Un problema de obstáculo en política medio-ambiental.

J.I. Díaz[1] C. Faghloumi[2]

Resumen

Se considera el problema de utilidad asociado a un proyecto industrial para el que se valora no sólo sus beneficios propios sino también los del medio ambiente. Tras cuantificar la función de utilidad se reformula el problema en términos de un problema de obstáculo para un operador elíptico que degenera en los bordes del dominio espacial: el primer cuadrante del plano. Se da un teorema de existencia y unicidad que evita las dificultades derivadas de la degeneración y del hecho de que el dominio es no acotado. Finalmente, se estima la localización de la región de coincidencia con el obstáculo.

Introducción

Consideramos el medio ambiente y un proyecto industrial concreto como dos bienes económicos tales que los beneficios en el instante t vienen dados por $X(t)$ e $Y(t)$ respectivamente. Supongamos que los beneficios del medio ambiente quedarían completamente anulados una vez que el proyecto industrial entre en funcionamiento. Los beneficios $X(t)$ e $Y(t)$ se suponen dados por ciertos procesos de difusión del tipo

$$dX(t) = \mu_1 X(t)dt + \sigma_1 X(t)dB_1(t), \qquad X(0) = x, \tag{1}$$

$$dY(t) = \mu_2 Y(t)dt + \sigma_2 Y(t)dB_2(t), \qquad Y(0) = y, \tag{2}$$

donde B_1 y B_2 son dos movimientos Brownianos definidos en el espacio de probabilidad $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$, de correlación $\varrho \in (-1,1)$, y con x, y reales positivos dados. En esta comunicación supondremos que las medias de los beneficios $E(X(t))$ y $E(Y(t))$ son crecientes en el tiempo y vienen dadas por

$$E(X(t)) = xe^{(\mu_1-\sigma_1)t}, \qquad E(Y(t)) = ye^{(\mu_2-\sigma_2)t},$$

para ciertos μ_1 y μ_2 no negativos. Señalemos que el caso $\mu_1 = \mu_2 = 0$ fue considerado en [?] pero que la hipótesis $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ es más realista ya que es difícil pensar en una inversión para la que la media de los beneficios decrezca. Supondremos que es posible cuantificar la utilidad mediante el funcional

$$J(x,y;T) \doteq E\left[\int_0^T f(X(t))e^{-\alpha s}ds + \int_T^\infty Y(t)e^{-\alpha s}ds\right], \tag{3}$$

donde f es una función real dada y α una constante positiva. Nuestro objetivo principal es estudiar la función optimal v dada como el máximo de la función utilidad cuando el horizontes temporal T varía en $[0,\infty)$:

$$v(x,y) \doteq \max_T\{J(x,y,T)\}.$$

Recordemos que el par (x,y) puede variar en el dominio abierto y no acotado

$$\Omega = \{(x,y) \in I\!R^2 : x > 0,\ y > 0\}.$$

Mediante técnicas bien conocidas (véase, por ejemplo, [?]), es fácil mostrar que la función optimal v satisface el problema de obstáculo

$$\min\{-\mathcal{L}v - (\mu_1 x, \mu_2 y)\cdot\nabla v + \alpha v - f(x), v - h\} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \tag{4}$$

donde $\mathcal{L}$ es el operador diferencial asociado a la multidifusión $(X(t), Y(t))$,dado por

$$\mathcal{L}v \doteq \sigma_1^2 x^2 v_{xx} + \sigma_2^2\ y^2 v_{yy}\ + \sigma_1\sigma_2\varrho xy v_{xy}$$

y el obstáculo viene dado por

$$h(x,y) \doteq E\left[\int_0^\infty Y_s e^{-\alpha s} ds\right] = \frac{y}{\alpha - \mu_1}.$$

En el presente trabajo mostraremos que $v : \Omega \to I\!R$ queda univocamente determinada por (4) (e.d. que existe una única solución) y estudiaremos algunas de sus propiedades. Nótese que el problema genera una frontera libre dada por el contorno del dominio de coincidencia (el dominio de los puntos $(x,y) \in \Omega$ donde v coincide con el obstáculo h). En adecuadas condiciones, esta frontera libre viene como el grafo de una función $g : [0,\infty) \to I\!R^+$ que da lugar a la llamada "formulación fuerte":

$$\left\{\begin{array}{lll} -\mathcal{L}v + \mu v \geq f(x) & \text{y}\ \ v(x,y) = h(y) & \text{si}\ \ x \geq g(y), \\ -\mathcal{L}v + \mu v = f(x) & \text{y}\ \ v(x,y) \geq h(y) & \text{si}\ \ x \leq g(y). \end{array}\right. \tag{5}$$

Nótese que, en todo caso, g sería una función desconocida *a priori*. Otra formulación general del problema elíptico no lineal de obstáculo (4) se puede obtener en términos de operadores multívocos. Se sabe (véase, p.e., [?]) que el problema de obstáculo se puede escribir como

$$-\mathcal{L}v + \mu v + \gamma(v - h) \ni f(x) \quad \text{en} \quad \Omega, \tag{6}$$

con γ el grafo maximal monótono de $I\!R^2$ dado como

$$\gamma(u) = \left\{\begin{array}{lll} \{0\} & \text{si} & u > 0, \\ (-\infty, 0] & \text{si} & u = 0, \\ \emptyset & \text{si} & u < 0, \end{array}\right.$$

donde $\emptyset$ simboliza el conjunto vacío. Nótese que el operador $\mathcal{L}(v)$ no viene dado en forma divergencia. Sin embargo es posible utilizar la linealidad y las propiedades especiales del operador $\mathcal{L}(v)$ para observar que $\mathcal{L}(v)$ se puede escribir con su parte principal en forma de divergencia. Siguiendo la notación introducida en [?], sean

$$\mathbf{A}(x,y) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 x^2 & \sigma_1\sigma_2\rho xy \\ \sigma_1\sigma_2\rho xy & \sigma_2^2 y^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(x,y) = \begin{pmatrix} (2\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2\rho)x \\ (2\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_2\rho)y \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{b_0}(x,y) = \begin{pmatrix} -\mu_1 x \\ -\mu_2 y \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que

$$\mathcal{L}(v) = div\,(\mathbf{A}\nabla v) - (\mathbf{b} + \mathbf{b_0}) \cdot \nabla v.$$

Un hecho que ha acarreado una cierta polémica entre diversos autores (véase, p.e. [?]) es la ausencia de condiciones de frontera en la formulación (4). Aquí, adoptaremos el planteamiento, ya seguido en (4), de que el operador $\mathcal{L}(v)$ prescribe automaticamente unas condiciones de contorno "naturales"

$$(\mathbf{A}\nabla u) \cdot \nu = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega, \tag{7}$$

donde ν es el vector normal saliente unitario, dada la forma especial de la matriz $\mathbf{A}(x,y)$. Sea ahora $h = h(x,y)$ una función obstáculo general. Por numerosas razones, es conveniente introducir el cambio de variable $u = v - h$, con lo que el problema bajo consideración viene dado como:

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -div\,(\mathbf{A}\nabla u) + (\mathbf{b} + \mathbf{b_0}) \cdot \nabla u + \mu u + \ \beta(u) \ni G & \text{en} \quad \Omega, \\ (\mathbf{A}\nabla u) \cdot \nu = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $G(x,y) = f(x) - H(x,y)$ y

$$h(x,y) = E[\int_0^\infty H(X(t),Y(t))e^{-\mu s} ds].$$

Realmente, con más generalidad, podemos suponer que G es una función arbitraria conocida. Nótese que como el dominio Ω no es acotado la condición de contorno (7) tiene que ser completada con hipótesis sobre las condiciones de crecimiento de la solución v para (x,y) grandes. Usualmente, esto viene implícitamente implicado por el tipo de condiciones de crecimiento sobre el dato $G(x,y)$. En nuestro caso supondremos siempre que

$$\text{existen} \quad m_1 > 1 \text{ y } m_2 > 1 \text{ tales que } w^{\frac{1}{2}} G \in L^2(\Omega), \tag{8}$$

donde la función *peso* $w(x,y)$ esta definido por

$$w(x,y) = (1 + x^2)^{-m_1}(1 + y^2)^{-m_2}. \tag{9}$$

En otras palabras, supondremos que

$$\int_\Omega (1 + x^2)^{-m_1}(1 + y^2)^{-m_2} G^2(x,y)\, dxdy < \infty.$$

Existencia y unicidad de soluciones

Antes de introducir la formulación débil del problema $(\mathcal{P})$ definamos los espacios de Hilbert

$$L^2_w(\Omega) = \left\{ v : w^{\frac{1}{2}} v \in L^2(\Omega) \right\}$$

equipado con la norma

$$\|u\|_{L^2_w(\Omega)} = \left\| w^{\frac{1}{2}} u \right\|_{L^2(\Omega)},$$

y

$$H^1_w(\Omega, \mathbf{A}) = \left\{ v : v \in L^2_w(\Omega), x v_x \in L^2_w(\Omega), y v_y \in L^2_w(\Omega) \right\},$$

equipado con la norma :

$$\|u\|^2_{H^1_w(\Omega,\mathbf{A})} = \|u\|^2_{L^2_w(\Omega)} + \|x u_x\|^2_{L^2_w(\Omega)} + \|y u_y\|^2_{L^2_w(\Omega)}.$$

Consideremos el dominio convexo $\mathcal{K}$ definido por

$$\mathcal{K} = \left\{ v \in H^1_w(\Omega, \mathbf{A}), v \geq 0 \text{ en } \Omega \right\}.$$

Es fácil ver que cualquier solución de $(\mathcal{P})$ satisface el problema bajo una formulación débil que se puede definir en los siguientes términos

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{K}}) \begin{cases} u \in \mathcal{K}, \\ a(u, v-u) \geq L(v-u), \text{ para todo } v \in \mathcal{K}, \end{cases}$$

donde

$$a(u,v) = \int_\Omega \{ (\mathbf{A}\nabla u \cdot \nabla v) w + (\mathbf{A}\nabla u \cdot \nabla w + w(\mathbf{b} + \mathbf{b_0}) \cdot \nabla u) v + \mu u v w \} dx dy$$

y

$$L(v) = \int_\Omega G v w dx dy.$$

Recíprocamente, se puede demostrar, que cualquier solución u de $(\mathcal{P}_{\mathcal{K}})$ dos veces diferenciable satisface siempre $(\mathcal{P})$ (ver, por ejemplo, la exposición de [?]).

Nuestros resultados de existencia necesitarán ciertas condiciones técnicas sobre las constantes σ_i m_i y μ_i que intervienen en los coeficientes del operador $\mathcal{L}(v)$ y en la condición de crecimiento de G: Sean

$$\begin{aligned}
l_1 &= \left(2\sigma_1\sigma_2\rho + 2\sigma_1^2 - \mu_1 + (1 - 2m_1(1-\rho))\,\sigma_1^2\right) m_1 \\
l_2 &= \left(2\sigma_1\sigma_2\rho + 2\sigma_2^2 - \mu_2 + (1 - 2m_2(1-\rho))\,\sigma_2^2\right) m_2 \\
l_3 &= \frac{\left(2\sigma_1\sigma_2\rho + 2\sigma_1^2 - \mu_1 + 3\sigma_1^2\right)^2}{2\sigma_1^2\,(1 + m_1(1-\rho))} \\
l_4 &= \frac{\left(2\sigma_1\sigma_2\rho + 2\sigma_2^2 - \mu_2 + 3\sigma_2^2\right)^2}{2\sigma_2^2\,(1 + m_2(1-\rho))}
\end{aligned}$$

y

$$\alpha_0 = -\min\{0, l_1, l_2, l_3, l_4\}$$

Teorema 1 ***Teorema 2*** *Supongamos (8) y que*

$$\alpha > \alpha_1 2\alpha_0 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho - \mu_1 - \mu_2 \ . \tag{10}$$

Entonces, existe una única solución débil $u \in K$ del problema $(\mathcal{P}_K)$.

Demostración. Empezaremos por introducir un cambio de variables espaciales que transforma el conjunto no acotado Ω en un conjunto acotado. En concreto, sea $\mathcal{F}$ la transformación dada por.

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{F}: & \Omega & \to & (0,\frac{\pi}{2}) \times (0,\frac{\pi}{2}) \\ & (x,y) & \to & (\theta,\beta) = \mathcal{F}(x,y) = (\arctan x, \arctan y). \end{array}$$

con lo que

$$\mathcal{F}(\Omega) = (0,\frac{\pi}{2}) \times (0,\frac{\pi}{2}).$$

Notese que la hipótesis (8) es equivalente a

$$\text{existen } \ \widehat{m}_1, \widehat{m}_2 > 0 \text{ tales que } \omega^{\frac{1}{2}}\widehat{G} \in L^2(\mathcal{F}(\Omega)), \tag{11}$$

donde $\widehat{m}_1 = m_1 - 1$, $\widehat{m}_2 = m_2 - 1$, $\omega(\theta,\beta) = \cos^{2\widehat{m}_1}(\theta)\cos^{2\widehat{m}_2}(\beta)$ y $\widehat{G}(\theta,\beta) = G(\mathcal{F}^{-1}(\theta,\beta))$: en otras palabras

$$\int_{\mathcal{F}(\Omega)} \omega(\theta,\beta)\widehat{G}^2(\theta,\beta)d\theta d\beta < \infty. \tag{12}$$

Introduzcamos la notación

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 sen^2\theta\cos^2\theta & \sigma_1\sigma_2\rho sen\theta\cos\theta sen\beta\cos\beta \\ \sigma_1\sigma_2\rho sen\theta\cos\theta sen\beta\cos(\beta) & \sigma_2^2 sen^2\beta\cos^2\beta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} (sen\theta\cos\theta)(2\sigma_1^2\cos^2\theta + \sigma_1\sigma_2\rho[\cos^2\beta - sen^2\beta]) \\ (sen\beta\cos\beta)(2\sigma_2^2\cos^2(\beta) + \sigma_1\sigma_2\rho[^2\cos\theta - sen^2\theta]) \end{pmatrix} \ \text{y} \ \mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} -\frac{\mu_1}{2}sen2\theta \\ -\frac{\mu_2}{2}sen2\beta \end{pmatrix}.$$

En términos de las nuevas variables espaciales, el modelo pasa a ser

$$(\widehat{\mathcal{P}}) \left\{ \begin{array}{ll} -div_{(\theta,\beta)}(\mathbf{S}\nabla u) + (\mathbf{p}+\mathbf{p_0})\cdot\nabla u + \mu u + \gamma(u) \ni \widehat{G} & \text{en} \ \ \mathcal{F}(\Omega), \\ (\mathbf{S}\nabla u)\cdot\widetilde{\nu} = 0 & \text{en} \ \ \partial\mathcal{F}(\Omega), \end{array} \right.$$

donde ahora $\widetilde{\nu}$ simboliza el vector normal saliente unitario en $\partial\mathcal{F}(\Omega)$. La formulación débil de $(\widehat{\mathcal{P}})$ comienza, de nuevo con la definición de los espacios de Hilbert asociados al problema:

$$L^2_\omega(\mathcal{F}(\Omega)) = \left\{ v : \omega^{\frac{1}{2}}v \in L^2(\mathcal{F}(\Omega)) \right\}$$

equipado con la norma:

$$\|u\|_{L^2_\omega(\mathcal{F}(\Omega))} = \left\|\omega^{\frac{1}{2}}u\right\|_{L^2(\mathcal{F}(\Omega))},$$

y

$$H^1_\omega(\mathcal{F}(\Omega),\mathbf{S}) = \left\{ v : v \in L^2_\omega(\mathcal{F}(\Omega)), (sen2\alpha)v_\alpha \in L^2_\omega(\mathcal{F}(\Omega)), (\text{ sen } 2\beta)v_\beta \in L^2_\omega(\mathcal{F}(\Omega)) \right\}$$

equipado con la norma:

$$\|u\|^2_{H^1_\omega(\mathcal{F}(\Omega),\mathbf{S})} = \|u\|^2_{L^2_\omega(\mathcal{F}(\Omega))} + \|(sen2\alpha)v_\alpha\|^2_{L^2_\omega(\mathcal{F}(\Omega))} + \|(sen2\beta)v_\beta\|^2_{L^2_\omega(\mathcal{F}(\Omega))}.$$

Introducimos también los conjuntos

$\mathcal{F}\left(H^1_w(\Omega,\mathbf{A})\right) = \left\{v(\alpha,\beta) : v(\alpha,\beta) \in H^1_w(\Omega,\mathbf{A})\right\}$ y $\widehat{\mathcal{K}} = \left\{v \in H^1_\omega(\mathcal{F}(\Omega),\mathbf{S}), v \geq 0\right\}.$

Es fácil ver que

$$\mathcal{F}\left(H^1_w(\Omega,\mathbf{A})\right) = H^1_\omega(\mathcal{F}(\Omega),\mathbf{S})$$

y que

$$\mathcal{F}(\mathcal{K}) = \widehat{\mathcal{K}}.$$

Ahora la formulación débil de $(\widehat{\mathcal{P}})$ puede ser enunciada en los siguientes términos

$$(\widehat{\mathcal{P}}_{\widehat{\mathcal{K}}}) \begin{cases} u \in \widehat{\mathcal{K}}, \\ \widehat{a}(u, v-u) \geq \widehat{L}(u, v-u) \qquad \forall v \in \widehat{\mathcal{K}}, \end{cases}$$

donde

$$\widehat{a}(u,v) = \int_{\mathcal{F}(\Omega)} (\omega\nabla v \cdot \mathbf{S} \cdot \nabla u + (\nabla\omega \cdot \mathbf{S} + \omega(\mathbf{p}+\mathbf{p}_0)) \cdot \nabla uv + \mu\omega uv) d\theta d\beta$$

y

$$\widehat{L}(v) = \int_{\mathcal{F}(\Omega)} (\omega\widehat{G}v) d\theta d\beta.$$

Los dos siguientes lemas conducen a la conclusión del Teorema 1.

Lema 1 *Bajo las hipótesis (10) y (11), u es solución de $(\widehat{\mathcal{P}}_{\widehat{\mathcal{K}}})$ si y solo si $u \circ \mathcal{F}$ es solución de $(\mathcal{P}_{\mathcal{K}})$.*

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned} \widehat{a}(u,v) &= \int_{\mathcal{F}(\Omega)} \{\omega\nabla v \cdot \mathbf{S}\nabla u + (\nabla\omega\mathbf{S} + \omega(\mathbf{p}+\mathbf{p}_0) \cdot \nabla uv + \mu\omega uv\} d\theta d\beta \\ &= \int_\Omega \{w\nabla v(\mathcal{F}) \cdot \mathbf{A}\nabla u(\mathcal{F}) + (\nabla w\mathbf{A} + w(\mathbf{b}+\mathbf{b}_0) \cdot \nabla u(\mathcal{F}))v(\mathcal{F}) + \mu wu(\mathcal{F})v(\mathcal{F})\} dxdy \\ &= a(u \circ \mathcal{F}, v \circ \mathcal{F}) \end{aligned}$$

y que

$$\widehat{L}(v) = \int_{\mathcal{F}(\Omega)} \omega\widehat{G}v d\theta d\beta = \int_\Omega Gwv \circ \mathcal{F} dxdy = L(v \circ \mathcal{F})).$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{F}$ es un difeomorfismo se obtiene la conclusión

Lema 2 *Si se cumplen las hipótesis (10) y (11) entonces existe una única solución u del problema $(\widehat{\mathcal{P}}_{\widehat{\mathcal{K}}})$.*

Demostración. Es fácil ver que la forma bilineal $\widehat{a}$ es continua. Efectivamente, por la desigualdad de Hölder

$$|\widehat{a}(u,v)| \leq C \, \|u\|_{H^1_\omega(\mathcal{F}(\Omega),\mathbf{S})} \, \|v\|_{H^1_\omega(\mathcal{F}(\Omega),\mathbf{S})} \, ,$$

donde

$$C = (\frac{5}{4} + \widehat{m}_1)\sigma_1 + (\frac{5}{4} + \widehat{m}_2)\sigma_2 + (\frac{9}{4} + \widehat{m}_1 + \widehat{m}_2)\sigma_1\sigma_2|\rho| + \mu_1 + \mu_2 + \alpha.$$

Además, $\widehat{a}$ es coercitiva. Efectivamente,

$$\begin{aligned}
\widehat{a}(u,u) &= \int_{\mathcal{F}(\Omega)} \omega\nabla v \cdot \mathbf{S}\nabla u + \omega(\mathbf{p}+\mathbf{p}_0)\cdot\nabla u)u + \mu\omega uv \\
&\geq \int_{\mathcal{F}(\Omega)} \frac{1}{4}\sigma_1^2(1-\rho)\omega(sen^2 2\theta)(u_\theta)^2 + \frac{1}{4}\sigma_2^2(1-\rho)\omega(sen^2 2\beta)(u_\beta)^2 \\
&\quad + \int (\widehat{m}_1+1)\left(2\sigma_1\sigma_2\rho + 5\sigma_1^2 - \mu_1\right) sen^2(\theta)\omega u^2 \\
&\quad - \int 2\,(\widehat{m}_1+1)\,\sigma_1^2\,(1 + (\widehat{m}_1+1)\,(1-\rho))\, sen^4(\theta)\omega u^2 \\
&\quad + \int (\widehat{m}_2+1)\left(2\sigma_1\sigma_2\rho + 5\sigma_2^2 - \mu_1\right) sen^2(\beta)\omega u^2 \\
&\quad - \int 2\,(\widehat{m}_2+1)\,\sigma_2^2\,(1 + (\widehat{m}_2+1)\,(1-\rho))\, sen^4(\beta)\omega u^2 \\
&\quad + \int_{\mathcal{F}(\Omega)} \left(\alpha - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho + \mu_1 + \mu_2\right)\omega u^2,
\end{aligned}$$

Gracias a la hipótesis (10), tenemos que

$$\widehat{a}(u,u) \geq \eta \, \|u\|^2_{H^1_\omega(\mathcal{F}(\Omega),\mathbf{S})}$$

donde

$$\eta = min\{\frac{1}{4}\sigma_1^2(1-\varrho), \frac{1}{4}\sigma_2^2(1-\varrho), \alpha - \alpha_1\}.$$

Por otro lado, la forma lineal $\widehat{L}$ es continua, pues, gracias a (11)

$$|\widehat{L}(v)| = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \omega\widehat{G}v dy dz \leq \left\|\widehat{G}\right\|_{L^2_\omega(\mathcal{F}(\Omega))} \|v\|_{L^2_\omega(\mathcal{F}(\Omega)\ )} \, ,$$

dado que $\widehat{G} \in L^2_\omega(\mathcal{F}(\Omega))$. Finalmente, como $\widehat{\mathcal{K}}$ es un convexo y cerrado de $H^1_\omega(\mathcal{F}(\Omega), \mathbf{S})$, en virtud del Teorema de Stampacchia (véase, p.e., [?]) concluimos que el problema $(\widehat{\mathcal{P}}_{\widehat{\mathcal{K}}})$ tiene una única solución $u \in \widehat{\mathcal{K}}$ tal que

$$\|u\|_{H^1_\omega(\mathcal{F}(\Omega),\mathbf{S})} \leq \frac{C}{\eta} \left\|\widehat{G}\right\|_{L^2_\omega(\mathcal{F}(\Omega))}$$

Nuestro próximo resultado muestra que la solución débil satisface, localmente, el problema $(\mathcal{P})$ en casi todo punto del dominio Ω. Esto se reduce a mostrar que la expresión $\mathcal{L}(v) = div\,(\mathbf{A}\nabla v)$ tiene sentido en casi todo punto, una propiedad claramente implicada por la propiedad $u \in H^2_{loc}(\Omega)$.

Proposición 1 *Supongamos las condiciones del Teorema 1 y sea u la solución débil de $(\mathcal{P})$. Entonces $u \in H^2_{loc}(\Omega)$.*

Demostración. Es claro que si u es una solución de $(\mathcal{P}_{\mathcal{K}})$ entonces u satisface el problema en sentido local. Más precisamente, u *es una solución débil y local* de $(\mathcal{P})$ en el sentido de H. Brezis ([?]), i.e.

$$a(u, \eta(v-u)) \geq L(\eta(v-u)) \quad \forall v \in \mathcal{K} \quad \text{y } \forall \eta \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, consideramos el problema local auxiliar

$$(P_*) \begin{cases} -\mathcal{L}u_* + \mathbf{b}_0 \nabla u_* + \alpha u_* + \gamma(u_*) \ni G & \text{en} \quad \Omega'_\epsilon, \\ (\mathbf{A} \cdot \nabla u_*) \cdot \nu = (\mathbf{A} \cdot \nabla u) \cdot \nu & \text{en} \quad \partial\Omega'_\epsilon, \end{cases}$$

donde $\Omega'_\epsilon = \{(x,y) \in \Omega : d((x,y), \Omega') < \epsilon\}$ y Ω' es el subdominio acotado de Ω tal que $\Omega' \subset\subset \Omega$. Supongamos $d = dist(\partial\Omega, \Omega'_\epsilon) > 0$. Entonces

$$\xi \cdot \mathbf{A}\xi = \sigma_1^2 x^2 \xi_1 \xi_1 + \sigma_1^2 y^2 \xi_2 \xi_2 + \sigma_1 \sigma_2 \rho xy \xi_1 \xi_2 + \sigma_1 \sigma_2 \rho xy \xi_2 \xi_1 \geq cd|\xi|^2 \quad \forall \xi \in I\!R^2 - \{0\},$$

para una cierta $c > 0$ que depende solamente de σ_1, σ_2 y ϱ. Definamos

$$H^{1,+}(\Omega'_\epsilon) = \left\{ v \in H^1(\Omega'_\epsilon) : v \geq 0 \text{ en } \Omega'_\epsilon \right\}.$$

Gracias a los resultados de regularidad de [?] la (única) solución débil u_* del problema $(\mathcal{P}_*)$ satisface que $u_* \in H^2(\Omega'_\epsilon) \cap H^{1,+}(\Omega'_\epsilon)$. Entonces u_* es una solución local fuerte del problema $(\mathcal{P}_*)$ en el sentido de que

$$\langle -\mathcal{L}u_* + \mu u_*, \eta(v - u_*) \rangle_{L^2(\Omega'_\epsilon)} \geq \langle G, \eta(v - u_*) \rangle_{L^2(\Omega'_\epsilon)} \quad \forall \eta \in \mathcal{D}(\Omega'_\epsilon) \text{ y } \forall v \in H^{1,+}(\Omega'_\epsilon).$$

Por otra parte, es claro que $u \in H^{1,+}(\Omega'_\epsilon)$. Entonces, tomando $\eta^* = \eta w \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\eta^* \in \mathcal{D}(\Omega')$, tenemos que

$$a(u - u_*, \eta^*(u - u_*)) \quad \leq 0.$$

Pero, en general,

$$a(v, \eta v) = \int_{\Omega'_\epsilon} \eta \nabla v \cdot \mathbf{A} \nabla v + \left\{ (\alpha - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 \rho)\eta - div(\mathbf{A}\nabla\eta) + (\mathbf{b} + \mathbf{b}_0) \cdot \nabla\eta \right\} v^2.$$

Por tanto, si tomamos η^* tal que

$$(\alpha - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho)\eta^* - div(\mathbf{A}\nabla\eta^*) + (\mathbf{b} + \mathbf{b}_0)\nabla\eta^* \geq 0$$
$$\eta^* = 1 \quad \text{en} \quad \Omega' \quad \text{y} \quad 0 \leq \eta^* \leq 1,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \quad &\geq \quad a(u - u_*, \eta^*(u - u_*)) \\ &\geq \quad \int_{\Omega'} cd\nabla(u - u_*)\mathbf{A}\nabla(u - u_*) + (\alpha - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho)(u - u_*)^2 \\ &\geq \quad \min\{cd, \alpha - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho\}|u - u_*|^2_{H^1(\Omega')}, \end{aligned}$$

y de la coercitividad de a deducimos que $u = u_*$ en Ω', y por supuesto $u \in H^2(\Omega')$.

Antes de estudiar la localización de la frontera libre es conveniente obtener una estimación, en $L^\infty(\Omega)$, de la solución

Proposición 2 *Supongamos las condiciones del Teorema 1. Sea u la solución débil de $\mathcal{P}$, supongamos, además, que $w_0 G \in L^\infty(\Omega)$ con*

$$w_0(x,y) = (1+x^2)^{-\frac{m_1-1}{2}}(1+y^2)^{-\frac{m_2-1}{2}}. \tag{13}$$

Entonces se tiene que

$$0 \le w_0 u \le \frac{1}{\alpha - \alpha_1} \left\| G^+ w_0 \right\|_{L^\infty(\Omega)} \quad en \ \ \Omega,$$

donde

$$\alpha_1 = 2\alpha_0 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho - \mu_1 - \mu_2.$$

Demostración. Sean $k = \dfrac{1}{\alpha - \alpha_1} \|G^+ w_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ y $v_0 = u - (u - kw_0^{-1})^+$. Entonces $v_0 \in H_w^1(\Omega, \mathbf{A})$,

$$a(u, (u - kw_0^{-1})^+) \le \int_\Omega wG(u - kw_0^{-1})^+$$

y

$$\begin{aligned} a(u - kw_0^{-1}, (u - kw_0^{-1})^+) &\le -k\langle -\mathcal{L}(w_0^{-1}) + \mathbf{b}_0 w_0^{-1} + \alpha w_0^{-1}, w(u - kw_0^{-1})^+ \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \int_\Omega wG(u - kw_0^{-1})^+ \\ &\le \int_\Omega w\left(G - kw_0^{-1}M\right)\right)(u - kw_0^{-1})^+, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} M(x,y) &= \alpha - (m_1 - 1)\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)\left(\mu_1 - \sigma_1^2 \frac{1}{1+x^2} + m_1\sigma_1^2 \frac{x^2}{1+x^2}\right) \\ &\quad -(m_2 - 1)\left(\frac{y^2}{1+y^2}\right)\left(\mu_2 - \sigma_2^2 \frac{1}{1+y^2} + m_2\sigma_2^2 \frac{y^2}{1+y^2}\right) \\ &\quad -2\sigma_1\sigma_2\rho(m_1 - 1)(m_2 - 1)\frac{x^2y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}. \end{aligned}$$

Por tanto, si $(x,y) \in \Omega$ se tiene que $M(x,y) \le \alpha - \alpha_1$, y como $\alpha - \alpha_1 > 0$ obtenemos que

$$\begin{aligned} a(u - kw_0^{-1}, (u - kw_0^{-1})^+) &\le \int_\Omega w\left(G - (\alpha - \alpha_1)kw_0^{-1}\right)\right)(u - kw_0^{-1})^+ \\ &\le \int_\Omega w\left(G - \left\|G^+ w_0\right\|_{L^\infty} w_0^{-1}\right)\right)(u - kw_0^{-1})^+ \\ &\le 0. \end{aligned}$$

De la coercitividad de a (como consecuencia de la coercitividad de $\widehat{a}$), concluimos que $(u - kw_0^{-1})^+ \equiv 0$ en Ω, lo que lleva a la conclusión.

Localización de la frontera libre

En esta sección analizaremos el *dominio de coincidencia* definido como el dominio de los puntos $(x,y) \in \Omega$ donde la solución coincide con el obstáculo. En el caso de la "nueva" formulación $u = v - h$ el obstáculo se reduce a la función cero y entonces el dominio de coincidencia es el dominio de puntos donde u se anula. Como no es posible se conocer explícitamente este dominio (véase, p.e., [?]) nuestro objetivo es dar una estimación de la localización de tal dominio. Dada una función general $\Psi : \Omega \to I\!R^+$ definimos los dominios nulo y positivo asociados a Ψ como sigue:

$$N(\Psi) \doteq \{(x,y) \in \bar{\Omega} : \quad \Psi(x,y) = 0\}$$

$$S^+(\Psi) \doteq \overline{\{(x,y) \in \Omega : \quad \Psi(x,y) > 0\}}.$$

Nótese que $\Omega = N(u) \cup S^+(u)$ pero no sabemos, *a priori*, si el dominio de coincidencia $N(u)$ es vacío o no. Obviamente este dependerá del dato $G(x,y)$. Nuestro siguiente resultado afirma que este dominio no es vacío si $G(x,y)$ es "suficientemente negativa" en algún subdominio de Ω "suficientemente grande". Además, en ese caso obtendremos una estimación en la localización de $N(u)$.

Nuestro método de demostración está inspirado en el *método de supersoluciones locales* introducido en Díaz [?]. Una de las principales dificultades a la hora de aplicar tal método a nuestro problema viene del hecho de que los coeficientes del operador $\mathcal{L}(u)$ dependen fuertemente de los puntos $(x,y) \in \Omega$. Por este motivo introducimos la distancia $\widetilde{d}$ sobre los puntos de Ω dada por

$$\widetilde{d}((x_0,y_0),(x,y)) = \sqrt{(\log(\frac{x}{x_0}))^2 + (\log(\frac{y}{y_0}))^2}.$$

Motivados por la estructura especial de los coeficientes del operador $\mathcal{L}(u)$ introduzcamos la función auxiliar

$$\epsilon(x,y) = 4k(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2|\rho|)e^2(m_1 + m_2 - 2)^2/w_0(x,y)$$

donde $w_0(x,y)$ viene dada por (??)

Teorema 3 *Sea u la solución del problema $(\mathcal{P})$ y supongamos que el dominio*

$$S^+(-G-\epsilon) \doteq \overline{\{(x,y) \in \Omega : G(x,y) \leq -\epsilon(x,y)\}}$$

no es vacío. Entonces

$$N(u) \supset \left\{(x,y) \in S^+(-G-\epsilon) \quad \textit{tal que} \quad \widetilde{d}\left((x,y), \partial\Omega \cup \partial S^+(G+\epsilon)\right) \geq \frac{1}{m_1+m_2-2}\right\}.$$

Demostración. Consideremos el dominio

$$\Omega_1 \doteq \left\{(x,y) \in \Omega \quad : \quad G \leq -\epsilon(x,y), \quad \widetilde{d}\left((x,y), \partial\Omega \cup \partial S^+(G+\epsilon)\right) \geq \frac{1}{m_1+m_2-2}\right\}$$

y sea $(x_0, y_0) \in \Omega_1$. Definamos

$$\widetilde{B}_R(x_0, y_0) \doteq \left\{ (x,y) \in \Omega : \left(\log(\frac{x}{x_0}) \right)^2 + \left(\log(\frac{y}{y_0}) \right)^2 < R^2 \right\}.$$

Obtendremos nuestra conclusión construyendo una supersolución local $\bar{u}(x, y : x_0, y_0)$ definida en $\widetilde{B}_R(x_0, y_0)$, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega_1$. Para ello supondremos que

$$\bar{u}(x, y : x_0, y_0) = \eta(r),$$

donde $\eta > 0, \eta' > 0$ y $\eta'' > 0 \quad \forall r > 0$, que será determinada *a posteriori* y donde $r = \widetilde{d}((x, y); (x_0, y_0))$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\eta \;=\; & \left\{ \sigma_1^2 \frac{(\log(x) - \log(x_0))^2}{r^2} + \sigma_2^2 \frac{(\log(y) - \log(y_0))^2}{r^2} \right. \\ & \left. + \; 2\sigma_1\sigma_2\rho \frac{(\log(x) - \log(x_0))(\log(y) - \log(y_0))}{r^2} \right\} \eta'' \\ & + \left\{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1^2 \frac{(\log(x) - \log(x_0))^2}{r^2} - \sigma_2^2 \frac{(\log(y) - \log(y_0))^2}{r^2} \right. \\ & -2\sigma_1\sigma_2\rho \frac{(\log(x) - \log(x_0))(\log(y) - \log(y_0))}{r^2} \\ & \left. -(\log(x) - \log(x_0))(\sigma_1 + \mu_1) - (\log(y) - \log(y_0))(\sigma_2 - \mu_2) \right\} \frac{\eta'}{r}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\mathcal{L}\eta \leq \Lambda \left(\eta'' + \frac{\eta'}{r} \right)$$

donde $\Lambda = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2|\rho|$. Por otra parte, es fácil de comprobar que dado $\epsilon_0 > 0$, la solución del problema

$$\begin{cases} -\Lambda \left(\eta'' - \frac{\eta'}{r} \right) + \mathcal{B}(\eta) \ni -\epsilon_0 & \text{en} \quad (0, R), \\ \eta(0) = \eta'(0) = 0, \end{cases}$$

viene dada por

$$\eta(r) = \frac{\epsilon_0}{4\Lambda} r^2.$$

Las condiciónes

$$\epsilon_0 \leq -G \quad \text{en} \quad B_R(x_0, y_0) \quad \text{y} \quad \eta(R) \geq u|_{\partial B_R(x_0,y_0)},$$

o, equivalentemente,

$$\eta(R) = \frac{\epsilon_0}{4\Lambda} R^2 \geq \sup_{\partial B_R} K w^{-l}(x, y) \quad \text{y} \quad \epsilon_0 = \inf_{B_R(x_0,y_0)} \{\epsilon(x, y)\},$$

implican que η es una supersolución de $(\mathcal{P})$. Estas condiciones se cumplen si (x_0, y_0) está en el conjunto Ω_1. Por tanto η es una supersolución de $(\mathcal{P})$ en $\widetilde{B}_R(x_0, y_0)$. Finalmente, la elección de $\epsilon(x, y)$ y de $R = 1/(m_1+m_2-2)$ obligan a que $u(x, y) = 0$, para $(x, y) \in \Omega_1$.

Referencias

[1] Bensoussan, A., Lions, J.L.: *Application des inégalités variationnelles en control stochastique*, Dunod, Paris, 1978.

[2] Bensoussan, A., *Stochastic control by functional analysis methods*, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[3] Bensoussan, A., Lions, J.L., On the support of the solution of some variational inequalities of evolution, *J. Math.Soc.Japan*, **28**, No 1, 1976, pp 1-17.

[4] Bermudez, A., Moreno, C., Sanmartin, A., Resolución numérica de un problema de valor óptimo de una opción, En *Actas de la Jornada Científica en homenaje a A. Valle*, T. Caraballo et al. eds., Publicaciones de la Universidad de Sevilla, 1997, pp 201-2014.

[5] Brezis, H., Problèmes Unilateraux, *J. Math. Pures et Appl.*, **51**, 1972, pp. 1-168.

[6] Brezis, H., *Analyse fonctionelle*, Masson, Paris, 1983.

[7] Dasgupa, P.P., Hammond, M. and Meskin, E., On Imperfect Information and Optimal Pollution Control, *Review of Economic Studies*, 1980, pp 857-860.

[8] J.I.Diaz, *Nonlinear partial differential equations and free boundaries*, Pitman, London, 1985.

[9] Diaz, J.I., Faghloumi, C., Analysis of a degenerate obstacle problem on an unbounded set arising in the environment, To appear

[10] Dixit A.K., Pindyck R.S. *Investment under uncertainty*, Princeton, New Jersey, 1994.

[11] Kwerel, E., To Tell the Truth: Imperfect Information and Optimal Pollution Control, *Review of Economic Studies*, 1977, pp 585-601.

[12] Pindyck, R.S., Irreversible Investments, Capacity Choice and the Value of the Firm, *Amercan Economic Review*, **78**, 1986, pp. 707-728.

[13] Scheinkman, J.A., Public goods and the Environment. En *Environment Economics and their Mathematical Models*, J.I. Diaz and J.L.Lions eds., Masson, Paris, 1994, pp 149-158.

[14] Scheinkman, J.A., Zariphopoulou, Th., Optimal Environmental Management in the Presence of Irreversibilities, To appear.

1 Departamento de Matemática Aplicada. Facultad de matemáticas. Universidad Complutense de Madrid. 28040-Madrid (JI_Díaz@Mat.UCM.Es).

2 Departamento de Matemática Aplicada. Facultad de matemáticas. Universidad Complutense de Madrid. 28040-Madrid (Chakib_Faghloumi@Mat.UCM.Es).