

# Bifurcación de soluciones para ciertos problemas elípticos singulares unidimensionales semejantes a los de las catenarias y superficies mínimas de revolución

J.I. Díaz<sup>1</sup>

M<sup>a</sup>. C. Navarro<sup>2</sup>

## Abstract

Analizamos el número de soluciones de una ecuación elíptica cuasilinear singular unidimensional donde el parámetro de bifurcación es el valor en uno de los extremos del intervalo. Resultados de este tipo aparecen en problemas clásicos del Cálculo de Variaciones tales como el estudio de catenarias, superficies mínimas de revolución etc. Nuestra técnica de demostración es enteramente diferente y se basa en la caracterización de las soluciones mediante adecuadas integrales implícitas.

## Introducción

En esta nota mostramos la existencia de soluciones y analizamos su multiplicidad según el parámetro  $\lambda$  para el problema

$$\begin{cases} g'(u_x)_x = H(u)(g(u_x) - g'(u_x)u_x) & \text{en } (0, l), \\ u(0) = u_0, \quad u(l) = \lambda, \end{cases}$$

bajo ciertas condiciones que detallaremos en la sección siguiente. Un ejemplo de  $g$  y  $H$  que verifican esas condiciones conduce a la ecuación singular

$$(|u_x|^{p-2} u_x)_x = \frac{1}{u} |u_x|^p$$

para un  $p > 1$  dado. La idea principal de la demostración consistirá en analizar la ecuación de Euler-Lagrange para el funcional

$$J(u) = \int_0^l f(u(x))g(u_x(x))dx \tag{1}$$

sobre  $X = \{u \in C^1(0, l) \cap C^0[0, l] : u(0) = u_0, u(l) = \lambda\}$  con  $f(u)$  relacionada con  $H(u)$  mediante la condición  $H(r) = \frac{f'(r)}{f(r)}$ .

Nuestro estudio es aparentemente cercano a algunos resultados clásicos del Cálculo de Variaciones. Así, el estudio del equilibrio elástico de catenarias, superficies mínimas de revolución y braquistócronas conduce al estudio del funcional (1) cuando  $g(s) = \sqrt{1+s^2}$  y  $f(u) = u^\alpha$  con  $\alpha = -1/2$  (caso de la braquistocrona) y  $\alpha = 1$  (caso de la catenarias y de la superficies mínimas de revolución): véase, por ejemplo, [8], p. 362 y 299 respectivamente. En el caso de la catenaria y de las superficies mínimas de revolución se obtiene la ecuación singular

$$\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+(u_x)^2}}\right)_x = \frac{1}{u\sqrt{1+(u_x)^2}}. \quad (2)$$

La ecuación (2) también aparece en el estudio de los llamados “puentes líquidos” y las experiencias en naves espaciales para reproducir la ausencia de gravedad (véase, por ejemplo, [10], [5] y su bibliografía). Sin embargo, no seguiremos los métodos clásicos del Cálculo de Variaciones (típicamente, la teoría de puntos conjugados de C.G.J. Jacobi, de 1837 [9]) dado que, entre otras cosas, no pediremos la condición estricta de Legendre (que en nuestro caso equivaldría a pedir que  $g''(s) > 0 \forall s \in \mathbb{R}$ ). En su lugar, aplicaremos una metodología introducida en [1] y [4] para el estudio de la frontera libre asociada a problemas asociados a otro tipo de ecuaciones cuasilineales (véase, por ejemplo, [3] y [2]).

En el caso de las catenarias existen unos resultados debidos a E.L. Lindelof de 1861 ([11]) sobre el número de catenarias posibles capaces de unir dos puntos del plano  $P_1$  y  $P_2$  (uno de ellos fijo,  $P_1$ , y el otro,  $P_2$ , arbitrario). Tales resultados conducen a diagramas de bifurcación muy similares a los que se conocen para el número de soluciones de ciertas ecuaciones en derivadas parciales semilineales de tipo elíptico. Ahora el parámetro de bifurcación lo constituye la segunda coordenada de  $P_2$  ( $P_2 = (l, \lambda)$  con  $l > 0$  fijo y  $\lambda \geq 0$ ). En nuestro caso mostraremos la existencia de dos soluciones. Mostramos también que la parte creciente de dicho diagrama de bifurcación corresponde a las soluciones estables, mientras que la parte decreciente corresponde a soluciones inestables.

## Bifurcación para una ecuación cuasilineal singular

Consideramos el problema

$$(P_\lambda) \begin{cases} g'(u_x)_x = H(u)(g(u_x) - g'(u_x)u_x) & \text{en } (0, l) \\ u(0) = u_0, u(l) = \lambda \end{cases}$$

con  $u_0, l > 0, \lambda \in [0, u_0]$  y bajo las siguientes hipótesis estructurales:

$$g''(s) > 0, g'(s) > 0, g(-s) = g(s) \forall s > 0 \text{ y } g(0) \geq 0, \quad (3)$$

$$\text{sign}(H(r)) = \text{sign}(g(s) - sg'(s)), \forall r, s > 0, \quad (4)$$

$$\begin{cases} \exists f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ de clase } C^1(0, +\infty) \text{ tal que} \\ H(r) = \frac{f'(r)}{f(r)}, f(r) > 0 \text{ si } r > 0. \end{cases} \quad (5)$$

**Observación 1.** Nótese que las condiciones (4) y (5) indican una monotonía estricta para la función  $f(r)$ . Así, si  $\text{sign}(H(r)) = 1$  entonces necesariamente  $f'(r) > 0$  mientras que si  $\text{sign}(H(r)) = -1$   $f'(r) < 0 \forall r > 0$ .

**Ejemplo 1.** La ecuación que aparece en el estudio de catenarias y superficies mínimas de revolución corresponde a  $g(s) = \sqrt{1+s^2}$ . Por tanto,  $g'(s) = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$  y  $g(s) - sg'(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} > 0$  con lo que se ha de tener que  $\text{sign}(H(r)) = 1$  (tal es el caso, p.e., de  $H(u) = \frac{\alpha}{u}$ , y, entonces,  $f(r) = r^\alpha$ , con  $\alpha > 0$ ).

**Ejemplo 2.** Si  $g(s) = \frac{1}{2}s^2$  entonces  $g(s) - sg'(s) = -\frac{1}{2}s^2$ . Más en general, si,  $g(s) = \frac{1}{p}|s|^p$  con  $p > 1$  se obtiene que  $g(s) - sg'(s) = -\frac{1}{p'}|s|^{p'}$  (con  $p' = \frac{p}{p-1}$ ) con lo que se ha de tener que  $\text{sign}(H(r)) = -1$  (tal es el caso, p.e., de  $H(u) = \frac{-q}{u}$ , y, entonces,  $f(r) = r^{-q}$ , con  $q > 0$ ). Nótese que la ecuación resultante es  $(|u_x|^{p-2} u_x)_x = \frac{q}{u} |u_x|^p$ .

En nuestro tratamiento necesitaremos la función auxiliar

$$A(s) := sg'(s) - g(s).$$

Nótese que  $A'(s) = sg''(s)$  por lo que  $A$  es estrictamente creciente en  $(0, +\infty)$  (respectivamente decreciente en  $(-\infty, 0)$ ) en virtud de (3). Además,  $A(-s) = -sg'(-s) - g(-s) = A(s)$  si  $s > 0$ . Por tanto, a la hora de invertir la función  $A$  podemos conectar ambas ramas mediante la identidad  $(A^{-1})_-(s) = -(A^{-1})_+(-s)$  si  $s < 0$ . Obsérvese también que en el Ejemplo 1 se tiene que las ramas de  $A^{-1}$  están definidas sólo en  $[-1, 0)$  mientras que en el Ejemplo 2  $(A^{-1})_+(s) = (p's)^{1/p}$  que está definida  $\forall s \geq 0$ . En lo que sigue identificaremos la rama positiva  $(A^{-1})_+$  con  $A^{-1}$  si no hay confusión posible. Se tiene que

$$A(\mathbb{R}) = [r_A, R_A) \text{ con } -\infty < r_A < R_A \leq +\infty. \quad (6)$$

En el caso del Ejemplo 1 se tiene que  $r_A = -1$  y  $R_A = 0$ , y en el del Ejemplo 2,  $r_A = 0$  y  $R_A = +\infty$ .

**Teorema 1** *Supongamos (3), (4), (5). Supongamos que se dan uno de los dos siguientes casos:*

i)  $g(s) = \sqrt{1+s^2}$  y  $f(r) = r^\alpha$ , con  $\alpha > 0$ ,

o

ii)  $\text{sign}(g(s) - sg'(s)) = -1$ ,  $f(0) = +\infty$ ,  $r_A = 0$ ,  $R_A = +\infty$  y para todo  $\lambda \geq 0$  y  $\tau, c > 0$

$$\begin{cases} \int_\lambda^\tau \frac{ds}{A^{-1}(\frac{c}{f(s)})} = I_\lambda(c) < +\infty, I_\lambda(c) \text{ es decreciente en } c, \\ I_\lambda(c) \searrow 0 \text{ si } c \nearrow +\infty \text{ e } I_\lambda(c) \nearrow +\infty \text{ si } c \searrow 0. \end{cases} \quad (7)$$

Entonces,  $\forall l \geq 0$  existe un  $\lambda_0 = \lambda_0(l) \geq 0$  tal que si  $\lambda \in [0, \lambda_0)$  el problema  $(P_\lambda)$  no tiene solución, si  $\lambda = \lambda_0$   $(P_\lambda)$  tiene una única solución y si  $\lambda \in (\lambda_0, +\infty)$  existen exactamente dos soluciones (con  $\{u(x)=0\}$  de medida nula). Todas las soluciones son puntos estacionarios en  $X = \{u \in C^1(0, l) \cap C^0[0, l] : u(0) = u_0, u(l) = \lambda\}$  del funcional

$$J(u) = \int_0^l f(u(x))g(u_x(x))dx.$$

Además, en el caso i) se tiene que  $\lambda_0 \in C^1([0, u_0))$ ,  $\lambda_0(0) = 0$  y  $\lambda_0'(l) > 0$  si  $l > 0$ . En el caso ii)  $\lambda_0(l) = 0$  para todo  $l > 0$ .

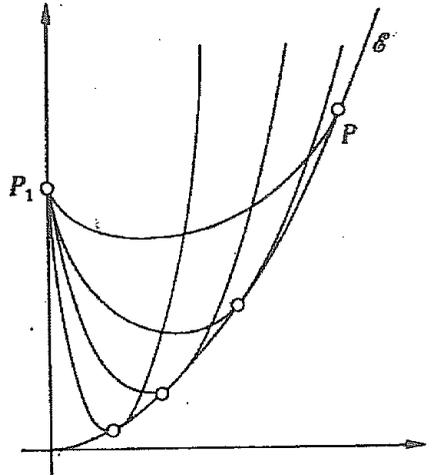


Figura 1. Familia de catenarias y su envolvente

**Observación 2.** En el caso del Ejemplo 2, y si  $f(r) = r^{-q}$ , la condición (7) se tiene si  $0 < q < p$ . Parece posible extender la conclusión del caso ii) a casos en los que la hipótesis (3) es reemplazada por

$$g''(s) > 0, g'(s) < 0, g(-s) = g(s) \forall s > 0 \text{ y } g(0) \geq 0. \quad (8)$$

Nótese que en ese caso  $\text{sign}(g(s) - sg'(s)) = 1$  y por tanto, las hipótesis (4) y (5) obligan a que  $f'(r) > 0$ . Un ejemplo de esta situación corresponde al caso concreto de  $g(s) = s^{-2}$  y  $f(r) = r$  (nótese la similitud con el llamado "problema de Newton" y aparece tratado en [6] p. 372).

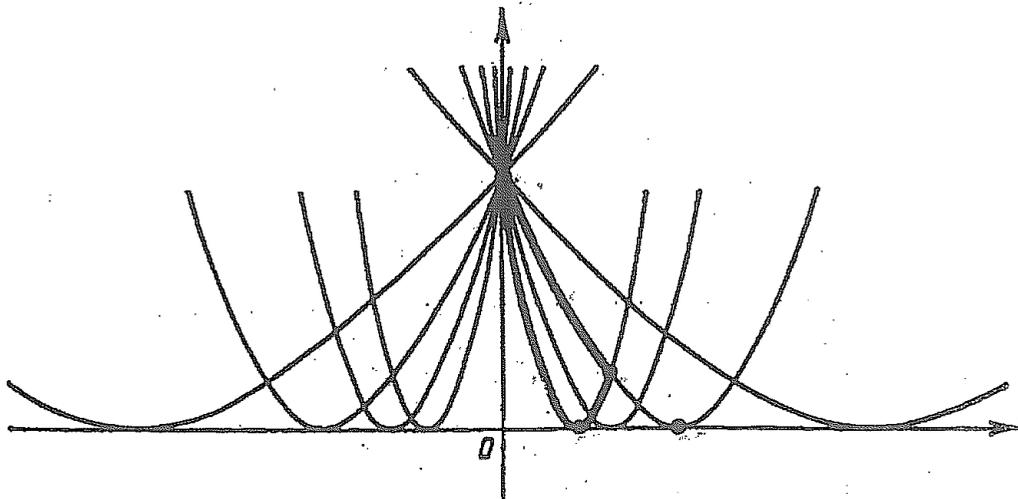


Figura 2. Familia de soluciones y su envolvente para el ejemplo de la Observación 2.

*Demostración.* La demostración del caso i) es una simple reformulación de los resultados de [8] (Proposition 2, Chapter 5, y pp. 305 y 308). De hecho, en la p. 308 de esa referencia se menciona una extensión, atribuida a Funk [7], a funciones  $f(r)$  más generales. En la fecha en la que escribimos este manuscrito no hemos podido acceder a esa referencia). La curva  $\lambda_0(l)$  viene dada como la envolvente de una familia uniparamétrica de curvas.

Con respecto a la demostración del caso ii), observemos que la ecuación de Euler-Lagrange asociada a todo punto estacionario del funcional  $J$  es

$$(f(u)g'(u_x))_x = f'(u)g(u_x)$$

con lo que, por la hipótesis (5), coincide con la ecuación diferencial de  $(P_\lambda)$ . Además, como la función Lagrangiana  $L(u, p) := f(u)g(p)$  no depende de  $x$ , sabemos (véase, por ejemplo, [8] p.24) que multiplicando por  $u_x$ , la expresión resultante es la derivada de  $u_x \frac{d}{dp} L(u, u_x) - L(u, u_x)$  y por tanto existe una constante  $c$  tal que

$$u_x \frac{d}{dp} L(u, u_x) - L(u, u_x) = c.$$

En nuestro caso, esto equivale a que

$$g'(u_x)u_x - g(u_x) = \frac{c}{f(u)}.$$

Por tanto, deducimos que necesariamente  $c > 0$ . Como por otra parte toda solución (estrictamente positiva) de  $(P_\lambda)$  ha de ser convexa, pues

$$u_{xx} = \frac{H(u)}{g''(u_x)}(g(u_x) - g'(u_x)u_x),$$

de la hipótesis (4), deducimos que necesariamente  $u_x < 0$  en un entorno de  $x = 0$ . Por tanto

$$u_x = -A^{-1}\left(\frac{c}{f(u)}\right). \quad (9)$$

Además, como (9) es "de variables separables" se tiene que  $u(x)$  viene dada implícitamente por la identidad

$$\int_{u_0}^{u(x)} \frac{ds}{A^{-1}\left(\frac{c}{f(s)}\right)} = -x \quad (10)$$

al menos mientras  $u_x(x) < 0$ . Gracias a la hipótesis (7) podemos definir la función  $\psi_c : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  mediante

$$\psi_c(\tau) = \int_0^\tau \frac{ds}{A^{-1}\left(\frac{c}{f(s)}\right)}.$$

Así, la relación implícita (10) equivale a la identidad

$$\psi_c(u(x)) - \psi_c(u_0) = -x. \quad (11)$$

Dado que  $\psi_c$  es estrictamente creciente en  $(0, +\infty)$ , pues

$$\psi'_c(\tau) = \frac{1}{A^{-1}\left(\frac{c}{f(\tau)}\right)},$$

podemos definir la función inversa

$$\eta_c = (\psi_c)^{-1} \quad (12)$$

y la identidad (11) se puede escribir ahora mediante la fórmula

$$u(x) = \eta_c(\psi_c(u_0) - x). \quad (13)$$

La otra condición de contorno,  $u(l) = \lambda$ , requiere que

$$\lambda = \eta_c(\psi_c(u_0) - l)$$

o, equivalentemente,

$$l = \psi_c(u_0) - \psi_c(\lambda) = \int_{\lambda}^{u_0} \frac{ds}{A^{-1}\left(\frac{c}{f(s)}\right)}. \quad (14)$$

Fijados  $l$ ,  $u_0$ , la condición (14) determina unívocamente la constante  $c$  gracias a la hipótesis (7). Por tanto, existe una constante  $c(\lambda, l) > 0$  tal que la función  $u(x) = u(x : c(\lambda, l))$  dada por 13, con  $c = c(\lambda, l)$ , es solución del problema de contorno. Además, por construcción,  $u(x : c(\lambda, l))$  es una función estrictamente decreciente en  $x$ . Si  $\lambda = 0$  ya hemos construido una solución, que no se anula más que en  $x = l$  y que ha de ser única pues la construcción se ha hecho a partir de condiciones necesarias para toda solución.

Veamos ahora que, si  $\lambda \in (0, u_0)$  es posible construir una segunda solución. Por la etapa anterior, existirán dos valores de la constante  $c$ ,  $c(0, \frac{l}{2})$  y  $c(0, l)$ , tales que las soluciones correspondientes construidas anteriormente verifican que:

$$u(l : c(0, \frac{l}{2})) = u_0, \quad u(l : c(0, l)) = 0. \quad (15)$$

Aquí hemos utilizado el hecho de que, por construcción,

$$u_x(x) = -A^{-1}\left(\frac{c}{f(\eta_c(\psi_c(u_0) - x))}\right),$$

con lo que, en virtud de la hipótesis  $f(0) = +\infty$ ,  $u_x(x_0) = 0$  sí y solo sí  $\psi_c(u_0) = x_0$ : es decir,  $x_0 = x_0(c)$ . De esto deducimos que la función  $u(x : c)$  se puede extender por simetría alrededor de  $x_0$  (e.d.  $u(x) = u(x_0 - (x - x_0))$ ) al intervalo  $(x_0, 2x_0)$ , sigue siendo solución de la misma ecuación diferencial y además  $u(2x_0 : c) = u_0$ .

Por la continuidad y monotonía (estricta) de  $u(x : c(\lambda, l))$  respecto de  $c(\lambda, l)$  (véase la definición), para cada  $c \in [c(0, l), c(0, \frac{l}{2})]$  existirá un único  $x_\lambda(c) \in (0, \frac{l}{2})$  tal que  $u(x_\lambda(c) : c) = \lambda$ . Nótese que la condición

$$\lambda = \eta_c(\psi_c(u_0) - x_\lambda(c))$$

equivale a que  $x_\lambda(c) = I_\lambda(c)$ . Al prolongar por simetría, alrededor del  $x_0$  asociado, las funciones correspondientes, con  $c \in [c(0, l), c(0, \frac{l}{2})]$ , concluiremos que los puntos transformados  $2x_0(c) - x_\lambda(c)$  describen todo el intervalo  $[2\psi_{c(0, \frac{l}{2})}(u_0) - I_\lambda(c(0, \frac{l}{2})), 2\psi_{c(0, l)}(u_0) - I_\lambda(c(0, l))]$  que contiene a  $l$  (en virtud de 15) y por tanto, necesariamente existirá un único  $c^* \in [c(0, l), c(0, \frac{l}{2})]$  tal que  $u(l : c^*) = \lambda$  con lo que obtenemos la segunda solución. Por la convexidad de la solución y la unicidad de la solución que llega al nivel cero deducimos que no puede haber ninguna otra solución. ■

**Observación 3.** Es sencillo ver que la semi-recta  $\lambda_0(l) = 0$  para todo  $l > 0$  es la envolvente de la familia de curvas  $u(x) = \eta_c(\psi_c(u_0) - x)$  con  $c \in (0, +\infty)$ .

**Observación 4.** Como en el caso i) se tiene que la solución “mayor” (e.d. la rama del diagrama de bifurcación de las soluciones maximales) es un mínimo “débil” del funcional  $J$  y la otra (e.d. la rama del diagrama de bifurcación de las soluciones minimales) no lo es.

**Observación 5.** El teorema anterior admite una versión equivalente para soluciones cóncavas cuando se modifican adecuadamente las hipótesis. La versión correspondiente a i) se aplica al caso de la familia de parábolas de Galileo.

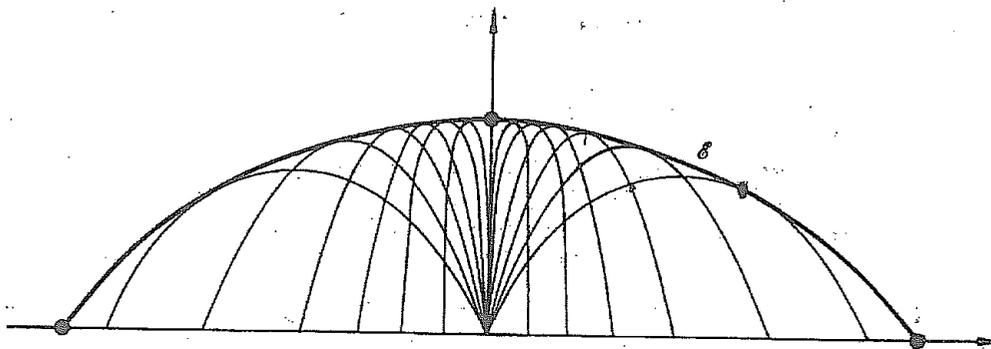


Figura 3: Familia de parábolas de Galileo y su envolvente.

**Agradecimientos.** Las investigaciones del primer autor fueron parcialmente sufragadas por los proyectos RN2000/0766 de la DGES y la RTN HPRN-CT-2002-00274 de la Comunidad Europea.

## References

- [1] J.I.Díaz, *Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundaries*, Research Notes in Mathematics n°106, Pitman, London, 1985.
- [2] J.I.Díaz, J. Hernández, Global bifurcation and continua of nonnegative solutions for a quasilinear elliptic problem, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **329**, Série I, pp. 587-592, 1999.

- [3] J.I.Díaz, J.M.Morel, L.Oswald, An elliptic equation with singular nonlinearity, *Comm.in Partial Differential Equations*, **12**, No 12, 1333-1344, 1987
- [4] J.I.Díaz, J.E.Saa, U.Thiel, Sobre la ecuación de curvatura media prescrita y otras ecuaciones cuasilineales elípticas con soluciones anulándose localmente, *Revista de la Unión Matemática Argentina*, **35** (volumen dedicado a Julio Rey Pastor), 175-206, 1990.
- [5] U. Dierkes, On the Regularity of Solutions for a Singular Variational Problem, To appear.
- [6] L. Elsgoltz, Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional, Editorial URSS, Moscú, 1994 (versión rusa original de 1977).
- [7] P. Funk, *Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik*. Springer-Verlag, Berlin, 1960.
- [8] M. Giaquinta and S. Hildebrandt, *Calculus of Variations I*, Springer-Verlag, Berlin, 1996,
- [9] C.G.J.Jacobi, Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Theorie der Differential-Gleichungen. *Crelle's J. Reine Angew. Math.* **17**, 1837, 68-82.
- [10] A.-M. Lefevere, A nonlinear boundary value problem suggested by the Laplace equation for an elastic and asymmetric membrane, *SIAM J. Math. Anal.*, **13**, 1982, 48-60.
- [11] E.L. Lindelof, *Leçons de calcul des variations*. Mallet-Bachelier, Paris, 1861.

1 Departamento de Matemática Aplicada. Universidad Complutense de Madrid. 28040. Madrid

2 Becaria de colaboración del Departamento de Matemática Aplicada durante el curso 2002/2003