Los modelos parabólicos de balance de energía acoplando un océano profundo y la superficie atmosférica no siempre admiten solución única.

J.I. Díaz[1] L. Tello[2]

Resumen

En este trabajo se analiza la unicidad de soluciones de un modelo global de clima de balance de energía en el que, siguiendo la propuesta de R.G. Watts y M. Morantine de 1990, el acoplamiento entre un océano profundo y la superficie atmosférica origina una condición de contorno dinámica y difusiva. La existencia de soluciones ya fue abordada en nuestra comunicación al CEDYA 2001.

En primer lugar construimos un contraejemplo a la unicidad cuando la función coalbedo se supone discontinua. A continuación mostramos que se tiene unicidad de soluciones si esa función se supone Lipschitz continua. Finalmente, retomamos el caso discontinuo y mostramos la unicidad de soluciones en una cierta clase de soluciones que denominamos "no degeneradas".

Introducción.

En este trabajo estudiamos la unicidad de soluciones para un modelo climático de tipo de balance de energía que incorpora explícitamente el acoplamiento entre un océano profundo y la superficie atmosférica promediada (en espesor) propuesto inicialmente en Watts y Morantine [6]. La existencia de soluciones débiles ya fue mostrada por nosotros en [3].

El modelo considerado modela la evolución de la temperatura en el interior de un océano "global" de profundidad H así como en su superficie que se supone coincidente con la superficie resultante al promediar en altura la capa atmosférica colindante. Motivados por el trabajo de Stone [5], nuestro modelo incorpora un operador de difusión superficial (que es más adecuado para grandes escalas) de tipo p-Laplaciano. Suponiendo temperatura constante sobre cada paralelo, con el único fin de simplificar la exposición, se toman como variables espaciales (x, z), siendo x el seno de la latitud y $-z$ la profundidad. Así, el dominio espacial se denota por $\Omega = (-1, 1) \times (-H, 0)$ y su contorno, $\Gamma_H \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_{-1}$, siendo $\Gamma_H = \{(x, z) \in \overline{\Omega} : z = -H\}$, $\Gamma_0 = \{(x, z) \in \overline{\Omega} : z = 0\}$, $\Gamma_1 = \{(x, z) \in \overline{\Omega} : x = 1\}$ y $\Gamma_{-1} = \{(x, z) \in \overline{\Omega} : x = -1\}$. El sistema obtenido (que denotaremos por (P)) es el siguiente:

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{K_H}{R^2}\frac{\partial}{\partial x}((1-x^2)\frac{\partial U}{\partial x}) - K_v\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + w\frac{\partial U}{\partial z} & = 0 & \text{en } (0,T)\times\Omega, \\
wx\frac{\partial U}{\partial x} + K_V\frac{\partial U}{\partial z} & = 0 & \text{en } (0,T)\times\Gamma_H \\
D\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{DK_{H_0}}{R^2}\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)^{\frac{p}{2}}|\frac{\partial U}{\partial x}|^{p-2}\frac{\partial U}{\partial x}\right) + & & \\
+ K_V\frac{\partial U}{\partial n} + wx\frac{\partial U}{\partial x} + Bu + C & = \frac{1}{\rho c}QS(x)\beta(x,u) & \text{en } (0,T)\times\Gamma_0 \\
(1-x^2)^{\frac{p}{2}}|\frac{\partial U}{\partial x}|^{p-2}\frac{\partial U}{\partial x} & = 0 & \text{en } \Gamma_1\cup\Gamma_{-1} \\
U(0,x,z) = U_0(x,z) & & \text{en } \Omega, \\
U(0,x,0) = u_0(x) & & \text{en } (-1,1),
\end{array}
\right.
$$

siendo $BU + C$ la radiación emitida por la superficie al exterior, K_V la difusividad térmica vertical en el interior del océano, K_H la difusividad térmica horizontal en el interior del océano, K_{H_0} la difusividad térmica horizontal en la capa mixta, w velocidad vertical, R el radio de la Tierra, H la profundidad del océano (supuesta constante) y Q la constante solar.

Analizaremos la unicidad o no unicidad de solución de (P) bajo las siguientes hipótesis estructurales,

(H_β) β es un grafo maximal monótono acotado, es decir, $|v| \leq M \quad \forall v \in \beta(s)$, $\forall s \in D(\beta) = \mathbb{R}$,

($\mathrm{H}_{B,C,p}$) B y C son constantes estrictamente positivas y $p \geq 2$,

(H_S) $S : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $s_1 \geq S(x) \geq s_0 > 0$ a.e. $x \in (-1,1)$,

(H_w) $w \in C^1(\overline{\Omega})$ (por simplicidad).

Diremos que $(U,u) \in L^2(0,T : W^{1,2}(\Omega)\times W^{1,p}(\Gamma_0)) \cap W^{1,2}(0,T : L^2(\Omega)\times L^p(\Gamma_0))$ es solución de (P) si $U_{|\Gamma_0} = u$ y $\forall(\psi,\zeta)$ funciones test en $L^2(0,T : W^{1,2}(\Omega)\times W^{1,p}(\Gamma_0)) \cap W^{1,2}(0,T : L^2(\Omega)\times L^p(\Gamma_0))$ se verifica

$$
\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial U}{\partial t}\psi dAdt + \int_0^T\int_\Omega \frac{K_H}{R^2}(1-x^2)\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}dAdt + \int_0^T\int_\Omega K_v\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}dAdt +
$$
$$
+ \int_0^T\int_\Omega w\frac{\partial U}{\partial z}\psi dAdt
$$

$$
-\int_0^T\int_{-1}^1 wx\frac{\partial U}{\partial x}(x,-H)\psi(x,-H)dxdt - \int_0^T\int_{-1}^1 K_v\frac{\partial U}{\partial z}(x,0)\psi(x,0)dxdt = 0,
$$

$$
\int_0^T\int_{-1}^1 D\frac{\partial u}{\partial t}\zeta dxdt + \int_0^T\int_{-1}^1 \frac{DK_{H_0}}{R^2}(1-x^2)^{\frac{p}{2}}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{\frac{p}{2}}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x} +
$$
$$
+ \int_0^T\int_{-1}^1 K_v\frac{\partial u}{\partial z}(x,0)\zeta dxdt + \int_0^T\int_{-1}^1 wx\frac{\partial u}{\partial x}\zeta dxdt + \int_0^T\int_{-1}^1 (Bu+C)\zeta dxdt
$$

$$= \int_0^T \int_{-1}^1 \frac{1}{\rho c} QS(x)h\zeta dxdt.$$

para algún $h \in L^\infty(0, T : L^\infty(\Gamma_0))$, $h \in \beta(\cdot, u)$.

Un resultado de existencia de soluciones fue ofrecido en Díaz-Tello [3] mediante técnicas de punto fijo.

Un resultado de no unicidad para coalbedos discontinuos

Comenzaremos por mostrar que cuando la función coalbedo es discontinua en el nivel -10 (o, con más precisión, un grafo multivaluado en el nivel -10) entonces, para datos iniciales (U_0, u_0) con adecuado comportamiento en el nivel -10, existen, al menos, dos soluciones del problema de evolución (P). La hipótesis crucial de esta sección es que β es un grafo de tipo Heaviside tal que

$$\beta(u) = \begin{cases} [m, M] \text{ si } u = -10, \\ m \text{ si } u < -10 \text{ y} \\ \beta(u) = M \text{ si } u > -10, \text{ siendo } 0 < m < M. \end{cases} \tag{1}$$

También supondremos una condición técnica que se cumple en las principales aplicaciones:

$$-10B + C > \frac{Qs_1 m}{\rho c}. \tag{2}$$

Inspirados en Díaz [1] (relativo al caso en el que la temperatura superficial u no está acoplada con la temperatura en el interior del océano), construiremos dos soluciones distintas considerando un dato inicial u_0 que en el nivel -10 tiene derivada nula de primer y segundo orden.

En concreto, consideraremos datos iniciales (U_0, u_0) que verifican las siguientes hipótesis,

$$(H_0) \begin{cases} (U_0, u_0) \in C^\infty(\Omega) \times C^\infty(\Gamma_0), u_0(x) = u_0(-x) \text{ para todo } x \in [-1, 1], \\ \dfrac{du_0}{dx}(0) = \dfrac{d^2u_0}{dx^2}(0) = 0, \ u_0(0) = -10, \\ \dfrac{du_0}{dx}(x) < 0 \text{ si } x \in (0, 1), \dfrac{du_0}{dx}(1) = 0, \\ \dfrac{\partial U_0}{\partial z}(x, 0) > 0, \ U_0(x, 0) = u_0(x), \text{ si } x \in (0, 1). \end{cases}$$

Supondremos también que

$$w(x) \leq 0 \text{ para todo } x \in (-1, 1).$$

Teorema 1 *Bajo las anteriores condiciones, el problema (P) posee al menos dos soluciones débiles acotadas.*

Demostración. Dividiremos la demostración en dos etapas.

Etapa 1: Veamos que el problema (P) con dato inicial verificando (H_0) posee una solución que en Γ_0 es menor o igual que -10. Para ello, consideraremos el problema (P_m) obtenido al sustituir en (P) el grafo β por su cota inferior m y denotemos por (U^m, u^m) a la solución de dicho problema (que en ese caso es única pues no hay términos "de tipo fuente" la demostración detallada sigue paralela a la que se ofrecerá más adelante para el caso de β Lipschitz continua). Nótese que si $u^m \leq -10$ entonces (U^m, u^m) es también solución de (P) pues podemos tomar $h(x,t) \equiv m$.

Haciendo el cambio $U^* = -10 - U^m$ y $u^* = -10 - u^m$, vemos que la nueva función u^* verifica

$$Du_t^* - \frac{DK_{H_0}}{R^2}((1-x^2)|u_x^*|^{p-2}u_x^*)_x + Bu^* = -\frac{QSm}{\rho c} - 10B + C - K_V\frac{\partial U^*}{\partial n} - wx\frac{\partial u^*}{\partial x}.$$

Observamos que por las hipótesis (H_0) y (2), existe $T_0 > 0$ tal que si $t < T_0$ entonces el término de la derecha es positivo. Así, como consecuencia de la monotonía del operador p-Laplaciano con peso (véase Díaz [1]) tenemos que $u^* = -10 - u^m$ es positiva y, como en [1], por el principio fuerte del máximo aplicado a la segunda ecuación deducimos que, de hecho, $u^m < -10$ (nótese que $K_V\frac{\partial U}{\partial n} + wx\frac{\partial U}{\partial x} \leq 0$ en $(0, T_0) \times \Gamma_0$ al menos para $T_0 > 0$ suficientemente pequeño).

Etapa 2: Veamos ahora que existe una segunda solución tal que su segunda componente, u, alcanza valores superiores a -10 en un conjunto de medida positiva. Para ello, construimos una familia auxiliar de funciones U^λ (y sus restricciones $U^\lambda_{|\Gamma_0} = u^\lambda$) como se detalla a continuación.

Se considera el dominio espacio temporal $\Omega \times [0, \lambda]$ que expresamos como unión de dos regiones no cilíndricas Q_1^λ y Q_2^λ, y de la superficie que las separa, Σ^λ, definidas como

$$Q_1^\lambda = \{(x,z,t) \in \Omega \times [0,\lambda] : \ x^2 + z^2 > \frac{t^2}{\lambda^2}\},$$

$$Q_2^\lambda = \{(x,z,t) \in \Omega \times [0,\lambda] : \ x^2 + z^2 < \frac{t^2}{\lambda^2}\},$$

$$\Sigma^\lambda = \{(x,z,t) \in \Omega \times [0,\lambda] : \ x^2 + z^2 = \frac{t^2}{\lambda^2}\}.$$

Sea (U^λ, u^λ) la solución del problema $(P_{Q_1^\lambda})$ obtenido al sustituir en (P) el grafo β por m y $\Omega \times (0,T)$ por Q_1^λ. Al considerar este nuevo dominio espacio temporal no cilíndrico necesitamos añadir una condición sobre Σ^λ para que éste quede bien planteado:

$$U^\lambda = -10 \quad \text{en } \Sigma^\lambda. \tag{3}$$

En la región Q_2^λ, definimos

$$U^\lambda = -10 - C^\lambda(t)(x^2 + z^2 - \frac{t^2}{\lambda^2}). \tag{4}$$

Nótese que si C^λ es positiva entonces $U^\lambda > -10$ en Q_2^λ.

Es fácil ver que (U^λ, u^λ) es solución del problema (P_λ) dado por

$$\left\{\begin{array}{rll} \frac{\partial U}{\partial t}-\frac{K_H}{R^2}\frac{\partial}{\partial x}((1-x^2)\frac{\partial U}{\partial x})-K_v\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+w\frac{\partial U}{\partial z} & = H^\lambda & \text{en } (0,T)\times\Omega, \\ wx\frac{\partial U}{\partial x}+K_V\frac{\partial U}{\partial z} & = g^\lambda & \text{en } (0,T)\times\Gamma_H \\ D\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{DK_{H_0}}{R^2}\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)^{\frac{p}{2}}|\frac{\partial U}{\partial x}|^{p-2}\frac{\partial U}{\partial x}\right)+ & & \\ +K_V\frac{\partial U}{\partial n}+wx\frac{\partial U}{\partial x}+Bu+C & = h^\lambda & \text{en } (0,T)\times\Gamma_0 \\ (1-x^2)^{\frac{p}{2}}|\frac{\partial U}{\partial x}|^{p-2}\frac{\partial U}{\partial x} & = 0 & \text{en } (0,T)\times(\Gamma_1\cup\Gamma_{-1}) \\ U(0,x,z)=U_0(x,z) & & \text{en } \Omega, \\ U(0,x,0)=u_0(x) & & \text{en } (-1,1), \end{array}\right.$$

siendo

$$H^\lambda=-(C^\lambda)'(t)(x^2+z^2-\frac{t^2}{\lambda^2})-C^\lambda(t)[(\frac{-2t}{\lambda^2})-\frac{2K_H}{R^2}(1-3x^2)-2K_v+2wz], \quad (5)$$

para $(t,x,z)\in\mathcal{Q}_2^\lambda$, y con

$$\begin{aligned} h^\lambda &= -D(C^\lambda)'(t)(x^2-\frac{t^2}{\lambda^2})-C^\lambda(t)[-\frac{2Dt}{\lambda^2}+2wx^2+B(x^2-\frac{t^2}{\lambda^2}) \\ &\quad -2^{p-1}\frac{DK_{H_0}}{R^2}|C^\lambda(t)|^{p-2}(-p(1-x^2)^{\frac{p-2}{2}}|x|^p+(p-1)(1-x^2)^{\frac{p}{2}}|x|^{p-2}]-10B+C), \end{aligned}$$

y, $g^\lambda=-2C^\lambda(t)(x^2w-K_vH)\geq 0$.
Como en [1], esto muestra que podemos tomar $\lambda>0$ y $C^\lambda:[0,T_0]\to I\!R$ tales que (U^λ,u^λ) es subsolución de (P) y, por tanto, por el método de super y subsoluciones aplicado a nuestro sistema, deducimos que existe una solución (V,v) de (P) tal que $u^\lambda<v$, y , en consecuencia, $v>-10$ en algún subconjunto con medida positiva. Obviamente, la solución (V,v) es distinta de la solución obtenida en la etapa 1 y así hemos construido dos soluciones distintas de (P) para un mismo dato inicial (verificando (H_0)).

Criterios de unicidad.

En contraste con la sección anterior, obtendremos ahora dos criterios distintos de unicidad de soluciones para el problema (P). El primero de ellos requerirá hipótesis de regularidad Lipschitciana sobre la función coalbedo β que aparece en la condición de contorno. El segundo se referirá de nuevo al caso de una función coalbedo β discontinua pero pediremos condiciones de *no degeneración en el nivel* -10 sobre la solución.

Teorema 2 *Sean $U_0\in L^\infty(\Omega)$, $u_0\in L^\infty(\Gamma_0)$ y $\beta:\Gamma_0\times I\!R\to I\!R$ Lipschitz continua en u, (es decir, existe $C_L\in C(\overline{\Omega})$ estrictamente positiva tal que $|\beta(x,s)-\beta(x,\hat{s})|\leq C_L(x)|s-\hat{s}|$). Entonces la solución de (P) es única.*

Demostración. Supongamos que existen dos soluciones (U,u) y $(V.v)$. Entonces

$$\int_0^T\int_\Omega\left(\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial V}{\partial t}\right)(U-V)\,dAdt+\int_0^T\int_0^1 D\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial v}{\partial t}\right)(u-v)\,dxdt+$$

$$\int_0^T\int_\Omega \frac{K_H}{R^2}(1-x^2)\left|\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial x}\right|^2 dAdt+\int_0^T\int_\Omega K_v\left|\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial V}{\partial z}\right|^2 dAdt+$$
$$+\int_0^T\int_{-1}^1 \frac{DK_{H_0}}{R^2}(1-x^2)^{\frac{p}{2}}\left|\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}\right|^p dxdt+\int_0^T\int_\Omega w\left(\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial V}{\partial z}\right)(U-V)\,dAdt+$$

$$\int_0^T\int_{-1}^1 wx\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{|\Gamma_0}(u-v)_{|\Gamma_0}\,dxdt+\int_0^T\int_{-1}^1 B|u-v|^2dxdt=$$

$$\int_0^T\int_{-1}^1 wx\left(\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{|\Gamma_H}(U-V)\,dxdt+\int_0^T\int_{-1}^1 \frac{QS(x)}{\rho c}(\beta(x,u)-\beta(x,v))(u-v)dxdt.$$

Como β es Lipschitz continua, la expresión anterior queda mayorada por

$$\int_0^T\int_{-1}^1 wx\left(\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{|\Gamma_H}(U-V)_{|\Gamma_H}\,dxdt+\int_0^T\int_{-1}^1 \frac{\|C_L\|_\infty}{\rho c}Q||S||_\infty|u-v|^2dxdt.$$

Aplicando las desigualdades de Holder, Young y Friedrich obtenemos la expresión

$$\frac{\partial}{\partial t}\|U-V\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\partial}{\partial t}\|u-v\|^2_{L^2(\Gamma_0)}\leq K_1\|U-V\|^2_{L^2(\Omega)}+K_2\|u-v\|^2_{L^2(\Gamma_0)},$$

por lo que, aplicando el lema de Gronwall, concluimos que $\|U-V\|_{L^2(\Omega)}=0$ y $\|u-v\|_{L^2(\Gamma_0)}=0$, y por tanto la unicidad de soluciones.

A continuación daremos un criterio de unicidad que permite que β no sea una función Lipschitz continua pero restringiendo la clase de soluciones. Recordemos que en [1] y [2] se dió ya un criterio de unicidad (para el problema escalar sin acoplar) cuando β era un grafo maximal monótono acotado y multivaluado para el modelo unidimensional y el modelo bidimensional (con dominio espacial una variedad que simula la superficie terrestre), bajo hipótesis allí denominadas de "no degeneración". El objeto de esta sección es mostrar que esos criterios se pueden extender al modelo acoplado (P).

Comenzamos introduciendo la noción *de no degeneración en* Γ_0.

Definición. *Diremos que una función $w\in L^\infty(\Gamma_0)$ satisface la propiedad de no-degeneración fuerte (resp. débil) si existe $C>0$ y $\epsilon_0>0$ tales que para cada $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$*

$$|\{x\in\Gamma_0:|w(x)+10|\leq\epsilon\}|\leq C\epsilon$$

(resp. $|\{x\in\Gamma_0:0<|w(x)+10|\leq\epsilon\}|\leq C\epsilon$).

Teorema 3

(i) Si existe una solución (U,u) de (P) tal que $u(t)$ verifica la propiedad de no degeneración fuerte para cada $t\in[0,T]$ entonces (U,u) es la única solución débil acotada de (P);

(ii) existe a lo sumo una solución de (P) que verifica la propiedad de no-degeneración débil.

La demostración se basa en la idea de que aunque β es discontinua genera un operador continuo de $L^\infty(\Gamma_0)$ en $L^q(\Gamma_0)$ $\forall q \in [1, \infty)$ cuando se toma como su dominio el conjunto de funciones que verifican la propiedad de no degeneración fuerte. Más concretamente, para estimar la diferencia de dos posibles soluciones $(U - V, u - v)$ utilizamos el siguiente

Lema.

(i) *Sean $w, \hat{w} \in L^\infty(\Gamma_0)$ y supongamos que w satisface la propiedad de no degeneración fuerte. Entonces para cada $q \in [1, \infty)$ existe $\tilde{C} > 0$ tal que para cada $z, \hat{z} \in L^\infty(\Gamma_0)$ con $z(x) \in \beta(w(x))$ y $\hat{z}(x) \in \beta(\hat{w}(x))$ c$\forall$ $x \in \Gamma_0$, se tiene*

$$\| z - \hat{z} \|_{L^q(\Gamma_0)} \leq (b_w - b_i) \min\{\tilde{C} \| w - \hat{w} \|_{L^\infty(\Gamma_0)}^{(p-1)/q} \ , \ |2|^{1/q}\}. \tag{6}$$

(ii) Si $w, \hat{w} \in L^\infty(\Gamma_0)$ y satisfacen la propiedad de no-degeneración débil entonces

$$\int_{\Gamma_0} (z(x) - \hat{z}(x))(w(x) - \hat{w}(x))dA \leq (b_w - b_i)C \| w - \hat{w} \|_{L^\infty(\Gamma_0)}^p . \tag{7}$$

La demostración del Teorema 3 (que detallaremos en una publicación futura) se obtiene ahora estimando las constantes del lema anterior y las que aparecen en las inclusiones de $W^{1,p}(\Gamma_0) \hookrightarrow L^\infty(\Gamma_0)$ tras un cambio de escala realizado en (P) similar al introducido en [1] (véase también [2]) pero aplicando, en este caso, de manera fundamental, la desigualdad de Friedrich.

Observación 1. Los resultados de este trabajo pueden ser adaptados sin dificultad a otros problemas de formulación distinta (y aparentemente más simple) en los que la no linealidad β que aparece en la condición de contorno, no es Lipschitz continua y tiene naturaleza de "término fuente". Tal es el ejemplo del sencillo problema escalar

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } (0,T) \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \in \beta(u) & \text{sobre } (0,T) \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{sobre } \Omega. \end{cases}$$

Problemas de esta naturaleza aparecen en la teoria de la combustión e ingeniería química.

Referencias

[1] J.I. Díaz, "Mathematical analysis of some diffusive energy balance climate models", in the book *Mathematics, Climate and Environment*, (J.I. Díaz and J.L. Lions, eds.) Masson, Paris, (1993) 28-56.

[2] J.I. Díaz, L. Tello, "A nonlinear parabolic problem on a Riemannian manifold without boundary arising in Climatology", *Collectanea Mathematica*, **50**, 1, (1999), 19-51.

[3] J.I. Díaz, L. Tello, "Sobre un modelo climatico de balance de energia superficial acoplado con un oceano profundo", *Actas del XVII CEDYA/ VI CMA*, (2001).

[4] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type,* Prentice-Hall, Englewood (New Jersey), 1964.

[5] P.H. Stone, "A simplified radiative - dynamical model for the static stability of rotating atmospheres", *Journal of the Atmospheric Sciences,* **29**, No. 3, 405-418 (1972).

[6] R.G. Watts, M. Morantine, "Rapid climatic change and the deep ocean", *Climatic Change* , **16**, (1990) 83-97.

1 Dept. Matemática Aplicada. Universidad Complutense de Madrid. Avda. Complutense s.n. 28040 Madrid. (Proyecto DGES REN2000-0766).

2 Dept. Matemática Aplicada. E.T.S. Arquitectura. Univ. Politécnica de Madrid. Avda. Juan de Herrera 4. 28040 Madrid. (Proyecto DGES REN2000-0766).