Propiedades Cualitativas del Flujo Variación Total

F. Andreu[1] V. Caselles[2] J.I. Diaz[3] J.M. Mazón[1]

Resumen

Probamos la existencia de un tiempo de extinción finito para las soluciones del problema de Dirichlet para el Flujo Variación Total. Para el problema de Neumann vemos que las soluciones alcanzan la media del dato inicial en tiempo finito. También estudiamos el perfil asintótico de las soluciones, demostrando que son soluciones no nulas de un problema de tipo autovalores. En el caso radial estudiamos la propagación del soporte y demostramos que el comportamiento es totalmente diferente al caso del problema asociado al operador p-Laplaciano. Finalmente, el estudio del caso radialmente simétrico nos permite mostrar otras propiedades cualitativas que son peculiares de este tipo especial de ecuaciones cuasi-lineales.

Introducción y preliminares

Sea Ω un abierto acotado de $I\!R^N$ con frontera Lipschitz continua $\partial\Omega$. Estamos interesados en el comportamiento asintótico de las soluciones del problema de Dirichlet

$$P_D \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = div\Big(\dfrac{Du}{|Du|}\Big) & \text{en} \quad Q = (0,\infty)\times\Omega \\[2ex] u(t,x) = 0 & \text{sobre} \quad S = (0,\infty)\times\partial\Omega \\[2ex] u(0,x) = u_0(x) & x\in\Omega \end{cases}$$

y del problema de Neumann

$$P_N \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = div\Big(\dfrac{Du}{\|Du\|}\Big) & \text{en} \quad Q = (0,\infty)\times\Omega \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre} \quad S = (0,\infty)\times\partial\Omega \\[2ex] u(0,x) = u_0(x) & x\in\Omega \end{cases}$$

para el Flujo Variación Total. Motivados por problemas en Procesamiento de Imágenes ([8]), existencia y unicidad de soluciones para los problemas (P_D) y (P_N) han sido obtenidas en [2] y [1], respectivamente.

Debido al crecimiento lineal del funcional de energía asociado a los problemas (P_D) y (P_N), el espacio de energía natural para dichos problemas es el de las funciones de variación acotada. Recordemos que una función $u \in L^1(\Omega)$ cuyas derivadas parciales en el sentido de las distribuciones son medidas con variación total finita en Ω se denomina una *función de variación acotada*. La clase de tales funciones se denota por $BV(\Omega)$. Consecuentemente, el gradiente de una función $u \in BV(\Omega)$ es una medida vectorial con variación total finita dada por

$$|Du|(\Omega) = \sup\{\int_\Omega u \, div\, \varphi \, dx : \varphi \in C_0^\infty(\Omega, I\!R^n), |\varphi(x)| \leq 1 \text{ para } x \in \Omega\}.$$

Necesitamos algunos resultados dados en [5]: Sea

$$X(\Omega) = \{z \in L^\infty(\Omega, I\!R^N) : div(z) \in L^1(\Omega)\}.$$

Si $z \in X(\Omega)$ y $w \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, el funcional $(z, Dw) : C_0^\infty(\Omega) \to I\!R$ definido por

$$< (z, Dw), \varphi >= -\int_\Omega w \, \varphi \, div(z) \, dx - \int_\Omega w \, z \cdot \nabla\varphi \, dx$$

es una medida de Radon en Ω que cumple:

$$\int_\Omega (z, Dw) = \int_\Omega z \cdot \nabla w \, dx$$

para cada $w \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Además, (z, Dw) es absolutamente continua con respecto a la medida $|Dw|$.

Para cada $z \in X(\Omega)$ se define una traza débil $[z, \nu]$ de la componente normal de z sobre $\partial\Omega$ de z, y se obtiene la siguiente *fórmula de Green*

$$\int_\Omega w \; div(z) \; dx + \int_\Omega (z, Dw) = \int_{\partial\Omega} [z, \nu] w \; dH^{N-1} \tag{1}$$

para cada $w \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Aunque los resultados sobre existencia y unicidad para los problemas (P_D) y (P_N) obtenidos en [2] y [1] son para datos en $L^1(\Omega)$, debido a que las propiedades tratadas aquí son para datos en $L^\infty(\Omega)$, es suficiente considerar los problemas (P_D) y (P_N) para datos en $L^2(\Omega)$. Para dar nuestro concepto de solución, denotamos por $L^1_w(0, T, BV(\Omega))$ el espacio de las funciones $w : [0, T] \to BV(\Omega)$ tales que $w \in L^1((0, T) \times \Omega)$, la aplicaciones $t \in [0, T] \to < Dw(t), \phi >$ son medibles para cada $\phi \in C_0^1(\Omega, I\!R^N)$ y tal que $\int_0^T \|Dw(t)\| < \infty$.

Definición 0.1 Sea $u_0 \in L^2(\Omega)$. Una función medible $u : (0, T) \times \Omega \to I\!R$ es una *solución débil* de (P_D) (respectivamente, P_N) en $(0, T) \times \Omega$ si $u \in C([0, T], L^2(\Omega)) \cap W^{1,2}_{loc}(0, T; L^2(\Omega))$, $u \in L^1_w(0, T; BV(\Omega))$, y existe $z \in L^\infty((0, T) \times \Omega)$ con $\|z\|_\infty \leq 1$, $u_t = div(z)$ en $\mathcal{D}'((0, T) \times \Omega)$ tal que para casi todo $t \in [0, T]$

$$\int_\Omega (u(t) - w) u_t(t) = \int_\Omega (z(t), Dw) - \|Du(t)\| - \int_{\partial\Omega} [z(t), \nu] w - \int_{\partial\Omega} |u(t)| \tag{2}$$

(respectivamente,

$$\int_\Omega (u(t) - w) u_t(t) = \int_\Omega (z(t), Dw) - \|Du(t)\| \tag{3}$$

en el caso del problema de Neumann) para cada $w \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Los resultados de existencia y unicidad son los siguientes.

Teorema 0.2 *([2]) Sea $u_0 \in L^2(\Omega)$. Entonces, para cada $T > 0$ existe una única solución débil de (P_D) en $(0,T)\times\Omega$ tal que $u(0) = u_0$. La solución $u(t)$ de (P_D) está también caracterizada como: $u \in C([0,T], L^2(\Omega)) \cap W^{1,2}_{loc}(0,T; L^2(\Omega))$, $u \in L^1_w(0,T; BV(\Omega))$ y existe $z(t) \in X(\Omega)$, tal que $\|z(t)\|_\infty \leq 1$, $u'(t) = div(z(t))$ para casi todo $t \in [0, +\infty[$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ y*

$$\int_\Omega (z(t), Du(t)) = \|Du(t)\| \tag{4}$$

$$[z(t), \nu] \in sign(-u(t)) \qquad H^{N-1} - c.p.p. \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \tag{5}$$

Además, se tiene el siguiente principio de comparación: si $u(t), \hat{u}(t)$ son soluciones correspondientes a los datos iniciales $u_0, \hat{u}_0$, respectivamente, entonces

$$\|(u(t) - \hat{u}(t))^+\|_1 \leq \|(u_0 - \hat{u}_0)^+\|_1 \quad \text{y} \quad \|u(t) - \hat{u}(t)\|_1 \leq \|u_0 - \hat{u}_0\|_1, \tag{6}$$

para todo $t \geq 0$.

Teorema 0.3 *([1]) Sea $u_0 \in L^1(\Omega)$. Entonces para cada $T > 0$ existe una única solución débil del problema (P_N) en $(0,T) \times \Omega$ tal que $u(0) = u_0$. Además, si $u(t), \hat{u}(t)$ son dos soluciones débiles correspondientes a los datos iniciales $u_0, \hat{u}_0$, respectivamente, entonces*

$$\|(u(t) - \hat{u}(t))^+\|_1 \leq \|(u_0 - \hat{u}_0)^+\|_1 \quad \text{y} \quad \|u(t) - \hat{u}(t)\|_1 \leq \|u_0 - \hat{u}_0\|_1, \tag{7}$$

para todo $t \geq 0$.

El problema de Dirichlet

El principal resultado de esta sección es el siguiente.

Teorema 0.4 *Sea $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ y $u(t,x)$ la única solución del problema (P_D). Sea $d(\Omega)$ el radio de la menor bola que contiene a Ω. Si $T^*(u_0) = \inf\{t > 0 : \ u(t) = 0\}$, entonces*

$$T^*(u_0) \leq \frac{d(\Omega)\|u_0\|_\infty}{N}. \tag{8}$$

Sea

$$w(t,x) := \begin{cases} \dfrac{u(t,x)}{T^*(u_0) - t} & \text{si } \ 0 \leq t < T^*(u_0) \\ \\ 0 & \text{si } \ t \geq T^*(u_0). \end{cases}$$

Entonces, existe una sucesión creciente $t_n \to T^*(u_0)$ y una solución $v^* \neq 0$ del problema estacionario

$$S_D \begin{cases} -div\left(\dfrac{Dv}{\|Dv\|}\right) = v & en \quad \Omega \\ \\ v = 0 & sobre \quad \partial\Omega \end{cases}$$

tal que

$$\lim_{n\to\infty} w(t_n) = v^* \quad \text{en} \quad L^p(\Omega)$$

para todo $1 \leq p < \infty$. Además v^* es un mínimo de $\Phi(\cdot) - < \cdot, v^* >$ en $BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

Para probar el resultado anterior establecemos el siguiente principio de comparación entre soluciones y subsoluciones/supersoluciones de (P_D) que no dependen de la variable espacial.

Teorema 0.5 *Sea $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ y $u_1(t,x)$ la única solución del problema (P_D). Sea $d(\Omega)$ el radio de la menor bola que contiene a Ω. Sea $u_2(t,x) = \alpha(t)$, satisfaciendo*

$$|\alpha'(t)| \leq \frac{N}{d(\Omega)}. \tag{9}$$

Entonces,
(i) si $\alpha(t) \geq 0$ y $u_0 \leq \alpha(0)$, se tiene que

$$u_1(t) \leq u_2(t) \quad \text{c.p.p. en } \Omega;$$

(ii) si $\alpha(t) \leq 0$ y $u_0 \geq \alpha(0)$, se tiene que

$$u_1(t) \geq u_2(t) \quad \text{c.p.p. en } \Omega.$$

Como una consecuencia inmediata del resultado anterior obtenemos la existencia del tiempo de extinción finito. Más concretamente, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 0.6 *Sea $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ y $u(t,x)$ la única solución del problema (P_D). Entonces, se tiene que*

$$\|u(t)\|_\infty \leq \frac{N}{d(\Omega)}\left(\frac{d(\Omega)\|u_0\|_\infty}{N} - t\right)^+. \tag{10}$$

Por tanto, si $T^*(u_0) = \inf\{t > 0 : \; u(t) = 0\}$, entonces

$$T^*(u_0) \leq \frac{d(\Omega)\|u_0\|_\infty}{N}. \tag{11}$$

Podemos computar explícitamente la evolución de la función característica de una bola.

Lema 0.7 *Asumamos que $B(0,r) \subset\subset \Omega$ y sea $u_0 = k\chi_{B(0,r)}$. Entonces la única solución $u(t,x)$ del problema (P_D) viene dada por*

$$u(t,x) = \operatorname{sign}(k)\frac{N}{r}\left(\frac{|k|r}{N} - t\right)^+ \chi_{B(0,r)}(x).$$

Corolario 0.8 *Sea $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ y $u(t)$ la solución del problema (P_D) con dato inicial u_0. Entonces se tiene que*

$$\|u(t)\|_\infty \geq \frac{N}{d(\Omega)}(T^*(u_0) - t) \qquad \text{para } \; 0 \leq t \leq T^*(u_0). \tag{12}$$

Además, si $\operatorname{sop}(u_0) \subset B(0,r) \subset\subset \Omega$, entonces $\operatorname{sop}(u(t)) \subset B(0,r)$ y

$$T^*(u_0) \leq \frac{\|u_0\|_\infty r}{N}.$$

Nota 0.9 Consideremos el problema de Dirichlet para el p-Laplacian:

$$P_D^p \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = div\Big(\|Du\|^{p-2} Du \Big) & \text{en} \quad Q = (0,\infty) \times \Omega \\ u(t,x) = 0 & \text{sobre} \quad S = (0,\infty) \times \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases}$$

con $1 < p < \infty$. Es bien conocido (ver [6], [7]) que si $p > 2$ entonces existe *velocidad de propagación finita* (i.e., si $\text{sop}(u_0) \subset B(0,r) \subset\subset \Omega$, entonces $\text{sop}(u(t))$ es un compacto al menos para t pequeño), pero, si $1 < p \leq 2$ y $u_0 \geq 0$, $u_0 \neq 0$, entonces $\text{sop}(u(t)) = \Omega$ para todo $t > 0$ ([7]). Observar que (P_D) puede ser considerado como el caso límite $p = 1$ del problema (P_D^p) y el anterior resultado muestra que no hay propagación del soporte del dato inicial.

Para estudiar el comportamiento de la solución $u(t)$ cerca del tiempo finito de extinción necesitamos establecer cotas inferiores y superiores de la tasa de decaimiento de $\|u(t)\|_N$ and $\|u(t)\|_\infty$, respectivamente.

Lema 0.10 *Sea $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ y $u(t,x)$ la única solución del problema (P_D). Entonces se tiene:*

(i) Existe una constante C independiente del dato inicial, tal que

$$\|u(t)\|_N \geq C(T^*(u_0) - t) \qquad \text{para} \;\; 0 \leq t \leq T^*(u_0). \tag{13}$$

(ii) dado $0 < \tau < T^*(u_0)$, tenemos que

$$\|u(t)\|_\infty \leq \frac{2\|u_0\|_\infty}{\tau}(T^*(u_0) - t) \qquad \text{para} \;\; \tau \leq t \leq T^*(u_0). \tag{14}$$

Para obtener el resultado anterior es fundamental el siguiente resultado consecuencia de la homogeneidad del operador asociado al problema.

Lema 0.11 *Sea $u(t)$ la solución del problema de Dirichlet con dato inicial $u_0 \in L^2(\Omega)$ (P_D). Entonces*

$$|u'(t)| \leq \frac{2}{t}|u_0| \qquad \text{para casi todo} \;\; t > 0. \tag{15}$$

Soluciones de S_D en el caso radial

En el Teorema 0.4 hemos demostrado que el perfil asintótico de las soluciones del problema (P_D) son soluciones del problema (S_D). En esta sección estudiamos las soluciones del problema (S_D) en el caso radial.

Teorema 0.12 *Sea $\Omega = B(0,R)$, $R > 0$ y $u_0 \geq 0$ una función radial en $B(0,R)$. Si v^* es el perfil asintótico de la solución de (P_D) con dato inicial u_0, entonces existe una función decreciente g satisfaciendo $g(r) = \frac{1}{r}$ o $g'(r) = 0$, c.p.p. en $r \in (0,R)$, tal que $v^*(x) = g(\|x\|)$.*

Para finalizar esta sección vamos a dar soluciones explícitas del problema (S_D) en el caso radial.

Proposición 0.13 *Las siguientes funciones son soluciones del problema* (S_D) *en* $B(0,R)$*:*

$$u_1(x) = \frac{N-1}{\|x\|},$$

$$u_2(x) = \frac{Per(B(p,r))}{|B(p,r)|}\chi_{B(p,r)}(x), \quad \textit{donde} \quad B(p,r) \subseteq B(0,R),$$

y

$$u_3(x) = \begin{cases} \dfrac{N}{r} & si \quad x \in B(0,r) \subseteq B(0,R) \\[2ex] \dfrac{N-1}{\|x\|} & si \quad x \in B(0,R) \setminus B(0,r). \end{cases}$$

Proposición 0.14 *Sean* $R_1 < R_2 \leq R$, $B_1 = B(0,R_1)$, $B_2 = B(0,R_2)$. *Entonces*

$$u(x) = \frac{Per(B_1)}{|B_1|}\chi_{B_1}(x) + \frac{Per(B_2) - Per(B_1)}{|B_2| - |B_1|}\chi_{B_2 \setminus B_1}(x)$$

es una solución de (S_D) *en* $B(0,R)$.

El problema de Neumann

En [1], se demuestra que las soluciones débiles del problema (P_N) se estabilizan cuando $t \to \infty$ convergiendo en la L^1-norma a la media del dato inicial. Aquí probamos, por métodos de energía, como en [4], que en el caso bidimensional, este estado asintótico se alcanza en tiempo finito.

Teorema 0.15 *Supongamos que* $N = 2$. *Sea* $u_0 \in L^2(\Omega)$ *y* $u(t,x)$ *la solución débil del problema* (P_N). *Entonces existe un tiempo finito* T_0 *tal que*

$$u(t) = \overline{u_0} := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x)\, dx \qquad \forall\, t \geq T_0.$$

Por el Teorema 0.15, dada $u_0 \in L^2(\Omega)$, si $u(t,x)$ es la única solución del problema(P_N), entonces

$$T^*(u_0) := \inf\{t > 0 \ : \ u(t) = \overline{u_0}\} < \infty.$$

Para estudiar el comportamiento de $u(t)$ cerca de $T^*(u_0)$, como en el caso del problema de Dirichlet obtenemos primeramente cotas inferiores y superiores para la tasas de decaimiento de $\|u(t) - \overline{u_0}\|_2$, y como consecuencia de ellas obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 0.16 *Supongamos que $N = 2$. Sea $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ y $u(t,x)$ la única solución débil del problema (P_N). Sea*

$$w(t,x) := \begin{cases} \dfrac{u(t,x) - \overline{u_0}}{T^*(u_0) - t} & \text{si } 0 \leq t < T^*(u_0) \\ 0 & \text{si } t \geq T^*(u_0). \end{cases}$$

Entonces, existe una sucesión creciente $t_n \to T^*(u_0)$ y una solución $v^* \neq 0$ del problema estacionario

$$S_N \begin{cases} -div\left(\dfrac{Dv}{\|Dv\|}\right) = v & en \quad \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & sobre \quad \partial\Omega \end{cases}$$

tal que

$$\lim_{n \to \infty} w(t_n) = v^* \quad \text{in} \quad L^p(\Omega),$$

para todo $1 \leq p < \infty$.

Para las demostraciones de los resultados de esta nota ver [3].

Agradecimientos

La investigación de F. Andreu y J. M. Mazón está parcialmenete subvencionada por el Proyecto PB98-1442 (DGICYT), la de V. Caselles por el TMR European Project FMRX-CT98-0234, y la de J.I. Diaz por el Proyecto REN2000-0766.

Referencias

[1] F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles and J.M. Mazón, "Minimizing Total Variation Flow", *Diff. and Int. Equt.* **14** (2001), 321-360.

[2] F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles and J.M. Mazón, "The Dirichlet Problem for the Total Variation Flow, *J. Funct. Anal.* **180** (2001), 347-403.

[3] F. Andreu, V. Caselles, J.I Diaz and J.M. Mazón, "Some Qualitative Properties for the Total Variation Flow, Preprint.

[4] S.N. Antonsev and J.I. Diaz, "New results on space and time localization of solutions of nonlinear elliptic or parabolic equations via energy methods", *Soviet math. Dokl.* **303** (1988), 524-528.

[5] G. Anzellotti, "Pairings Between Measures and Bounded Functions and Compensated Compactness", *Ann. di Matematica Pura ed Appl.* IV (135) (1983), 293-318.

[6] J.I. Diaz "Elliptic and Parabolic Quasilinear Equations Giving Rise to a Free Boundary: The Boundary of the Support of the Solutions", *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **45** (1986), 381-393.

[7] M. Herrero and J.L. Vazquez,"On the propagation properties of a nonlinear degenerate parabolic equation", *Comm. in Part. Diff. Equations* **7** (1982), 1381-1402.

[8] L. Rudin, S. Osher and E. Fatemi, "Nonlinear Total Variation based Noise Removal Algorithms", *Physica D.* **60** (1992), 259-268.

1 Departamento de Análisis Matemático. Universitat de Valencia. Dr Moliner 50, 46100 Burjassot (Valencia)

2 Departament de Tecnologia. Universitat Pompeu Fabra. Passeig de Circumval·lació 8, 08003 Barcelona.

3 Departamento de Matemática Aplicada. Universidad Complutense de Madrid. 28040 Madrid.