmente, un resultado similar se alcanza también cuando consideramos que los efectos viscosos en el fluido vienen descritos por el operador Laplaciano:

Teorema 5 Sea $(\mathbf{u}_0,\mathbf{B}_0)\in H_\sigma^m\times H_\sigma^m$ con $m\geq 4$ y supongamos en el sistema de la MHD que $\mathbf{F}=\Delta$. Entonces, $\forall t\leq T'$, con $T'<+\infty$ verificando (3) el par $(\mathbf{v},\mathbf{C})$ se tiene

$$\begin{aligned}&\left\|\mathbf{v}\left(t\right)\right\|_{m-2}^2+S\left\|\mathbf{C}\left(t\right)\right\|_{m-2}^2\leq\\&\leq\exp\left(2\int_0^t\widehat{\xi}\left(\tau\right)d\tau\right)\int_0^t\left[\tfrac{1}{\mathrm{Re}^2}\left\|\nabla\mathbf{u}^0\right\|_{m-2}^2+\tfrac{S}{\mathrm{Rm}^2}\left\|\nabla\mathbf{B}^0\right\|_{m-2}^2\right]d\tau\end{aligned}\qquad(14)$$

donde $\widehat{\xi}\in\mathcal{C}\left([0,T']\right)$ independiente de Rm y Re.

Referencias

[1] S.I. Braginskii, "Transport processes in a plasma", *Reviews of Plasma Physics, Consultants Bureau, NY,* **1**, 1965, 205-311.

[2] R.E. Caflisch, I. Klapper, G. Steele, "Remarks on Singularities, Dimension and Energy Dissipation for Ideal Hydrodynamics and MHD", *Commun. Math. Phys.*, **184**, 1997, pp. 443-455.

[3] M. Cannone, Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes, Nouveaux Essais, Diderot Ed., Arts et Sciences, Paris, 1995.

[4] T. Cazenave, A. Haraux, *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1998.

[5] T.G. Cowling, *Magnetohidrodynamics*, John Wilwy & Sons, Inc., New York, 1968

[6] R. Dautray, J.L. Lions, *Analyse Mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, **vol. 9**, Ed. Masson, 1988.

[7] J.I. Díaz, M.B. Lerena, Artículo en preparación.

[8] J.I. Díaz, *Simulación numérica de un equilibrio de un plasma magnéticamente confinado en un Stellarator.* Informe #2. Ciemat, Abril 1998.

[9] G. Duvaut, J.L. Lions, "Inéquations en thermoélasticité et magnétohydrodynamique", *Arc. Rational Mech. Anal.*, **46**, 1972, pp. 241-279.

[10] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer NY 1966.

[11] T. Kato, "Nonstationary Flows of Viscous and Ideal Fluids in $\mathbb{R}^3$", *J. Functional Analysis* **9**, 1972, p. 296-305.

[12] T. Kato, "Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations", *L.N.M.* **448**, Springer-Verlag 1975, 25-70.

[13] M.B. Lerena, *Sistemas de ecuaciones en derivadas parciales no lineales en plasmas de fusión.* Tesis doctoral, Dpto. Matemática Aplicada, UCM, Julio 2001.

[14] P.Schmidt, "On a Magnetohydrodynamic problem of Euler type", *J. Diff. Eq.*, **74**, 1988, pp. 318-335.

[15] P. Secchi, "On the Equations of Ideal Incompressible Magneto-Hydrodynamics", *Rend. Sem. Ma. Univ. Padova,* **vol. 90** (1993), pp. 104-119.

[16] M. Spada, H. Wobig, "On the existence and uniqueness of dissipative plasma equilibria in a toroidal domain", *J. Phys. A: Math. Gen.*, **25**, 1992, 1575-1591.

[17] C. Sulem, "Quelques résultats de régularité pour les équations de la magnétohydrodinamique", *C.R.A.S. Série A,* **t. 285,** 1977, pp. 365-385.

[18] M. Sermange, R. Temam, "Some Mathematical Questions Related to the MHD Equations", *Comm. Pure. and Appl. Math.*, **vol XXXVI,** 1983, p. 635-664.

[19] J. Wu, "Viscous and inviscid magneto-hidrodynamics equations," *Journal Anal. Math.,* **vol. 73**, 1997, pp. 251-265.

1 Departamento de Análisis Económico: Economía Cuantitativa. Universidad Autónoma de Madrid, 28049 Cantoblanco, Madrid.

2 Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid, 28040 Madrid.