Sobre un modelo climático de balance de energía superficial acoplado con un océano profundo.

J.I. Diaz[1] L. Tello[2]

Resumen

En este trabajo se aborda el tratamiento matemático de un modelo climático bidimensional (latitud - profundidad) que responde al acoplamiento entre la temperatura superficial promediada y la temperatura interior de un océano. El modelo, propuesto en Watts y Morantine [1990], involucra una ecuación parabólica acoplada con otra ecuación parabólica no lineal que puede ser entendida como una condición de contorno dinámica y con un operador de difusión en el contorno. Mostramos la existencia de solución débil mediante la aplicación de un argumento de punto fijo.

Introducción.

En las últimas decadas se han llevado a cabo una serie de trabajos sobre los modelos de clima global de balance de energía, que modelan la evolución de la temperatura superficial de la Tierra (véase, por ejemplo, Díaz [1993], Díaz y Tello [1999], Ghil y Childress [1987], Hetzer [1990], North [1990], etc.). Matemáticamente, han sido abordados modelos bidimensionales (latitud-longitud) con dominio espacial dado por una variedad Riemanniana sin borde $\mathcal{M}$ simulando la superficie terrestre, como el que sigue:

$$\begin{cases} c(x)u_t - div(k(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \mathcal{G}(x,u) \in QS(x)\beta(x,u) + f & (0,T)\times\mathcal{M}, \\ u(x,0) = u_0(x) & \mathcal{M}, \end{cases} \tag{1}$$

donde u representa la temperatura superficial promediada, $\mathcal{G}(u) - f$ la energía emitida por la Tierra por enfriamiento y $QS(x)\beta(x,u)$ la energía absorbida dependiente de la función de coalbedo β (eventualmente discontinua). Modelos unidimensionales simplificados fueron anteriormente propuestos y suponen temperaturas uniformes sobre cada paralelo con la variable independiente dada por el seno de la latitud. Tras un cambio de coordenadas sobre la superficie esférica, se obtiene

$$\begin{cases} c(x)u_t - (k(x)(1-x^2)^{\frac{p}{2}}|u_x|^{p-2}u_x)_x + \mathcal{G}(x,u) \in QS(x)\beta(x,u) + f & (0,T)\times(0,1), \\ (1-x^2)^{\frac{p}{2}}|u_x|^{p-2}u_x = 0 & x\in\{0,1\}, \\ u(x,0) = u_0(x) & (0,1), \end{cases} \tag{2}$$

En estos modelos, la acción de los océanos sólo es tenida en cuenta de manera implícita y empírica en la dependencia espacial de los coeficientes. Sin embargo, estudios especializados sobre cambios climáticos acaecidos en la transición Glacial-Holoceno (véase p.e. Berger et al [1987]) muestran que el origen de tales cambios podrían tener su causa en grandes y rápidas oscilaciones (con fenómenos de calentamiento y enfriamiento) en las profundidades del océano Atlántico Norte. En este trabajo estudiaremos un modelo que incorpora explícitamente el acoplamiento superficie - océano profundo, planteado inicialmente en Watts y Morantine [1990].

En Watts y Morantine se modela la temperatura, U, en el interior del océano mediante el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{ll} U_t-(\frac{K_H}{R^2}(1-x^2)U_x)_x-K_VU_{zz}+wU_z=0 & \text{en } (0,T)\times(0,1)\times(-H,0),\\ wxU_x+K_VU_z=0 & z=-H,\\ DU_t-\frac{DK_{H_0}}{R^2}((1-x^2)U_x)_x+K_V\frac{\partial U}{\partial n}+wxU_x+A+BU=\frac{1}{\rho c}QS(x)\beta(x) & \text{en } z=0,\\ U(x,z,0)=U_0(x,z) & \text{en } (0,1)\times(-H,0),\\ U(x,0,0)=u_0(x) & \text{en } (0,1), \end{array}\right. \tag{3}$$

bajo la notación siguiente:

$A+BU$	$\equiv$	radiación emitida por la superficie al exterior,
K_V	$\equiv$	difusividad térmica vertical en el interior del océano,
K_H	$\equiv$	difusividad térmica horizontal en el interior del océano,
K_{H_0}	$\equiv$	difusividad térmica horizontal en la capa mixta,
w	$\equiv$	velocidad vertical,
R	$\equiv$	radio de la Tierra,
H	$\equiv$	profundidad del océano (supuesta constante),
Q	$\equiv$	constante solar,

Nótese que estos autores suponen un coalbedo β sólo dependiente de x. Las constantes ρ y c representan la densidad y el calor específico del agua, respectivamente y D es el grosor de la capa mixta. En Watts y Morantine [1990], además de justificar el modelo, se hacen experiencias numéricas para la versión unidimensional de (3), sin embargo, no se plantea la resolución del mismo (existencia, unicidad, regularidad) pese a que tal sistema no es en absoluto habitual en la literatura. Nótese que la tercera ecuación de (3) se puede interpretar como una condición de contorno dinámica que contiene un operador de difusión en ese contorno. Como ya hemos señalado, problemas de este tipo no son frecuentes en la literatura aunque el estudio de problemas similares se remonta a principios del siglo XX (véase la extensa lista de referencias recopilada en Bejenaru, Diaz y Vrabie [2001]).

Observamos en (3) que el operador de difusión en la frontera es lineal en U. Motivados por el trabajo de Stone [1972] en el que se proponía una representación más realista de las corrientes atmosféricas de gran escala (coeficiente de difusión dependiente del gradiente de temperaturas), nosotros consideraremos el operador eventualmente no lineal $\frac{DK_{H_0}}{R^2}\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)^{\frac{p}{2}}|\frac{\partial U}{\partial x}|^{p-2}\frac{\partial U}{\partial x}\right)$, que para $p=2$ es lineal (como en (3)) y que para $p=3$ corresponde a la propuesta de Stone [1972].

El objetivo de esta comunicación es iniciar el estudio de este tipo de sistemas mediante la consideración de un modelo simplificado pero que contiene los principales ingredientes de este atípico acoplamiento.

Existencia de solución para un modelo superficie - océano profundo.

El modelo considerado representa la evolución de temperatura en un océano "global"de profundidad H. Bajo la hipótesis de simetría respecto del Ecuador y temperatura constante sobre cada paralelo se toman como variables espaciales (x,z), siendo x el seno de la latitud y $-z$ la profundidad. Así, el dominio espacial se denota por $\Omega=(0,1)\times(-H,0)$ y su contorno, $\Gamma_H\cup\Gamma_0\cup\Gamma_1$, siendo $\Gamma_H=\{(x,z)\in\overline{\Omega}: z=-H\}$, $\Gamma_0=\{(x,z)\in\overline{\Omega}: z=0\}$ y $\Gamma_1=\{(x,z)\in\overline{\Omega}: x=0 \text{ ó } x=1\}$. Llamaremos (P) al problema

$$
\left\{
\begin{array}{rll}
\dfrac{\partial U}{\partial t}-\dfrac{K_H}{R^2}\dfrac{\partial}{\partial x}((1-x^2)\dfrac{\partial U}{\partial x})-K_v\dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}+w\dfrac{\partial U}{\partial z} & =0 & \text{en } (0,T)\times\Omega,\\
wx\dfrac{\partial U}{\partial x}+K_V\dfrac{\partial U}{\partial z} & =0 & \text{en } (0,T)\times\Gamma_H\\
D\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{DK_{H_0}}{R^2}\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)^{\frac{p}{2}}|\frac{\partial U}{\partial x}|^{p-2}\frac{\partial U}{\partial x}\right)+ & & \\
+K_V\frac{\partial U}{\partial n}+wx\frac{\partial U}{\partial x}+\mathcal{G}(U) & =\frac{1}{\rho c}QS(x)\beta(x,U) & \text{en } (0,T)\times\Gamma_0\\
(1-x^2)^{\frac{p}{2}}|\frac{\partial U}{\partial x}|^{p-2}\frac{\partial U}{\partial x} & =0 & \text{en } (0,T)\times\Gamma_1\\
U(0,x,z)=U_0(x,z) & & \text{en } \Omega,\\
U(0,x,0)=u_0(x) & & \text{en } (0,1).
\end{array}
\right.
$$

Estudiaremos la existencia de soluciones de (P) bajo las siguientes hipótesis estructurales,

(H_β) β es un grafo maximal monótono acotado, es decir, $|v|\leq M \quad \forall v\in\beta(s), \forall s\in D(\beta)=\mathbb{R}$.

($\mathrm{H}_\mathcal{G}$) $\mathcal{G}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función continua estrictamente creciente tal que $\mathcal{G}(0)=0$ y $|\mathcal{G}(\sigma)|\geq C|\sigma|^r$ para algún $r>0$.

(H_S) $S:(0,1)\to\mathbb{R}$, $s_1\geq S(x)\geq s_0>0$ a.e. $x\in(0,1)$.

(H_f) $f\in L^\infty(\Omega\times(0,T))$,

(H_w) $w\in C^1(\overline{\Omega})$ (por simplicidad).

No se espera la existencia de soluciones clásicas (en general) debido al carácter cuasi-lineal del problema y a la presencia del grafo β (que puede ser multívoco).

Teorema 1. *Dados $U_0 \in L^\infty(\Omega)$ y $u_0 \in L^\infty(\Gamma_0)$ existe al menos una solución débil global acotada de (P).*

Esquema de la demostración.

La idea de la demostración es construir cierto operador $\mathcal{T}$ y probar que todo punto fijo del operador $\mathcal{T}$ es solución de (P). Dividimos la demostración en varias etapas.

Etapa 1. Para cada $h \in L^\infty([0,T] \times \Gamma_0)$ se considera el problema (P_h) obtenido al sustituir en (P) el término de coalbedo por h. La demostración de la existencia de soluciones para (P_h) está inspirada en Diaz y Jimenez [1984] y Bejaranu, Diaz y Vrabie [2001]. Para ello, definimos el operador vectorial $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}(U,u) \longmapsto (AU, Bu)$$

y su dominio,

$$D(\mathcal{A}) = \{(U,u) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_0) : AU \in L^2(\Omega), Bu \in L^2(\Gamma_0), U_{|\Gamma_0} = u\},$$

siendo,

$$AU = -\frac{K_H}{R^2}\frac{\partial}{\partial x}((1-x^2)\frac{\partial U}{\partial x}) - K_V\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + w\frac{\partial U}{\partial z}$$

y

$$Bu = -\frac{DK_{H_0}}{R^2}\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)^{\frac{p}{2}}|\frac{\partial U}{\partial x}|^{p-2}\frac{\partial U}{\partial x}\right) + K_V\frac{\partial U}{\partial n} + wx\frac{\partial U}{\partial x} + \mathcal{G}(U).$$

Lema 1. *$\mathcal{A}+\omega I$ es T-monótono en $L^2(\Omega)\times L^2(\Gamma_0)$, supuesto $\omega > \frac{1}{2}$.* □

La idea de la demostración es la siguiente: Denotemos por $\mathbf{u} = (U,u)$ y $\mathbf{u}_+ = (U_+, u_+)$, siendo s_+ la parte positiva de s. Si por simplicidad suponemos $p=2$ entonces se tiene que

$$(\omega\mathbf{u} + \mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{u}_+)_{L^2(\Omega)\times L^2(\Gamma_0)} + \omega(\mathbf{u},\mathbf{u}_+)_{L^2(\Omega)\times L^2(\Gamma_0)} =$$
$$(\omega U, U_+) + (AU, U_+) + (\omega u, u_+) + (Bu, u_+) =$$

$$= \int_\Omega \omega|U_+|^2 dxdz + \int_{\Gamma_0}\omega|u_+|^2 dx + \int_\Omega \frac{K_H}{R^2}(1-x^2)|\frac{\partial U_+}{\partial x}|^2 dxdz + \int_\Omega K_V|\frac{\partial U_+}{\partial z}|^2 dxdz -$$
$$\int_\Omega w\frac{\partial U}{\partial z}U_+ dxdz + \int_0^1 K_V U_z(x,-H)U_+(x,-H)dx + \int_{\Gamma_0}\frac{DK_{H_0}}{R^2}(1-x^2)^{\frac{p}{2}}|\frac{\partial u_+}{\partial x}|^2 dx -$$
$$\frac{DK_{H_0}}{R^2}\frac{\partial U}{\partial x}(0,0)U_+(0,0) + \int_{\Gamma_0} wx\frac{\partial u}{\partial x}u_+ dx + \int_{\Gamma_0}\mathcal{G}(u)u_+ dx.$$

Utilizando la desigualdad de Young y la hipótesis de monotonía de $\mathcal{G}$, para todo $\omega > \frac{1}{2}$ se tiene que $0 \leq (\omega\mathbf{u} + \mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{u}_+)_{L^2(\Omega)\times L^2(\Gamma_0)}$. En el caso cuasiñineal, $p \neq 2$, se llega a que $0 \leq (\omega(\mathbf{u}-\mathbf{v}) + \mathcal{A}\mathbf{u} - \mathcal{A}\mathbf{v}, (\mathbf{u}-\mathbf{v})_+)_{L^2(\Omega)\times L^2(\Gamma_0)}$ ■

Notese que esto permite justificar el principio de comparación para el sistema

$$(P_{F,f}) \begin{cases} \omega U + AU = F & \text{en } L^2(\Omega) \\ \omega u + Bu = f & \text{en } L^2(\Gamma_0) \\ U_{|\Gamma_0} = u & \\ wx\frac{\partial U}{\partial x} + K_V \frac{\partial U}{\partial z} = 0 & \Gamma_H \\ (1-x^2)^{\frac{p}{2}} |\frac{\partial U}{\partial x}|^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 & \Gamma_1, \end{cases}$$

pues si se dan $F_1 \leq F_2$ y $f_1 \leq f_2$ entonces las soluciones de (P_{F_1,f_1}) y (P_{F_2,f_2}) satisfacen

$$U_1 \leq U_2,$$
$$u_1 \leq u_2.$$

Se tiene además el siguiente
Lema 2. $R(\mathcal{A} + \lambda I) = L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_0)$ para todo $\lambda > \frac{1}{2}$. □

La idea de la demostración del Lema 2 es observar que esa condición sobre el rango se reduce a ver que el operador B se puede descomponer como suma de dos operadores maximales nonótonos en $L^2(\Gamma_0)$, B_1 y B_2, con

$$B_1 u = -\frac{DK_{H_0}}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} \left((1-x^2)^{\frac{p}{2}} |\frac{\partial U}{\partial x}|^{p-2} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \mathcal{G}(U).$$

y el operador pseudo-diferencial

$$B_2 u = K_V \frac{\partial U}{\partial n},$$

con U solución de

$$\omega U + AU = F \quad \text{en } L^2(\Omega)$$
$$U_{|\Gamma_0} = u,$$

más un tercer operador

$$B_3 u = wx\frac{\partial U}{\partial x},$$

que, aunque no es necesariamente monótono, "está dominado" (en un cierto sentido) por los anteriores operadores. En consecuencia, es posible aplicar resultados abstractos de perturbación de operadores maximales monótonos (véase por ejemplo la proposition 2.10 de Brezis [1973]), lo que conduce a la conclusión.

Observación 1. Si $w = 0$ entonces se puede probar que $\mathcal{A} = \partial\phi$ (subdiferencial de un funcional propio, convexo y semicontinuo inferiormente). En consecuencia, si $w = 0$ $\mathcal{A}$ goza de propiedades regularizantes adicionales.

Etapa 2. Sigue las lineas generales de la demostración del Teorema 3 de Diaz y Tello [1999]. Se define el operador $\mathcal{T} : h \mapsto g$ siendo $g \in \beta(x, u_h)$ y u_h la solución de (P_h). Es fácil ver que todo punto fijo de $\mathcal{T}$ es solución de (P).

La demostración concluye al comprobar que $\mathcal{T}$ verifica las hipótesis del Teorema de punto fijo de Kakutani. Más concretamente se tiene que si denotamos por $X = L^p((0,T), L^2(\Gamma_0))$ entonces

i) el conjunto $K = \{h \in L^p((0,T), L^\infty(\Omega)) : ||h(t)|| \leq C_0$ a.e. $t \in (0,T)\}$ es un subconjunto convexo y débilmente compacto de X;

ii) $\mathcal{T} : K \mapsto 2^X$ toma valores no vacios, convexos y cerrados y verifica que $\mathcal{T}(g) \subset K$, $\forall g \in K$;

iii) graf($\mathcal{T}$) es débil×débil secuencialmente cerrado.

En consecuencia, $\mathcal{T}$ posee al menos un punto fijo en K que resulta ser solución de (P).■

Observación 2. El Lema 1 y argumentos similares al Lema 3 de Diaz y Tello [1999] permiten probar la existencia de solución maximal y solución minimal, pues hace posible la aplicación de un argumento de comparación para el operador vectorial $\mathcal{A}$.

Observación 3. Es posible mostrar la existencia de soluciones de (P) mediante la convergencia de soluciones clásicas de un sistema aproximado más regular.

Observación 4. La presencia de la función de coalbedo discontínuo, β expresada mediante un grafo maximal monótono multívoco, permite la construcción de contraejemplos a la unicidad de solución, pese al carácter parabólico del sistema (P). Véase Diaz [1993] para el caso de la ecuación de la temperatura latitudinal dada por (2).

Observación 5. Un paso ulterior en la comprensión de estos modelos de acoplamiento superficie - océano profundo podría ser la extensión del Teorema 1 a modelos que consideren Γ_0 como una variedad Riemanniana simulando la superficie terrestre. Serán, por tanto, modelos con dominio espacial tridimensional. Su estudio está siendo abordado por estos autores en la actualidad.

Referencias

[1] I. Bejenaru, J.I. Diaz, I.I. Vrabie, "An abstract approximate controllability result and applications to elliptic and parabolic systems with dynamic boundary conditions", *Electronic J. Diff. Equns.*, **2001**, 50, (2001), 1-19.

[2] W.H. Berger, S. Burker, E. Vincent, "Gacial-Holocene transition: Climate Pulsations and Sporadic Shutdown of NADW production", en *Abrupt Climatic Change - Evidence and Implications*, (eds. W.H. Berger, L.D. Labeyrie), Reidel Publishing Co. Dordrecht Holland (1987).

[3] H. Brezis, *Operateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North Holland, Amsterdam (1973).

[4] J.I. Diaz, "Mathematical analysis of some diffusive energy balance climate models", in the book *Mathematics, Climate and Environment*, (J.I. Diaz and J.L. Lions, eds.) Masson, Paris, 28-56 (1993).

[5] J.I. Diaz, R. Jimenez, "Aplicación a la teoria no lineal de semigrupos a un operador pseudodiferencial" *Actas VII CEDYA*, Univ. Granada (1984) 137-142.

[6] J.I. Diaz, L. Tello, "A nonlinear parabolic problem on a Riemannian manifold without boundary arising in Climatology", *Collectanea Mathematica* **50**,1 (1999), 19-51.

[7] M. Ghil, S. Childress, *Topics in Geophysical Fluid Dynamics: Atmospheric Dynamics Dynamo Theory and Climate Dynamics.* Springer Verlag. Applied Mathematical Sciences. 1987.

[8] G. Hetzer, "The structure of the principal component for semilinear diffusion equations from energy balance climate models", *Houston Journal of Math.* **16**, 203-216 (1990).

[9] G.R. North, "Multiple solutions in energy balance climate models". *Paleogeography, Paleoclimatology, Paleoecology* **82**, Elsevier Science Publishers B.V. Amsterdam, 225-235 (1990).

[10] P.H. Stone, "A simplified radiative - dynamical model for the static stability of rotating atmospheres", *Journal of the Atmospheric Sciences,* **29**, No. 3, 405-418 (1972).

[11] I.I. Vrabie, *Compactness methods for nonlinear evolutions*, Pitman Longman. London. 1987.

[12] R.G. Watts, M. Morantine, "Rapid climatic change and the deep ocean", *Climatic Change* , **16**, (1990) 83-97.

1 Departamento Matemática Aplicada. F. Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid. Avda. Complutense. 28040 Madrid. Proyecto REN2000-0766.

2 Departamento Matemática Aplicada. E.T.S. Arquitectura. Universidad Politécnica de Madrid. Avda. Juan de Herrera. 28040 Madrid. Proyecto REN2000-0766.