

*"LES MATEMÀTIQUES I LES SEUES
APLICACIONS, UN REPTE
A L'ENSENYAMENT ACTUAL"*

València 11,12,25 i 26 de Gener de 2002

Direcció General d'Ordenació i Innovació
Educativa i Política Lingüística de la Conselleria de
Cultura i Educació.

i

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

EDITORIAL U. P. V.

Ref.: 2001.2408

Modelos Matemáticos en Climatología: la Conjetura de von Neumann

por el Prof. Jesús Ildefonso Díaz

de la Universidad Complutense de Madrid.

1 Modelos climáticos de balance de energía

Antes de describir el tipo de modelos de los que nos ocuparemos conviene apelar a la importante diferencia entre Climatología y Meteorología en atención a la muy distinta escala temporal que los caracteriza. En el segundo caso la predicción se pretende con gran exactitud por lo que el período en consideración se suele limitar a días y, a lo sumo, un par de semanas. La predicción suele requerir métodos computacionales que contrastan con los de naturaleza más cualitativa utilizados en Climatología para el análisis y diagnóstico, sobre modelos simplificados, a grandes escalas temporales que van desde la década a las decenas de siglos.

No viene mal acudir a la definición que un experto de reconocido prestigio (Schneider [42]) propone sobre la noción de clima: Estado promediado de la atmósfera observado como tiempo meteorológico sobre un periodo finito de tiempo a lo largo de los años. En los estudios climáticos, la incógnita no es tanto la temperatura puntual e instantánea, $T(x, t)$, que viene determinada por los principios de la Termodinámica sino los promedios espaciales y temporales definidos a partir de tal temperatura

$$u(x, t) = \frac{1}{2\tau |B(x)|} \int_{t-\tau}^{t+\tau} \int_{B(x)} T(y, s) dy ds.$$

Una de las clases de modelos climáticos más elementales, pero de gran valor de diagnóstico, son los llamados de *balance de radiación de energía*.

Aunque los antecedentes se puedan remontar a un trabajo de S. Arrhenius de 1896, se podría decir que tal tipo de modelos fueron propuestos independiente pero simultáneamente, en 1969, por M.I. Budyko ([7] y W.D. Sellers ([43]).

Los modelos obedecen a un sencillo balance entre las distintas energías (la parte absorbida de la emitida por el Sol, R_a y la emitida por la Tierra como cuerpo caliente, R_e) y los términos que expresan la variación de energía calorífica en términos de la capacidad calorífica y de la derivada de la temperatura promediada y la redistribución espacial, D :

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = R_a - R_e + D.$$

Una deducción más cuidada puede ser llevada a cabo partiendo de la ecuación de conservación de la energía interna y aplicando los operadores de promedio involucrados en la definición de $u(x,t)$ (véase, p.e. Kiehl [30]).

En todo caso, es obvio que se requiere más información para poder "cerrar" el modelo de manera que quede expresado únicamente en términos de la temperatura promediada $u(x,t)$. Esa información adicional puede ser entendida como adecuadas *leyes de estado* que describiremos a continuación. La fracción de radiación absorbida se expresa como $R_a(u) = Q\beta(u)$ donde $\beta(u)$ es el coalbedo planetario y Q es la constante solar cuyo valor actual es de $Q=342.5W/m^2$. La función coalbedo toma valores comprendidos entre 0 y 1, y representa la fracción de energía recibida que es absorbida por la superficie: en otras palabras, el cociente entre la energía absorbida y la energía incidente. En zonas cubiertas de hielo refleja más la luz solar que, por ejemplo, en los océanos y, por tanto, el coalbedo es mayor en estas últimas. Se observa que existen zonas muy próximas con coalbedos muy diferentes. En los modelos de balance de energía se considera una variación rápida del coalbedo en un entorno de una temperatura crítica que usualmente se toma como $u = -10^\circ C$ y que corresponde a la temperatura en la que el hielo pasa de ser transparente a blanco. En el modelo propuesto por Budyko, $\beta(u)$ es discontinua.

$$\beta(u) = \begin{cases} \beta_i & u < -10, \\ [\beta_i, \beta_w] & u = -10, \\ \beta_w & u > -10. \end{cases} \quad (1)$$

En el modelo propuesto por Sellers, se supone que $\beta(u)$ es una función más regular (Lipschitziana, al menos) como por ejemplo

$$\beta(u) = \begin{cases} \beta_i & u < u_i, \\ \beta_i + \left(\frac{u - u_i}{u_w - u_i}\right)(\beta_w - \beta_i) & u_i \leq u \leq u_w, \\ \beta_w & u > u_w, \end{cases} \quad (2)$$

con u_i y u_w temperaturas fijadas y cercanas a $-10^\circ C$.

El otro ingrediente en el balance es la radiación que por enfriamiento emite la Tierra. Esta energía emitida, $R_e(u)$, es representada de dos modos distintos según los autores antes mencionados. En el modelo de Sellers $R_e(u)$ se expresa escribiendo u en grados Kelvin (por tanto $u > 0$) y utilizando la ley de Stefan-Boltzman

$$R_e(u) = \sigma(u)u^4 \quad (3)$$

donde σ es una función regular, positiva y acotada que representa la *emisividad*. En el modelo de Budyko se argumenta que dado que las variaciones observadas son pequeñas basta considerar una linealización de esa ley en torno a la temperatura media terrestre del momento (aproximadamente $15^\circ C$) por lo que se toma una expresión lineal con coeficientes obtenidos mediante observación por satélite

$$R_e(u) = Bu + C \quad (4)$$

con B y C parámetros positivos (en la actualidad $A = 210W/m^2$, $C = 1.9W/m^2$ y que incluyen fenómenos empíricos tales como el efecto invernalero, cambios antropogénicos, etc. Son las llamadas *variables internas*).

Pero pasemos al primer escalón de modelos distribuidos de balance de energía. La necesidad de tomar modelos más sofisticados que el cero dimensional es obvia pues todos sabemos que en ciertas zonas del planeta la vida es más agradable que en otras debido a la diferencia de climas. Una primera precisión a lo anteriormente expuesto consiste pues en suponer ahora que

$$R_a = R_a(x, u) = QS(x)\beta(u)$$

con $S(x)$ la llamada *función de insolación anual* que es una función regular y con valores positivos (cuando se toman escalas temporales menores se ha de suponer $S = S(x,t)$ tomado valores nulos durante los periodos de "noche polar". Ésa es la función que M. Milankovitch calculó minuciosamente, en 1920, para tiempos pasados por medio de la Mecánica Celeste y que le permitió ofrecer una justificación de las glaciaciones pasadas. Por otra parte, en lo concerniente a la energía de emisión, es natural suponer que

$$R_c = R_c(x, u)$$

con $R_c(x, u)$ dada como antes salvo que ahora $\sigma = \sigma(x, u)$, y $B = B(x)$, $C = C(x)$.

Un primer modelo en esta dirección se obtiene al considerar la temperatura superficial promediada en el tiempo anual o estacionalmente y en el espacio sobre paralelos de anchura infinitesimal. La razón de considerar tales promedios espaciales se debe a que las observaciones disponibles muestran que la convección meridional es considerablemente pequeña frente a la longitudinal. La consideración de la dependencia espacial de la temperatura introduce en el balance un nuevo término, la redistribución de calor, que viene dada mediante un operador de difusión de segundo orden. Como es acostumbrado en Mecánica Celeste, se suele introducir una nueva variable $x \in (-1, 1)$ dada por $x = \sin \lambda$ con λ la latitud. Incorporando al anterior balance un término de difusión, la evolución de la temperatura superficial $u(x, t)$ aparece gobernada por la siguiente ecuación parabólica semilineal.

$$c(x)u_t - (k(1-x^2)u_x)_x = R_a(x, u) - R_c(x, u), \quad x \in (-1, 1), t > 0. \quad (5)$$

donde $c(x)$ es la capacidad calorífica y k el coeficiente de difusión (que a veces se supone dependiente de la posición x , de u o de la variación de la temperatura u_x), tomando c y k valores positivos (véase, por ejemplo, North [40])

Nótese que la ecuación (5) es *degenerada* pues el coeficiente del gradiente u_x se anula en los extremos (e. d. en los polos). De hecho, otro tipo de degeneración puede aparecer en ciertas variantes de estos modelos. Así, P.H. Stone [45] propuso un coeficiente de difusión de la forma $k = k(x, u, \nabla u)$, en particular $k = b(x)|\nabla u|$, con el fin de incluir los efectos negativos producidos por las corrientes atmosféricas de gran escala. En este caso, la ecuación semilineal (así llamada pues el término no lineal no afecta a las derivadas de la incógnita) (5) pasa a ser una ecuación cuasilineal (en la que ahora el término no lineal involucra a las derivadas espaciales de la incógnita)

$$c(x)u_t - ((1-x^2)^{\frac{p}{2}}|u_x|^{p-2}u_x)_x = R_a(x, u) - R_c(x, u), \quad (6)$$

con $p = 3$ (el caso genérico $1 < p < \infty$ tiene la virtud de incluir también en su seno a la ecuación semilineal cuando se toma $p = 2$).

Pasemos ahora caso bidimensional. Existen interesantes variantes y generalizaciones de los modelos unidimensionales (5) y (6). Por ejemplo, el estudio de la distribución de la temperatura superficial promediada como función del tiempo, de la latitud y también de la longitud da lugar a una ecuación no lineal en derivadas parciales de tipo parabólico

$$c(x)u_t - \operatorname{div}(k\nabla u) = R_a - R_c \quad (7)$$

que ahora tiene lugar sobre una superficie que representa a la superficie terrestre. En una primera aproximación se puede identificar esta superficie con la de la esfera unidad (tomando como unidad el radio de la Tierra) y que se suele denotar como la superficie \mathbb{S}^2 de \mathbb{R}^3 . En ese caso, usando coordenadas esféricas, $x = (\cos \varphi \sin \lambda, \cos \varphi \cos \lambda, \sin \lambda)$ se tiene la identificación con los puntos de un rectángulo del plano introducida en 1568 y comúnmente denominada como proyección de G. Mercator (1512-1594).

Cuando, por ejemplo, $k = 1$, aparece el llamado *operador de Laplace-Beltrami* que admite una expresión directa en términos de las derivadas parciales de u con respecto a λ y a φ . De hecho, si se supone que $u(\lambda, \varphi, t) = u(\lambda, t)$, es decir u es independiente de φ entonces encontramos el operador en derivadas parciales de (5). En esta formulación se hace evidente que no se ha de añadir condición de contorno ninguna. Sin embargo, la anterior modelización mediante coordenadas esféricas no es totalmente satisfactoria por dos razones distintas. En primer lugar, la parametrización de la latitud provoca singularidades en los polos (la derivabilidad de la incógnita en esos puntos está defectuosamente contemplada). Pero además, es bien sabido que la superficie terrestre no es exactamente una esfera. Por estas razones, el marco matemático adecuado para formular más correctamente el modelo bidimensional es el de las *variedades diferenciables*. La idea es recubrir la superficie en estudio, que ahora denotaremos por \mathcal{M} , por un conjunto de abiertos U tales que posean una "buena" proyección (*un difeomorfismo*) sobre una parte del plano $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ y de tal manera que exista una buena transición de una "carta" (así es como se denomina al par (U, ϕ)) a otra $((V, \psi))$ si es que existe un solapamiento entre ellas. Las distancias y los ángulos, correctamente definidos por el producto euclídeo de vectores de \mathbb{R}^2 , pueden ser extendidos a la variedad \mathcal{M} generándose así una métrica (se dice entonces que \mathcal{M} es una *variedad Riemanniana bidimensional*). En nuestro caso pediremos también que esa variedad sea "compacta y sin borde". Finalmente, los operadores diferenciales, gradiente de una función escalar y divergencia de una función vectorial, pueden extenderse también al caso de funciones definidas sobre \mathcal{M} con lo que se puede dar perfecto sentido a la ecuación (7) (véase, por ejemplo, Díaz y Tello [20]).

También han sido formulados numerosas variantes a los modelos citados anteriormente. Entre ellos figuran modelos de balance de energía con un término estocástico de *ruido blanco* para incorporar las repercusiones por la acción de los volcanes (véanse North [41] y el tratamiento matemático en G.Díaz y J.I. Díaz [9]). Otro aspecto que también ha sido estudiado en la literatura se refiere al carácter periódico en tiempo de la función de insolaación $S = S(x,t)$. Este hecho conduce a los llamados *modelos estacionales* en los que la unidad de la escala temporal es la una estación y en los que se supone que S es anualmente periódica. Mencionemos también un tipo de modelos unidimensionales formulados mediante ecuaciones integro-diferenciales (véanse Budyko [7] y Held y Suarez [26])

$$c(x) \frac{\partial u}{\partial t} = R_a - R_c + \gamma \left(\int_{-1}^1 u(x,t) dx - u(x,t) \right).$$

Modelos climatológicos de balance de energía más sofisticados son formulados como un sistema de ecuaciones en derivadas parciales para la temperatura atmosférica, la temperatura superficial y la humedad (véase Hetzer Jarausch y Mackens [29] y su bibliografía).

Pese a las sofisticaciones mencionadas en la última observación es claro que si "completamos" un modelo simple, como es el de balance de energía, con muchos otros factores éste puede llegar a perder el valor de su simplicidad y convertirse en un modelo complejo a semejanza de los de Circulación General.

2 Sobre el análisis matemático y numérico de los modelos

Comencemos considerando el modelo cero-dimensional en el que, tras renormalización de la escala temporal, podemos suponer siempre que $c = 1$, es decir, se trata del problema (de los denominados de Cauchy)

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = R_a(u) - R_c(u), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (8)$$

La existencia de una única *solución clásica local*, es decir, tal que $u \in C^0([0, \tau)) \cap C^1(0, \tau)$, para algún $\tau > 0$ y verifica la ecuación en todo punto,

se sitúa dentro del marco de los trabajos pioneros de Auguste Cauchy (1789-1857), Giuseppe Peano (1858-1932) y Auguste Picard (1884-1962), cuando se supone que $R_a(u)$ y $R_c(u)$ son funciones "regulares" (de hecho basta que sean Lipschitz continuas) como es el caso de las hipótesis estructurales propuestas por Sellers. Además, cómo también se supone que R_a es una función acotada y R_c creciente, esa solución local se puede extender, de manera única, a una *solución clásica global* definida en todo el intervalo $[0, \infty)$.

El estudio del problema bajo las hipótesis propuestas por Budyko, con R_a discontinua, es notablemente diferente. Los problemas de Cauchy para funciones discontinuas han sido ampliamente estudiados en la literatura, desde las contribuciones de Constantin Caratheodory (1873-1950). En ese caso, no cabe esperar que exista una solución local clásica $u(t)$. Sin embargo, es posible mostrar la existencia de, al menos, una *solución local fuerte*, es decir tal que $u \in C([0, \tau))$, $\frac{du}{dt}$ existe (y es, al menos, una función localmente integrable) y la ecuación se verifica en todos los puntos de $[0, \tau)$ *salvo, a lo sumo, un subconjunto de medida nula*.

El paso de solución local débil a *solución global fuerte* tampoco presenta una especial dificultad en virtud de las hipótesis supuestas sobre R_a y R_c .

Como se ha indicado, la demostración de la unicidad de soluciones es standard en el caso Lipschitz (modelo de tipo Sellers) pero, sin embargo, pasa a ser una cuestión mucho más delicada cuando $R_a(u)$ es discontinua en u (modelo de tipo Budyko). De hecho, la consideración de ese tipo de cuestiones conduce a reformular el problema (8) como un *problema de tipo multívoco*. En efecto, el valor de la función $R_a(u)$ en el punto de discontinuidad $u = -10$ (recuérdese que $R_a(u) = Q \cdot \beta(u)$ con β dada por (1)) no puede ser definido con precisión por lo que es conveniente suponer que a ese punto se le asigna todo el intervalo, es decir, $\beta(-10) = [\beta_l, \beta_w]$. Ahora se suele identificar β con su *grafo* (como subconjunto de \mathbb{R}^2) y, dado que $R_a(u)$ se supone no decreciente en u , ese grafo pertenece a la clase de los llamados *grafos maximales monótonos* (la condición de maximal le viene por la imposibilidad de incluir ese grafo en otro monótono mayor; véase Brezis [6]). En este contexto, el problema (8) debería ser escrito más propiamente como

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} \in R_a(u) - R_c(u) \text{ en } (0, \infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (9)$$

y entenderlo en el sentido de que existe un par de funciones u y b , con

$$b(t) \in \beta(u(t)) \text{ para casi todo } t \in (0, \infty). \quad (10)$$

tales que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Qb(t) - R_c(u(t)) \text{ para casi todo } t \in (0, \infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (11)$$

Una vez hechas estas precisiones, en lo sucesivo, no haremos ninguna distinción en los símbolos utilizados para describir las ecuaciones asociadas a una función $R_a(u)$ (o β) que unas veces pueda ser supuesta regular y en otras un grafo maximal monótono, entendiéndose que en el último caso se han de introducir matizaciones del estilo de las anteriormente expuestas.

Pero volvamos a la cuestión de la unicidad de soluciones para el caso de $R_a(u)$ (o β) multívoco. Para ilustrar globalmente la situación que se presenta ante esa disyuntiva es útil comenzar estudiando el conjunto de soluciones estacionarias u_∞ de (8), es decir, $u_\infty \in \mathbb{R}$ satisfaciendo

$$0 = R_a(u) - R_c(u). \quad (12)$$

El conjunto de soluciones de (12) depende obviamente de la elección de R_a y R_c así como de los diferentes valores de los parámetros. Es especialmente relevante analizar las distintas soluciones que se presentan cuando se varía la constante solar Q . Si, por simplicidad, suponemos $R_c(u)$ lineal, el efecto similar a variar Q es el de variar las rectas generadas por $R_c(u)$ con lo que se llega a diferentes casos que son esquematizados en la Figura 1 para el caso de una $R_a(u)$ de tipo Sellers (véase (2))

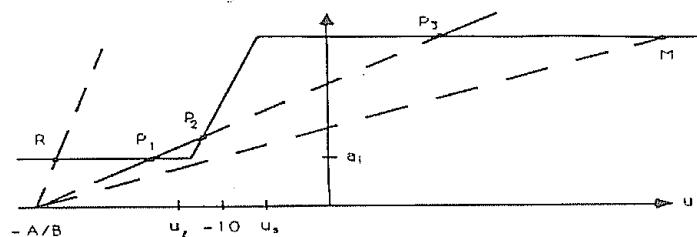


Figura 1: Intersecciones entre las dos gráficas obtenidas para diferentes valores de Q

Se obtiene un *diagrama de bifurcación* como el de la Figura 2 que permite ver el número de soluciones para un valor dado de Q .

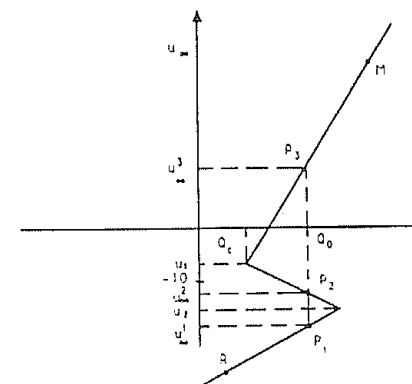


Figura 2. Diagrama de bifurcación en función de la constante solar Q para el modelo de tipo Sellers

Volviendo al caso del problema de Cauchy para $R_a(u)$ (o β) multívoco, es sencillo ver que si, por ejemplo, tomamos Q tal que $u_\infty^1 = -10$ sea una de las tres soluciones de equilibrio $u_\infty^2 < u_\infty^1 < u_\infty^3$, entonces el problema de Cauchy (8) (o, más propiamente, (9)) con dato inicial $u_0 = -10$ tiene infinitas soluciones. En efecto, $u_1(t) = -10$ es una solución, en ese caso tomaríamos $b = \frac{-10B+C}{Q} \in \beta(-10)$. Dos soluciones distintas vienen dadas por

$$\begin{cases} c \frac{du_2}{dt}(t) = Q\beta_i - Bu_2(t) - C, \\ u_2(t_0) = -10. \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} c \frac{du_3}{dt}(t) = Q\beta_w - Bu_3(t) - C, \\ u_3(t_0) = -10. \end{cases}$$

Además, como la ecuación de (8) es *autónoma* (las funciones $R_a(u)$ y $R_c(u)$ no dependen explícitamente de t) es claro que las funciones

$$u_\sigma = \begin{cases} -10 & t \in [t_0, t_0 + \sigma], \\ u_2(t - \sigma) & t \in [t_0 + \sigma, \infty). \end{cases}$$

y

$$\hat{u}_\sigma = \begin{cases} -10 & t \in [t_0, t_0 + \sigma], \\ u_3(t - \sigma) & t \in [t_0 + \sigma, \infty). \end{cases}$$

son también soluciones de (8), independientemente del valor de $\sigma > 0$. Finalmente, estudiando el signo de $R_a - R_r$ es fácil obtener una descripción dinámica del comportamiento cualitativo de las soluciones.

El estudio del comportamiento cuando $t \rightarrow \infty$ puede ser llevado a cabo fácilmente bajo hipótesis mucho más generales. Si comenzamos por abordar el caso en el que R_a y R_r son funciones regulares monótonas (con R_r acotada) encontraríamos primero que el diagrama de bifurcación sigue siendo, en sentido amplio, una curva en forma de "csc" con al menos dos *puntos de retorno*. Analizando el *problema linealizado* podríamos comprobar que las ramas crecientes de la curva de bifurcación están formadas por *estados* (puntos en nuestro caso) *estables* (ante "pequeñas" variaciones del dato inicial) y las decrecientes por *estados inestables*. Si tomásemos para Q el valor estimado en nuestros días, veríamos que la solución u_∞^3 representa la temperatura globalmente promediada del planeta (cerca a 15°C). La solución u_∞^2 es una solución extraña inestable y la u_∞^1 corresponde a un posible estado de glaciación (nótese que es inferior a -10°C) que es también estable.

De hecho, el estudio de la estabilidad puede ser fácilmente extendido al caso de perturbaciones iniciales arbitrarias (no necesariamente "pequeñas"). En efecto, es fácil ver que la *función potencial*

$$F(u) = - \int_u^u (R_a(v) - R_r(v)) dv, \quad (13)$$

(con u^* arbitrariamente fijado) es una función de Lyapunov pues

$$\frac{dF}{dt}(u(t)) = - \left(\frac{du}{dt}(t) \right)^2.$$

Así, los mínimos relativos de F corresponden a soluciones estables y los máximos relativos a soluciones inestables. Del diagrama de bifurcación es fácil deducir que si Q decrece desde su valor en nuestros días (por ejemplo debido a una polución atmosférica generalizada, por la acción simultánea de numerosos volcanes, por la caída de un enorme asteroide sobre la Tierra...) la temperatura estacionaria asociada $u_3^\infty(Q)$ tendría que comenzar a disminuir (o, lo que es lo mismo, el punto $(Q, u_3^\infty(Q))$ bajaría por la izquierda del diagrama). Si Q atravesase un cierto valor crítico (Q_c , el correspondiente al punto de retorno de la curva) la temperatura tendría que decrecer dramáticamente hasta buscar otra temperatura promediada estable $u_1^\infty(Q_1)$ que correspondería a una glaciación. El camino inverso también sería abrupto, pues partiendo de $u_1^\infty(Q_1)$ si ahora Q aumentase (debido al cese de las causas que llevaron a su

disminución) tendríamos que ascender por otro camino, no coincidente con el anterior, hasta alcanzar una temperatura estable $u_3^\infty(Q_1)$. Es el fenómeno conocido como *histéresis* que ocurre con gran frecuencia en la naturaleza y en muchos otros sistemas (véanse, por ejemplo, Krasnoselskii y Pokrovskii [31] y sus referencias). Procesos de ese tipo son también típicos de la *Teoría de Catástrofes* (Thom [47]).

El interés de los modelos de balance de energía está motivado precisamente por este tipo de resultados que muestran la sensibilidad de la solución con respecto a parámetros de gran importancia como es la constante solar Q . Pero, ¿se mantendrán ese tipo de resultados para modelos de balance de energía no homogéneos más realistas en los que se incorpore la difusión espacial de temperaturas?

Escalando en complejidad, consideremos ahora el modelo de balance de energía bidimensional asociado a una representación de la superficie terrestre como una variedad Riemanniana bidimensional compacta y sin borde (como, por ejemplo, $\mathcal{M} = \mathbb{S}^2$). Recordemos que una formulación posible es la de encontrar $u = u(x, t)$ con $(x, t) \in \mathcal{M} \times [0, \infty)$ tal que

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} c(x)u_t - \operatorname{div}(k\nabla u) = R_a(x, u) - R_r(x, u) & \text{en } \mathcal{M} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \mathcal{M}. \end{cases} \quad (14)$$

Observemos que si suponemos $\mathcal{M} = \mathbb{S}^2$ y si las funciones $c(x)$, $R_a(x, u)$ y $R_r(x, u)$ sólo dependen de la latitud entonces cada solución $u_1(x, t)$ del problema unidimensional (5) genera una solución $u_2(x, y, t)$ del modelo (14) mediante rotación alrededor del eje terrestre, i.e. $u_2(x, y, t) = u_1(\operatorname{sen} \varphi, t)$ donde $(x, y) \in \mathbb{S}^2$ y φ es la latitud.

Como en el caso del modelo cero-dimensional, los resultados de existencia y unicidad de soluciones de (5) son de diferente naturaleza según que se suponga la función R_a discontinua (o multivaluada) o no. La existencia de, al menos una, solución, supuesto el dato inicial regular, puede probarse sin dificultad mediante diferentes métodos. La cuestión de la unicidad de soluciones cuando R_a es discontinua es mucho más delicada (en contraste con el caso en el que R_a es Lipschitz continua). En primer lugar, es posible mostrar mediante contraejemplos que la unicidad se vulnera cuando, por ejemplo, el dato inicial toma su máximo o mínimo al nivel $u_0 = -10$. Sin embargo, si el dato inicial u_0 atraviesa el nivel $u_0 = -10$ de manera "no degenerada" ($\nabla u_0(x_0) \neq 0$ en los puntos $x_0 \in \mathcal{M}$ donde $u_0(x_0) = -10$) entonces se mantiene la unicidad de soluciones (Díaz y Tello [20]).

Antes de analizar la cuestión de la estabilidad y bifurcación de los estados estacionarios, merece la pena entretenerse en mencionar un aspecto notable que, a diferencia del caso del modelo cero-dimensional, cobra ahora sentido. Nos referimos a la simulación de las *fronteras libres* separando las zonas de la Tierra cubiertas por hielo y nieve. Recordando los argumentos aludidos para la parametrización del distinto albedo terrestre, tales curvas vendrían definidas como las curvas para las que se produce una transición brusca en el co-albedo, es decir, sobre las que se ha de tener que $u = -10$. El modelo mejor adaptado para tal simulación es el de tipo Budyko en el que se supone que el co-albedo se representa por una función discontinua.

Si, por simplicidad, retornamos al caso unidimensional (véase (5)) las fronteras libres ahora pasan a ser puntos (desconocidos *a priori*) separando la zona cubierta de hielo y nieve $\{x \in [-1, 1] : u(x, t) < -10\}$ del resto. Supongamos que esos puntos se limitan a dos $S_+(t)$ y $S_-(t)$ que corresponden a las latitudes que "representan" los promedios de las fronteras de los dos casquetes polares. Se tiene pues que $u(S_{\pm}(t), t) = -10$. El intervalo temporal de definición de las interfases $S_+(t)$, $S_-(t)$ no es siempre $[0, \infty)$ sino que depende fuertemente de los datos Q , $S(x)$, de la especificación de $R_a(x, u)$ y del dato inicial $u_0(x)$. Puede probarse (Xu [48]) que $S_+(t)$ y $S_-(t)$ son funciones C^∞ (al menos mientras no colapsen) que evolucionan según la ecuación diferencial

$$S'_+(t) = \frac{k[u_{t,x}(S_+(t)_-, t) - u_{t,x}(S_+(t)_+, t)]}{QS(S_+(t))(\beta_f - \beta_i)}$$

y la análoga para $S'_-(t)$, donde se ha utilizado la notación genérica de $f(t)_+ = \lim_{h \downarrow 0} f(t+h)$. El caso bidimensional es más delicado

En ocasiones, la representación del borde de los casquetes polares por medio de una curva sobre la superficie \mathcal{M} no es enteramente satisfactoria pues imágenes emitidas desde los satélites muestran extensiones, que pueden llegar a tener un espesor de 40 km, en donde es difícil, sino imposible, decidir si se trata de agua o hielo. Una formulación matemática de ese tipo de situaciones equivaldría a suponer que el conjunto $M(t) = \{x \in \mathcal{M} : u(x, t) = -10\}$ tuviese medida positiva. A veces se denomina a tal conjunto como *zona pastosa* (*mushy región*, en inglés) por su similitud con regiones similares provenientes de la modelización de problemas de Stefan de cambio de fase. Es posible mostrar que si u es solución del problema (14) entonces tal conjunto se reduce a un conjunto de curvas que no puede tener medida positiva. Por el contrario, en el caso del modelo cuasilineal (6), propuesto por Stone, en el que $k = |\nabla u|^{p-2}$, se tiene que el conjunto $M(t)$ puede tener medida positiva

si $p > 2$ (Díaz [15]).

Los estados de equilibrio $u_\infty(x)$ del problema (14) son ahora bastante más complejos que las constantes que aparecían en el modelo cero-dimensional. Ahora vienen dados como soluciones del problema estacionario

$$-\operatorname{div}(k\nabla u_\infty) = R_a(x, u_\infty) - R_c(x, u_\infty), \text{ en } \mathcal{M}. \quad (15)$$

Como $R_c(\cdot, u_\infty)$ es creciente en u , la ecuación (15) tiene carácter de *problema no lineal del tipo de autovalor* y así, la multiplicidad de soluciones depende fuertemente de los diferentes valores del parámetro solar Q . Usando técnicas clásicas de análisis no lineal (tales como el *método de continuación* y el *Teorema de la función implícita* (véase, por ejemplo, Zeidler [50]), se prueba que, bajo adecuadas condiciones, al igual que en el diagrama de bifurcación del modelo cero-dimensional, hay una curva de bifurcación que comienza en un estado u_∞^0 cuando $Q = 0$ y tiende al infinito si $Q \rightarrow +\infty$, teniendo además un número par de puntos de retorno correspondientes a $Q = Q_c^1$ y $Q = Q_c^2$. De esta manera, si $Q < Q_c^1$ o $Q > Q_c^2$ hay unicidad de soluciones y si $Q \in (Q_c^1, Q_c^2)$ existen al menos tres soluciones (un resultado más fino puede hallarse en Arcoya, Díaz y Tello [2]).

El estudio de la estabilidad de los estados estacionarios puede llevarse a cabo por medio de distintos métodos. Un primer resultado en esa dirección es el que muestra que el llamado *conjunto ω -límite*,

$$\omega(u) = \{u_\infty : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} : \exists t_n \rightarrow +\infty \text{ para los que } u(t_n, \cdot) \rightarrow u_\infty\},$$

está formado únicamente por soluciones de (15) (Díaz, Hernández y Tello [16]). La estabilidad ante "pequeñas variaciones" del dato inicial se puede analizar por medio del *principio de estabilidad linealizada* cuando se supone que las funciones R_a (o, lo que es lo mismo, β) y R_c son derivables respecto de u . El problema linealizado en torno a un estado estacionario u_∞ es también de tipo de autovalores

$$-\operatorname{div}(k\nabla v) - [QS'_v(u_\infty) - \frac{\partial}{\partial u} R_c(x, u_\infty)]v = \lambda v, \text{ en } \mathcal{M}. \quad (16)$$

Es bien conocido que los autovalores de este problema constituyen una sucesión no decreciente $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ que tiende a infinito y, además, se tiene que $\lambda_0(Q, u) < \lambda_1(Q, u)$. Según el principio de estabilidad linealizada, dado $Q > 0$, una solución u_∞ de (15) es asintóticamente estable (respectivamente,

inestable), en $C([-1, 1])$, si el punto de equilibrio del problema parabólico verifica $\lambda_0(Q, u_\infty) < 0$ (respectivamente, $\lambda_0(Q, u_\infty) > 0$) (para más detalles sobre la aplicación al problema (15) véase Hetzer [28]).

La estabilidad no lineal (i.e., ante perturbaciones no necesariamente "pequeñas") para el problema (14) puede estudiarse también, y sin necesidad de suponer la derivabilidad de R_a y R_e , con ayuda del funcional

$$J(u) = \int_{\mathcal{M}} \{k |\nabla u(x)|^2 + F(x, u(x))\} dx.$$

donde

$$F(x, u) = - \int_0^u \{R_a(x, v) - R_e(x, v)\} dv.$$

Se tiene que

$$\frac{d}{dt} J(u(\cdot, t)) = - \int_{-1}^1 c(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 dx \leq 0.$$

por lo que J es un funcional de Lyapunov y las soluciones estables se corresponden con los mínimos de J y las no linealmente inestables con otros puntos críticos como máximos o puntos de silla. La búsqueda de estados estacionarios no se debe limitar, pues, al estudio de los puntos extremales (mínimos y máximos) locales del funcional J . En esta dirección es de señalar la importancia del resultado conocido como el *Lema del paso de montaña* (véase, por ejemplo, Nirenberg [39]) que bajo circunstancias muy generales asegura que entre dos mínimos ha de existir necesariamente un punto de silla (para una aplicación de este lema a modelos climáticos véase Ghil y Childress [24]).

La persistencia o no, para $t \in (0, \infty)$, de las fronteras libres ($S_+(t)$ y $S_-(t)$ en el problema uni-direccional) asociadas a estados de evolución $u(x, t)$ es de gran importancia en el estudio del conjunto de los estados de equilibrio $u_\infty(x)$ del problema (15): si por ejemplo $S_-(T_0) = S_+(T_0)$ para algún T_0 y ese punto interior de $(-1, 1)$ entonces se puede mostrar que el estado estacionario $u_\infty(x)$ representa el caso de una superficie terrestre cubierta de hielo y nieve pero si el punto $S_-(T_0) = S_+(T_0)$ es $x = 1$ o $x = -1$ entonces $u_\infty(x)$ representa la ausencia de superficies heladas.

El estudio numérico de los modelos de balance de energía ha sido llevado a cabo por numerosos autores para elecciones concretas de R_a y R_e (son de citar los trabajos de Held y Suárez, North y Hetzer, Jarausch y Mackens antes citados: véanse también Bernejo [3] y Bernejo, Díaz y Tello [5]). Un método frecuentemente utilizado es el de Galerkin (Mengel, Short and North

[37], Lin and North [33], Díaz and Tello [4], Tello[46]). Consideremos el problema

$$(P^*) \begin{cases} u_t - (\rho(x)u_x)_x + Bu + C \in QS(x)\beta(u), & (t, x) \in (0, T) \times (-1, 1), \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

donde $\rho(x) = 1 - x^2$ con $u_0 \in V := \{v \in L^2(\Omega) : v_x \in L^2_\rho(\Omega)\}$. Se sabe (Díaz [11]) que la solución u está en el espacio $L^2(0, T; V)$. Veamos cómo aproximarla. Construiremos "soluciones aproximadas" pertenecientes a espacios de dimensión finita $V_m \subset V$ generados por las autofunciones w_i del operador diferencial $(\rho(x)u_x)_x$. Gracias a la compacidad del operador inverso del operador diferencial, podemos suponer que $V_m = [w_1, w_2, \dots, w_m]$ espacio vectorial de dimensión m , donde $w_i \in V$ es una autofunción de autovalor λ_i , $\forall m$, w_1, \dots, w_m son linealmente independientes y las combinaciones lineales de las funciones w_i , $i \in IN$, son densas en V . En nuestro caso, es bien conocido (véase por ejemplo Legendre [32], Simmons [44]) que las autofunciones del operador de difusión son los polinomios de Legendre, dados por $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, y en general,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n},$$

correspondientes a los autovalores $\lambda_n = n(n+1)$. Además

$$\int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)dx = \frac{2}{2j+1} \delta_{ij}.$$

Llamaremos "solución aproximada" del problema a $u_m = u_m(t, x)$ dada por

$$u_m = \sum_{i=0}^m \alpha_i(t) P_i(\cdot)$$

donde α_i queda determinado por

$$(P_m) \begin{cases} \langle u_m, P_i \rangle + \langle (1-x^2)(u_m)_x, (P_i)_x \rangle + \langle Bu_m, P_i \rangle + \langle C, P_i \rangle = \\ = \langle QS(x)z_m, P_i \rangle & i = 0 \dots m \\ u_m(0, x) = u_{0m}(x), \end{cases}$$

para algún $z_m \in L^\infty((0, T) \times (-1, 1))$, $z_m \in \beta(u_m)$ $\forall (t, x) \in (0, T) \times (-1, 1)$ y siendo $u_{0m}(x) = \sum_{i=0}^m u_0^i P_i(x)$. Aquí el corchete $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa el producto escalar en $L^2(\Omega)$. Sustituyendo u_m por su expresión en la base de V_m , se obtiene que

$$\begin{cases} \frac{2}{2i+1}\alpha'_i(t) + \frac{2\lambda_i}{2i+1}\alpha_i(t) + \frac{2B}{2i+1}\alpha_i(t) = \Gamma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m) & \text{si } i \neq 0 \\ 2\alpha'_0(t) + 2\lambda_0\alpha_0(t) + 2B\alpha_0(t) + C = \Gamma_0(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \\ \alpha_i(0) = u_0^i \end{cases}$$

con $\Gamma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \langle QS(x)z_m, P_i \rangle$. Así, hemos obtenido un sistema de $m+1$ ecuaciones diferenciales ordinarias con $m+1$ incógnitas $\alpha_i(t)$ y $m+1$ datos iniciales $u_0^i, i = 0, \dots, m$. La existencia de solución para este sistema está garantizada mediante resultados conocidos (véase, por ejemplo, Filippov [23]).

Para mostrar la convergencia se deben obtener estimaciones a priori (independientes de m), para lo cual se toma u_m como función test y se llega a que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m|^2 + \int_{\Omega} \rho(x) |(u_m)_x|^2 + (B - \frac{\epsilon}{2}) \int_{\Omega} |u_m|^2 \leq K$$

donde K es una cierta constante positiva independiente de m . Finalmente, tomando ahora $(u_m)_t$ como función test se obtiene

$$(1 - \frac{\epsilon}{2}) \int_{\Omega} |u'_m|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\rho(x) |(u_m)_x|^2) + \frac{B}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m|^2 \leq K.$$

lo que permite pasar al límite $u_m \rightarrow u$ en V y $u'_m \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}$ en $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, y mostrar que u satisface la formulación débil del problema. Numerosas experiencias numéricas son asequibles en la literatura (algunas de ellas utilizadas para analizar previsiones ante escenarios con duplicación del CO_2 , etc.). Una representación (estática) de una de esas simulaciones aparece en la Figura 3.

3 Control

En 1955, John von Neumann escribía [38]:

Microscopic layers of colored matter spread on an icy surface, or in the atmosphere above one, could inhibit the reflection-radiation process, melt the ice and change the local climate. Probably intervention in atmospheric and climate matters will come in a few decades, and will unfold on a scale difficult to imagine at present



Figura 3: Predicción de temperaturas de hace 115.000 en el estudio de glaciaciones según Mengel, Short and North (loc.cit.).

Hoy, una parte de su sueño es casi una realidad y así, por ejemplo, los protocolos internacionales sobre emisión de gases de efecto invernadero los ejemplos más ilustrativos de controles planteados a una escala global. También lo son los protocolos mundiales y europeos sobre emisión de aerosoles (respondiendo a un intento de frenar el crecimiento del agujero, en la estratosfera, de la capa de ozono de la Antártida (beneficioso por proteger a la Tierra de una radiación excesiva de los rayos ultravioleta) o a una altura más cercana a nosotros, la nociva acción de la contaminación (típicamente urbana) del ozono troposférico, sobre las personas y la agricultura.

Si nos centramos en un modesto fin adaptado a nuestros modelos sencillos, nos podemos preguntar si es posible "conducir" una distribución "inicial" de temperaturas (que ahora denotamos por $y(0, x)$ pues en la Teoría de Control la incógnita no es el estado del sistema, que se suele denotar por y , sino el control v) hasta una distribución deseada $y_d(x)$ transcurrido un período dado T y todo ello "actuando" sólo desde una subvariedad ω de \mathcal{M} . Como se ha comentado, la incógnita ahora es el control $v: (0, T) \times \omega \rightarrow R$ que permita que $y(T; v) = y_d$ donde $y(\cdot; v)$ denota la solución de (\mathcal{P}) reemplazando $R_c(t, x, y)$ por $g(y) - f(t, x) - v(t, x)\chi_\omega$ con χ_ω la función característica de ω . Cuando la respuesta es afirmativa se dice que (\mathcal{P}) es controlable. Sin

embargo, el carácter parabólico de la ecuación de (\mathcal{P}) conlleva ciertos efectos regularizantes que hacen imposible tal tipo de respuestas para funciones genéricas y_d . Un concepto alternativo es el de la *controlabilidad aproximada*: dado $\varepsilon > 0$ buscamos ahora un control v_ε (definido de nuevo sobre $(0, T) \times \omega$) tal que $d(y(T, v_\varepsilon), y_d) \leq \varepsilon$, donde $d(\cdot, \cdot)$ representa la distancia en algún espacio de funciones sobre \mathcal{M} (normalmente $L^2(\mathcal{M})$, o, más en general, $L^p(\mathcal{M})$ con $1 \leq p \leq \infty$).

La naturaleza de nuestro dominio espacial \mathcal{M} aporta algunas dificultades adicionales al estudio. Una formulación más sencilla pero que conserva las dificultades esenciales de nuestra meta corresponde al caso en el que sustituimos \mathcal{M} por un abierto regular y acotado Ω de \mathbb{R}^2 (aquí \mathbb{R}^2 puede ser sustituido por \mathbb{R}^N con $N \geq 1$). En ese caso, conviene tomar como condición de contorno sobre $(0, T) \times \partial\Omega$ una de tipo de Neumann pues las funciones test asociadas a la formulación débil son similares a las que corresponden al caso en el que \mathcal{M} es una variedad Riemanniana sin borde. Otra simplificación irrelevante es suponer $f \equiv 0$. Así, la nueva formulación del problema de controlabilidad aproximada sería la siguiente: dado ω , abierto acotado de Ω , y dados $y_0, y_d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ hallar $v_\varepsilon : (0, T) \times \omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $d(y(T; v_\varepsilon), y_d) \leq \varepsilon$ donde, en general, $y(T; v)$ representa la solución del problema

$$(\mathcal{P}_\omega) \begin{cases} y_t - \Delta y + g(y) \in QS(x)\beta(y) + v\chi_\omega & \text{en } (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial y}{\partial n} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega \\ y(0, \cdot) = y_0(\cdot) & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde n es el vector unitario exterior a $\partial\Omega$.

Un primer resultado sobre el tema (Díaz [12]) consiste en mostrar que la controlabilidad aproximada depende, de manera esencial del comportamiento asintótico de los términos no lineales de la ecuación (y no de su regularidad). Así, si se supone que $y_0, y_d \in L^2(\Omega)$, con β multivaluado y acotado y g una función no-decreciente tal que

$$|g(s)| \leq C_1 + C_2|s| \quad \forall s \in \mathbb{R}, |s| > \bar{M} \quad (17)$$

para algunas constantes C_1, C_2 y \bar{M} , entonces el problema (\mathcal{P}_ω) es controlable aproximadamente en $L^2(\Omega)$, i.e. existe $v_\varepsilon \in L^2((0, T) \times \omega)$ tal que

$$\|y(T; v_\varepsilon) - y_d\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

El resultado anterior puede ser extendido al caso en el que se reemplaza $L^2(\Omega)$ por $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ o $C(\bar{\Omega})$. La idea principal es la aplicación

del Teorema del punto fijo de Kakutani (véase Lions [34], [36], Henry [27], Fabré, Puel and Zuazua[21], Díaz [10] y Díaz and Ramos [18] para otros resultados relativos). Nótese que este resultado es aplicable al caso particular del modelo de Budyko en el que $g(y) = \beta y$ pero sin embargo la condición (17) no es satisfecha para el modelo de Sellers. Aún más preciso, es posible mostrar (Díaz [10], [12]) que si suponemos

$$g(y) = \lambda|y|^{p-1}y \quad \text{para } y \in \mathbb{R} \text{ y para algún } \lambda > 0 \text{ y } p > 1 \quad (18)$$

entonces aparece un *fenómeno de obstrucción*: supongamos que $\partial\omega$ verifica la condición de la esfera tangente exterior e interior. Sea $y_0 \in L^\infty(\Omega)$. Entonces existe una función $Y_\infty \in C([0, T] \times (\Omega - \bar{\omega}))$ tal que para todo $v \in L^2((0, T) \times \omega)$ la solución correspondiente $y(t, x; v)$ verifica que

$$|y(t, x; v)| \leq Y_\infty(t, x) \quad \text{para } (t, x) \in (0, T) \times (\Omega - \bar{\omega}).$$

La función de obstrucción Y_∞ puede ser construida tal que

$$\begin{aligned} Y_\infty(t, x) &= +\infty && \text{sobre } (0, T) \times \partial\omega \\ \frac{\partial Y_\infty}{\partial n}(t, x) &= 0 && \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega. \end{aligned}$$

En consecuencia, la condición (18) implica que el problema (\mathcal{P}_ω) (en general) no puede ser controlable aproximadamente pues si $|y_d(x)| > Y_\infty(T, x)$ en casi todo punto x sobre un subconjunto de medida positiva D de $\Omega - \bar{\omega}$ entonces, para todo $v \in L^2((0, T) \times \omega)$

$$\|y(T; v) - y_d\|_{L^2(\Omega)} \geq \|Y_\infty(T, \cdot) - y_d\|_{L^2(\Omega)}$$

y así, si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño es imposible elegir v de manera que se satisfagan la propiedad requerida. Debido a la relevancia del modelo de Sellers, se plantea una cuestión natural: ¿es posible mostrar la controlabilidad aproximada para el problema \mathcal{P}_ω en una clase más pequeña de estados deseados y_d ?

La respuesta es positiva (Díaz [13], [14]). Para explicitar el resultado es cómodo simplificar aún más el problema en consideración limitándonos al problema

$$(\mathcal{P}_p) \begin{cases} y_t - \Delta y + \lambda|y|^{p-2}y = v\chi_\omega & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial n} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) = y_0(\cdot) & \text{sobre } \Omega. \end{cases}$$

En primer lugar, conviene introducir las *funciones de obstrucción mejoradas* $\underline{Y}_\infty, \bar{Y}_\infty \in C([0, T] \times (\Omega - \bar{\omega}))$. La función \underline{Y}_∞ es obtenida como la solución

débil (supuesto $y_0 \in L^1(\Omega)$) del problema

$$\begin{cases} \underline{Y}_t - \Delta \underline{Y} + \lambda |\underline{Y}|^{p-2} \underline{Y} = 0 & \text{en } (0, T) \times (\Omega - \bar{\omega}), \\ \underline{Y}_\infty = -\infty & \text{sobre } (0, T) \times \partial\omega, \\ \frac{\underline{Y}}{\partial n} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \\ \underline{Y}_\infty(0, \cdot) = y_0(\cdot) & \text{sobre } \Omega. \end{cases}$$

e \bar{Y}_∞ satisface las mismas condiciones salvo que ahora $\bar{Y}_\infty = +\infty$ sobre $(0, T) \times \partial\omega$. Tras esto ya se puede enunciar el resultado de controlabilidad aproximada restringida: Sean $y_0 \in C(\bar{\Omega})$ y $\epsilon > 0$ dados. Sea $y_d \in C(\bar{\Omega})$ tal que

$$\underline{Y}_\infty(T, x) - \epsilon < y_d(x) < \bar{Y}_\infty(T, x) + \epsilon \quad \forall x \in \Omega - \bar{\omega} \quad (19)$$

Entonces, para todo existe $v_\epsilon \in C([0, T] \times \bar{\omega})$ tal que si $y(t : v)$ es la solución correspondiente de (P_p) se tiene que

$$\|y(T : v_\epsilon) - y_d\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \epsilon. \quad (20)$$

Nótese que la hipótesis (19) es óptima en el sentido de que si v_ϵ es tal que se verifica (20), entonces por el principio de comparación

$$\underline{Y}_\infty(t, x) < y(t, x : v_\epsilon) < \bar{Y}_\infty(t, x) \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times (\Omega - \bar{\omega})$$

con lo que

$$\underline{Y}_\infty(T, x) - \epsilon < y(T, x : v_\epsilon) - \epsilon \leq y_d(x) \leq y(T, x : v_\epsilon) + \epsilon < \bar{Y}_\infty(T, x) + \epsilon$$

y necesariamente se tiene (19).

Para concluir, haremos alusión a unas recientes experiencias numéricas sobre la aproximación numérica del control v_ϵ antes mencionado (Díaz y Ramos [19]). Para no complicar técnicamente la exposición nos limitaremos al caso del problema unidimensional

$$P(u) \begin{cases} y_t - y_{xx} + g(y) = v(t)\delta(0) & \text{en } (0, T) \times (-1, 1), \\ y(\pm 1, t) = 0 & t \in (0, T), \\ y(0, x) = y^0(x) & \text{sobre } (-1, 1). \end{cases} \quad (21)$$

donde g es una función continua no-decreciente, $v(t)$ es el control buscado y $\delta(0)$ es la distribución Delta de Dirac en $x = 0$ (en realidad, para evitar complicaciones adicionales, conviene reemplazar la localización en el origen por el caso de un pequeño intervalo ω a su alrededor). Aquí, T está arbitrariamente fijado e y^0 es una función dada ($y^0 \in C^0([-1, 1])$). Para el

análisis numérico del control, se aproximará (cuando $k \rightarrow \infty$) éste por una sucesión de soluciones u_k del problema de control óptimo penalizado en el que los contro es v_k se obtienen minimizando el funcional

$$J_k(v) = \|v\|_{L^2(0, T)} + k \|y(T : v) - y_d\|_{L^2(-1, 1)}. \quad (22)$$

(la convergencia rigurosa no es totalmente conocida; véanse los resultados parciales de Lions [35] y Fernández y Zuazua [22]). Las funciones de obstrucción mejoradas, $Y_{\pm\infty}$, satisfacen ahora

$$P(\pm\infty) \begin{cases} y_t - y_{xx} + g(y) = 0 & \text{en } (0, T) \times (-1, 1), \\ y(\pm 1, t) = 0, \quad y(0, t) = \pm\infty & t \in (0, T), \\ y(0, x) = y^0(x) & \text{sobre } (-1, 1). \end{cases} \quad (23)$$

Su existencia está asegurada sólo si g es superlineal, pese a que, curiosamente, la solución del problema de control óptimo (22) posea siempre una solución v_k para toda función continua no-decreciente g , independientemente de si g es superlineal o no.

Nuestros resultados numéricos muestran que, para k fijo, el coste "minimal" $J_k(v)$ (y la norma del control óptimo v_k) para una función superlineal g se hacen mucho mayores si (19) no es satisfecha. Para más detalles véase Díaz y Ramos ([18]).

4 Un problema inverso: la conjetura de von Neumann

Nos ocuparemos, finalmente, de una formulación matemática de la conjetura propuesta por von Neumann citada anteriormente. Ahora la cuestión es introducir tan solo un cambio en la función coalbedo. Para simplificar la exposición nos limitaremos al caso de modelos de tipo Sellers y, de hecho, con $g(r) = Br + C$, $B > 0$. Señalemos que, de hecho, una hipótesis más realista es suponer que tal función también depende de las coordenadas espaciales del punto de la Tierra (especialmente de su latitud; véase [25], Sección 3.3). Por tanto convendría reemplazar $\mathcal{J}(y)$ por

$$\mathcal{B}(x, u) = \begin{cases} \mathcal{J}_i(x) & u < u_i, \\ \mathcal{J}_i(x) + \left(\frac{u - u_i}{u_w - u_i}\right)(\mathcal{J}_w(x) - \mathcal{J}_i(x)) & u_i \leq u \leq u_w, \\ \mathcal{J}_w(x) & u > u_w. \end{cases} \quad (24)$$

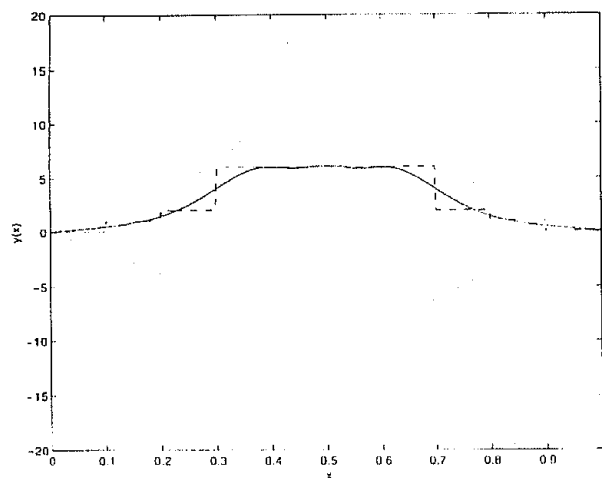


Figura 4: Estado deseado y funciones de obstrucción

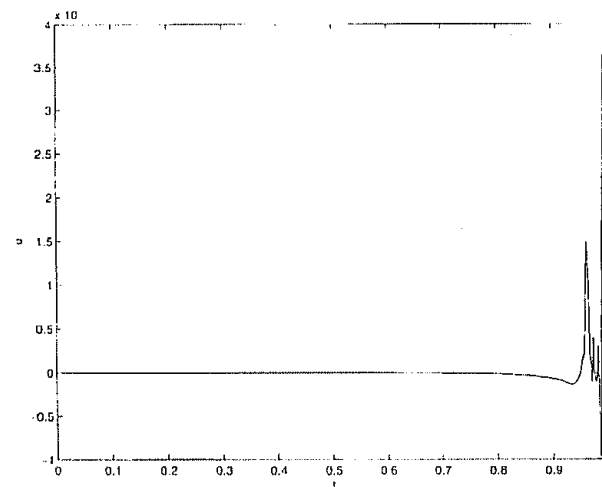


Figura 5: Control óptimo para altos valores de k

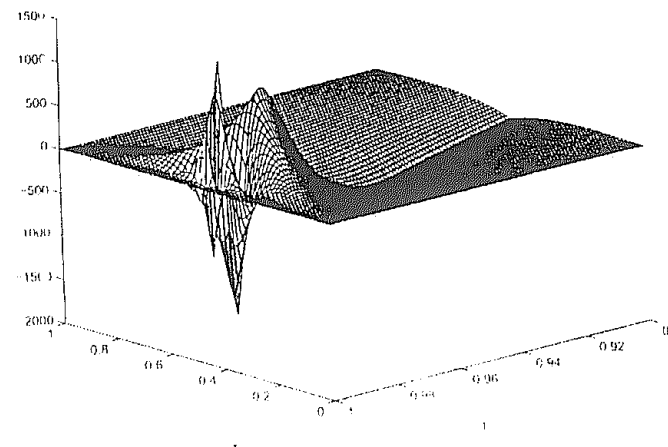


Figura 6: Aproximación del estado del sistema correspondiente al control óptimo

lo cual no modifica los resultados de existencia para el problema transitorio. Una idealización de la modificación propuesta por von Neumann podría tener la forma

$$\beta(x, u; v) = \begin{cases} \beta_i & u < u_i, \\ \beta_i + \left(\frac{u - u_i}{u_w - u_i}\right)(\beta_w + v(x)\chi_\omega(x) - \beta_i) & u_i \leq u \leq u_w, \\ \beta_w + v(x)\chi_\omega(x) & u > u_w. \end{cases} \quad (25)$$

con $\beta_w > \beta_i$ constantes y siendo $\chi_\omega(x)$ la función característica de la región de actuación ω . Notese que podemos escribir

$$\beta(x, u; v) = \beta(u) + v(x)\chi_\omega(x)H(u)$$

siendo

$$H(u) = \begin{cases} 0 & u < u_i, \\ \left(\frac{u - u_i}{u_w - u_i}\right) & u_i \leq u \leq u_w, \\ 1 & u > u_w. \end{cases} \quad (26)$$

Necesitaremos introducir varias matizaciones a la propuesta de von Neumann. La primera de ellas es que supondremos que las modificaciones locales que afecten al co-albedo se realizan dejando invariante la zona ocupada por los

casquetes polares y las nieves perpetuas, e.d. la zona $\mathcal{I} = \{x \in \mathcal{M} : y(x, 0) \geq u_i\}$ (nuestros argumentos son también válidos para el caso complementario en el que las modificaciones se efectúan tan sólo en el entorno de esa región dado por $\{x \in \mathcal{M} : y(x, 0) \leq u_w\}$). Por tanto, en todo lo que sigue supondremos que $\omega = \mathcal{M} - \mathcal{I}$.

El problema de, dada una distribución de temperaturas deseada $y_d(x)$ (por ejemplo la distribución de temperaturas antes de la era industrial), hallar $v(x)$ de manera que $y(T : v) = y_d$, con $y(T : v)$ solución de

$$(\mathcal{P}_v) \begin{cases} y_t - \Delta y + By + C = QS(x)(\beta(y) + v(x)H(y)) & \text{en } (\mathcal{M} - \mathcal{I}) \times (0, T), \\ y = u_i & \Gamma \times (0, T) \\ y(0, \cdot) = y_0(\cdot) & \text{en } (\mathcal{M} - \mathcal{I}), \end{cases}$$

siendo $\Gamma = \partial\mathcal{I}$, es considerablemente más complicado que el analizado en la sección anterior. Veamos como, bajo adecuadas hipótesis es posible alcanzar una respuesta positiva gracias a la aplicación de un teorema de punto fijo. Nuestro punto de vista ahora estará más cercano a problemas de tipo inverso que a la teoría de la controlabilidad pues los controles estarán sujetos a importantes restricciones y el conjunto de alcanzabilidad $\{y(T : v) : \forall v\}$ control admisible distará mucho de ser un conjunto denso en $L^2(\mathcal{M} - \mathcal{I})$.

Observemos que los controles v (e.d. las modificaciones en el albedo) han de obedecer necesariamente a la restricción de que $\beta(y) + v(x)H(y)$ ha de ser una fracción de la unidad, e.d. $\beta(y) + v(x)H(y) \in [0, 1]$. Imaginemos que, conscientes de la paulatina elevación de la temperatura de la Tierra, lo que nos interesa es bajarla hasta $y_d(x)$, la distribución de temperaturas antes de la era industrial. Los controles a introducir han de tomar valores negativos (en otro caso nuestra acción conduciría a un aumento mayor de la temperatura), por lo que supondremos que

$$v(x) \in [-\mu, 0], \quad x \in \mathcal{M} - \mathcal{I}, \quad \text{siendo } \mu = \beta_w - \beta_i. \quad (27)$$

Obsérvese que por el principio fuerte del máximo, podemos suponer que $y(x, t : v) > u_i$ para todo control v y en casi todo punto $(x, t) \in (\mathcal{M} - \mathcal{I}) \times (0, T)$.

Una segunda matización importante a introducir a la conjetura de von Neumann es que los estados deseados no pueden ser arbitrariamente elegidos. Las restricciones en los controles y su peculiar naturaleza afectando tan sólo al

co-albedo tienen obvias limitaciones. Así, en virtud del principio del máximo, dado v verificando (27) necesariamente

$$y(T : -\mu) \leq y(T : v) \leq y(T : 0) \text{ en } \mathcal{M} - \mathcal{I},$$

por lo que si $y(T : v) = y_d$ se llega a la siguiente condición necesaria sobre y_d :

$$y(T : -\mu) \leq y_d \leq y(T : 0) \text{ en } (\mathcal{M} - \mathcal{I}).$$

Nuestro objetivo es obtener una cierta subclase de funciones y_d que “caigan” en el conjunto de alcanzabilidad asociado a ese tipo de controles. Pero antes que nada, observemos que, fijados $\gamma, \delta > 0$, si suponemos que $y_d = u_i$ en Γ , la existencia del control buscado $v(x)$ se reduce a la búsqueda de un punto fijo para la aplicación $v \rightarrow \mathcal{T}v$, donde $(\mathcal{T}v)(x)$ viene dado por

$$\frac{y(T : v) + By(T : v) + C + QS(x)(v(\gamma y(T : v) + \delta) - \beta(y(T : v))) - \Delta y_d}{QS(x)(H(y(T : v)) + \gamma y(T : v) + \delta)}$$

para todo $x \in \mathcal{M} - \mathcal{I}$ puesto que si v es tal punto fijo deduciríamos que $\Delta y_d = \Delta y(T : v)$ con idénticas condiciones de contorno y por tanto $y_d = y(T : v)$ en $\mathcal{M} - \mathcal{I}$. Nótese que una primera razón para introducir los parámetros γ y $\delta > 0$ es la evitar indeterminaciones cuando se anula el denominador de $\mathcal{T}v$. Otra segunda razón es más técnica y se verá más adelante. Supondremos que $\gamma > 0$ se toma suficientemente grande como para que la aplicación $v \rightarrow v(\gamma y(T : v) + \delta) - \beta(y(T : v))$ es no decreciente cuando v verifica (27). Por el principio del máximo, $y(T : v)$ depende de manera monótona de v y por ello basta que

$$\gamma > \frac{\beta_w - \beta_i}{u_w - u_i}. \quad (28)$$

Para mantener positivo el denominador de \mathcal{T} pediremos que

$$\delta > \gamma(-u_i) \quad (29)$$

El resultado que viene a corroborar (aunque sea parcialmente) la conjetura de von Neumann es el siguiente:

Teorema. *Supongamos (28), (29), que el dato inicial $y_0 \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathcal{M} - \mathcal{I}})$ verifica las condiciones de compatibilidad $y_0 = u_i$ en Γ y que*

$$\Delta y_0 - By_0 - C + QS(x)\beta(y_0) \leq 0 \text{ en } \mathcal{M} - \mathcal{I}. \quad (30)$$

Finalmente, sea $y_d \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathcal{M} - \mathcal{I}})$ tal que $y_d = u_i$ en Γ_y

$$\Delta y(T : 0) \leq \Delta y_d \text{ en } \mathcal{M} - \mathcal{I}. \quad (31)$$

$$\Delta y_d \leq \Delta y(T : 0) + QS(x)(\beta_w - \beta_i)(H(y(T : 0)) + \delta) \text{ en } \mathcal{M} - \mathcal{I}. \quad (32)$$

Entonces existe $v \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathcal{M} - \mathcal{I}})$ con $v(x) \in [-\mu, 0]$, $\forall x \in (\mathcal{M} - \mathcal{I})$ tal que $y(T : v) = y_d$ en $\mathcal{M} - \mathcal{I}$.

Idea de la demostración. Comprobemos que el operador \mathcal{T} respeta el orden (aunque invirtiéndolo). Sean $v_1 \leq v_2$. Entonces

$$\begin{aligned} y_{1t} - \Delta y_1 + B y_1 + C &= QS(x)(\beta(y_1) + v_1(x)(H(y_1) + \delta)) \leq \\ &\leq QS(x)(\beta(y_1) + v_2(x)(H(y_1) + \delta)) \end{aligned}$$

y por tanto, gracias a los resultados de comparación de soluciones para la ecuación satisfecha por y_2 , deducimos que $y_1 \leq y_2$ sobre $(\mathcal{M} - \mathcal{I}) \times (0, T)$. Veamos que incluso es posible obtener que $y_{1t} \leq y_{2t}$. Para ello derivamos en la ecuación y se obtiene que

$$y_{1t} - \Delta y_{1t} + B y_{1t} = QS(x)[\beta'(y_1) + v_1(x)H'(y_1)]y_{1t}.$$

Gracias al principio del máximo y a la hipótesis (30) se obtiene que $y_{1t}(t, v) \leq 0$ para todo v y casi para todo $t \in (0, T)$. En consecuencia, como $\beta'(r) + v_1(x)H'(r)$ es decreciente cuando $v(x) \in [-\mu, 0]$ y $r \geq u_i$, deducimos que

$$\begin{aligned} y_{1t} - \Delta y_{1t} + B y_{1t} &= QS(x)[\beta'(y_1) + v_1(x)H'(y_1)]y_{1t} \\ &\leq QS(x)[\beta'(y_2) + v_1(x)H'(y_2)]y_{1t}. \end{aligned}$$

Por otra parte, como $y_{1t} = y_{2t} = 0$ en $\Gamma \times (0, T)$ e $y_{1t}(0, x) \leq y_{2t}(0, x)$ con $x \in \mathcal{M} - \mathcal{I}$, del principio de comparación deducimos que $y_{1t} \leq y_{2t}$ en $(\mathcal{M} - \mathcal{I}) \times (0, T)$. Finalmente, para comprobar que \mathcal{T} es un operador monótono (aunque invierta el orden) basta observar que de las hipótesis (28) y (31) deducimos que

$$\begin{aligned} y_t(T : v) + B y(T : v) + C + QS(x)(v(\gamma y(T : v) + \delta) - \beta(y(T : v))) \\ \leq y_t(T : 0) + B y(T : 0) + C - QS(x)\beta(y(T : 0)) = \Delta y(T : 0) \leq \Delta y_d. \end{aligned}$$

con lo que el numerador de \mathcal{T} es menor o igual que cero y la conclusión se deduce de la hipótesis (28) y de monotonía de $H(y(T : v))$ con respecto a v .

Como (31) implica que $\mathcal{T}(-\mu) \leq 0$ y la hipótesis (32) que $-\mu \leq \mathcal{T}(0)$, se tiene que el "intervalo de funciones" $[-\mu, 0] = \{w \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathcal{M} - \mathcal{I}}) \text{ con } -\mu \leq w(x) \leq 0, \forall x \in \mathcal{M} - \mathcal{I}\}$ es invariante mediante \mathcal{T} , e.d. $\mathcal{T}([- \mu, 0]) \subset [- \mu, 0]$.

Finalmente, la regularidad $L^\infty(0, T : W^{2,p}(\mathcal{M} - \mathcal{I})) \cap H^1(0, T : L^\infty(\mathcal{M} - \mathcal{I}))$, para todo $p > 1$, de la solución implica que \mathcal{T} es relativamente compacto y la conclusión se obtiene por el teorema de punto fijo de Amann [1].■

Observación 1. Resultados de una naturaleza similar, aunque para otro tipo de problemas, son debidos a Choulli [8] y Zeghal [49] (en cuyas referencias se podrá encontrar mención a otros trabajos pioneros en esta dirección). Señalemos también que las iteraciones del operador \mathcal{T} aplicado a $v = 0$ y $v = -\mu$ ofrecen un algoritmo constructivo para obtener un puntos fijo (que puede no ser único).

Observación 2. Nótese que tomando el operador inverso de Laplace (con la condición de contorno como la de (P_r)) en cada uno de los términos de la hipótesis (31) se obtiene que en ese caso, necesariamente,

$$\begin{aligned} y(T : 0) - \theta \leq y_d \leq y(T : 0) \text{ en } (\mathcal{M} - \mathcal{I}), \text{ con} \\ \theta(x) := (\beta_w - \beta_i)(-\Delta)^{-1}[QS(x)(H(y(T : 0)) + \delta)]. \end{aligned}$$

Observación 3. Los resultados anteriores pueden ser extendidos, por distintos argumentos de paso al límite, a la hora de obtener v , para un $\varepsilon > 0$ fijado, de manera que $\|y(T : v_\varepsilon) - y_d\|_{L^2(\mathcal{M} - \mathcal{I})} \leq \varepsilon$.

Referencias

- [1] Amann, H.: Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces. *SIAM Rev.*, **18**, 1976, págs. 620-709.
- [2] Arcoya, D., Díaz, J.I. y Tello, L.: S-Shaped bifurcation branch in a quasi-linear multivalued model arising in Climatology. *Journal of Differential Equations*, **149**, 1998 págs.215-225.
- [3] Bermejo, R., Numerical solution to a two-dimensional diffusive climate model. En el libro "Modelado de Sistemas en Oceanografía, Climatología y Ciencias Medio - ambientales: Aspectos Matemáticos y Numéricos", A. Valle and C.Parés eds., Universidad de Málaga, (1994), 15-30.
- [4] Bermejo, R., Díaz, J.I. y Tello, L.: Artículo en preparación (véase el Apéndice A de [46]).

- [5] Bermejo, R., Díaz, J.I. y Tello, L.: Artículo en preparación.
- [6] Brezis, H., *Operateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [7] Budyko, M.I. : The effects of solar radiation variations on the climate of the Earth, *Tellus*, **21**, 1969, págs. 611-619.
- [8] Choulli, M. ; An inverse problem for a semilinear parabolic equation. *Inverse Problems*, **10**, 1994, págs. 1123-1132.
- [9] Díaz, G. y Díaz, J.I.: On a nonlinear discontinuous stochastic parabolic equation arising in Climatology. Artículo en preparación.
- [10] Díaz, J.I.. Sur la contrôlabilité approchée des inéquations variationnelles et d'autres problèmes paraboliques non linéaires. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris*, **312**, Série I, 1991, págs. 519-522.
- [11] Díaz, J.I.: Mathematical Analysis of some diffusive energy balance climate models. En el libro *Mathematics . Climate and Environment*, eds. J.I. Díaz y J.L. Lions. Masson, Paris. 1993, págs. 28-56.
- [12] Díaz, J.I.: On the controllability of some simple climate models. En *Environment, Economics and their Mathematical Models* J.I. Díaz, J.L. Lions (eds.). Masson, Paris, 1994, págs. 29-44.
- [13] Díaz, J.I.: Controllability and obstruction for some non linear parabolic problems in Climatology. En el libro *Modelado de Sistemas en Oceanografía, Climatología y Ciencias Medio-Ambientales* (C.Pares y A.Valle eds.) Universidad de Málaga, 1994, págs. 43-58.
- [14] Díaz, J.I.: On the Mathematical treatment of Energy Balance Climate Models. En el libro *The Mathematics of Models in Climatology and Environment* (J.I. Díaz, ed) ASI NATO Global Change Series I, n°48, Springer-Verlag, Heidelberg, 1996, págs. 217-252.
- [15] Díaz, J. I., On a free boundary problem arising in Climatology. En *Free Boundary Problems: Theory and Applications*, (Ed. N. Kenmochi), Vol. II, Gakkotosho Co., Tokyo, 2000, págs. 92-109.
- [16] Diaz, J.I., Hernandez, J. y Tello, L., On the multiplicity of equilibrium solutions to a nonlinear diffusion equation on a manifold arising in Climatology, *J. Math. An. Appl.*, **216**, 1997, págs. 593-613
- [17] Díaz, J.I. y Lions, J.L.: *Matemáticas, superordenadores y control para el planeta Tierra*. Editorial Complutense, Madrid, 2001.
- [18] Díaz, J.I. y Ramos, A.M.: Positive and negative approximate controllability results for semilinear parabolic equations. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Nat. de Madrid*, Tomo LXX-XIX 1995, págs. 11-30.
- [19] Díaz, J.I. y Ramos, A. M.: Numerical experiences regarding the localized control of nonlinear parabolic problems. En el CD-Rom *Proceedings of the European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2000)*. Barcelona. 11-14 septiembre 2000.
- [20] Díaz, J.I. y Tello, L. . A nonlinear parabolic problem on a Riemannian manifold without boundary arising in Climatology. *Collect. Math.*, **50**, 1999, págs.19-51.
- [21] Fabre, C., Puel, J.P. and Zuazua, E.: Approximate controllability of the semilinear heat equations, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, Sect. A., **125**, 1995, págs. 31-61.
- [22] Fernández, L.A. y Zuazua, E.: Approximate Controllability of the Semilinear Heat Equation via Optimal Control. Preprint de la Universidad de Cantabria, 1996.
- [23] Filippov, A.F. *Differential equations with discontinuous right hand sides*. Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [24] Ghil, M. y Childress, S. , *Topics in Geophysical Fluid Dynamics: Atmospheric Dynamics. Dynamo Theory and Climate Dynamics*. Nueva York. Springer, 1987.
- [25] Henderson-Sellers, A. y McGuffie, K.. *A Climate Modelling Primer*. John Wiley&Sons, Chichester. Gran Bretaña, 1987. (Versión castellana: *Introducción a los modelos climáticos*, Omega, Barcelona, 1996).
- [26] Held, I.M. y Suarez, M.J., Simple Albedo Feedback models of the ice caps. *Tellus*, **36**, 1974.
- [27] Henry,J.: *Etude de la contrôlabilité de certaines équations paraboliques*. Thèse d'Etat. Université de Paris VI. 1978.
- [28] Hetzer, G., S-Shapedness for Energy Balance Climate Models of Sellers-Type. En el libro *The Mathematics of Models for Climatology and Environment* (editor J. I. Díaz) NATO ASI Series, Springer Verlag, 1997. págs. 253-288.

- [29] Hetzer, G., Jarausch, H. y Mackens, W.: A Multiparameter Sensitivity Analysis of a 2D Diffusive Climate Model. *Impact and Computing in Science and Engineering*, **1**, 1989, págs. 327-393
- [30] Kiehl, J. T.: Atmospheric general circulation modeling, En *Climate System Modeling*, K.E. Trenberth ed., Cambridge University Press, 1992, págs. 319-370.
- [31] Krasnoselskii, M.A. y Pokrovskii, A.V.: *Systems with hysteresis*, Springer, Berlin, 1989.
- [32] Legendre, A.: Recherches sur l'attraction des spheroides. *Mem. des sav. étrangers*, 1785, págs. 411-434.
- [33] Lin, R.Q. and North, G.R.: A study of abrupt climate change in a simple nonlinear climate model. *Climate Dynamics*, **4**, 1990, págs. 253-261.
- [34] Lions, J.L.: *Contrôle Optimal des Systèmes Gouvernés par les Equations aux Dérivées Partielles*, Dunod, Paris, 1968.
- [35] Lions, J.L.: Remarques sur la contrôlabilité approchée. En *Actas de las Jornadas Hispano-Francesas sobre Control de sistemas distribuidos*, Univ. de Málaga, 1991, págs. 43-58.
- [36] Lions, J.L.: Exact controllability for distributed systems. Some trends and some problems. In *Applied and Industrial Mathematics*, R. Sigler (ed.) Kluwer, 1991, págs. 59-84.
- [37] Mengel, J. G., Short, D.A and North, G.R.: Seasonal snowline instability in an energy balance model, *Climate Dynamics*, **2**, 1988, págs. 127-131.
- [38] von Neumann, J. Can we survive Technology?. *Nature*, 1955. (También en *John von Neumann: Collected Works*, Vol VI, Pergamon, 1966.)
- [39] Nirenberg, L., Variational and topological methods in nonlinear problems, *Bull. Amer. math. Soc.*, **4**, 1981, págs. 267-302
- [40] North, G.R.: Introduction to simple climate model. En el libro *Mathematics, climate and environment*, (editores J.I. Diaz, J.L. Lions), Masson, Paris, 1993, págs. 139-159.
- [41] North, G.R., Introduction to simple climate model. En *Mathematics, climate and environment*, (J.I. Diaz, J.L. Lions eds.), Masson, Paris, 1993, págs. 139-159.
- [42] Schneider, S.H. : Introduction to climate models. En el libro *Climate system modelling*, (editor K. E. Trenberth) Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992, págs. 3-26.
- [43] Sellers, W.D.: A global climatic model based on the energy balance of the earth-atmosphere system. *J. Appl. Meteorol.* **8**, 1969, págs. 392-400.
- [44] Simmons, G.F.: *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas*, McGraw-Hill, 1993.
- [45] Stone, P.H.: A simplified radiative-dynamical model for the static stability of rotating atmospheres. *J. Atmos. Sci.*, **29**, 1972, págs. 405-418.
- [46] Tello, L.: *Tratamiento matemático de algunos modelos no lineales en Climatología*, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid, 1996.
- [47] Thom, R., *Structural Stability and Morphogenesis*, Benjamin, 1975).
- [48] Xu, X., Existence and Regularity Theorems for a Free Boundary Problem Governing a Simple Climate Model. *Aplicable Anal.*, **42**, 1991, págs. 33-59.
- [49] Zeghal, A. : Un résultat d'existence pour un problème inverse parabolique quasi linéaire. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **332**, 2001, págs. 909-912.
- [50] Zeidler, E., *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, Volúmenes I-V, Springer-Verlag, Berlín, 1988.

Departamento de Matemática Aplicada
 Facultad de Matemáticas
 Universidad Complutense de Madrid
 28040 Madrid
 e-mail ji.diaz@mat.ucm.es