

# Estabilización de oscilaciones en la ecuación compleja de Ginzburg-Landau con feedback retardado

A.C. CASAL

Dept. de Mat. Aplicada, E.T.S. Arquitectura, U. Politécnica de Madrid,  
Avda. Juan de Herrera, 4, 28040 Madrid.  
alfonso.casal@upm.es

J.I. DÍAZ

Dept. de Mat. Aplicada, Fac. de Matemáticas, U. Complutense de Madrid,  
Plaza de las Ciencias, 3, 28040 Madrid.  
ji\_diaz@mat.ucm.es

M. STICH

Centro de Astrobiología (CSIC-INTA),  
Ctra. de Ajalvir, km 4, 28850 Torrejón de Ardoz (Madrid).  
stichm@inta.es

## Resumen

Estudiamos numéricamente un medio unidimensional oscilatorio descrito por la ecuación compleja de Ginzburg-Landau en régimen de caos espacio-temporal. Utilizando un feedback retardado con componentes locales y globales, conseguimos la estabilización de oscilaciones uniformes. También encontramos otros patrones espacio-temporales y relacionamos los resultados con otros estudios analíticos y numéricos.

## 1. Introduction

En los últimos años, muchos estudios han investigado los mecanismos capaces de controlar el comportamiento de sistemas dinámicos, en particular, de sistemas de reacción-difusión en régimen de caos espacio-temporal.

Un método ampliamente estudiado por su eficiencia es el de *Time-delay autosynchronization* (TDAS), basado en un trabajo de Pyragas [1]. La idea de ese método es aplicar una señal al sistema (*feedback*  $F$ ) que es proporcional a la diferencia entre el estado actual de sistema (medido por una variable  $A$  adecuada) y el estado del sistema antes de un tiempo  $\tau$ , donde  $\tau$  representa un retardo ajustable:  $F(t, \tau) \propto A(t - \tau) - A(t)$ . Utilizando este método es posible manipular la dinámica de un sistema y crear y estabilizar una multitud de patrones espacio-temporales, no presentes o inestables sin TDAS.

Uno de los modelos mejor investigados en este contexto es el de la ecuación compleja de Ginzburg-Landau (CGLE)

$$\frac{\partial A}{\partial t} = (1 - i\omega)A - (1 + i\alpha)|A|^2A + (1 + i\beta)\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \quad (1)$$

que describe la dinámica espacio-temporal de sistemas de reacción-difusión cerca de una bifurcación supercrítica de Hopf (ver, por ejemplo, [2] y sus referencias). Esta bifurcación es omnipresente en sistemas de reacción-difusión como la reacción Belousov-Zhabotinsky o la oxidación de CO sobre platino. La solución básica de la CGLE, oscilaciones uniformes, son inestables y dan lugar a caos espacio-temporal si  $1 + \alpha\beta < 0$ . Diferentes esquemas de control de caos espacio-temporal han sido explorados a largo de los últimos años, tanto para la CGLE [3, 4, 5], como para el modelo de la reacción de CO [6], también validado en el experimento correspondiente [7].

Estos estudios utilizan un feedback global, es decir el feedback consiste en una variable global o de un promedio espacial de una variable local. Este tipo de feedback es fácil de implementar en un sistema real y por lo tanto ha sido aplicado frecuentemente. En esta contribución ampliamos el concepto de feedback admitiendo componentes locales.

## 2. Modelo

El sistema estudiado es

$$\frac{\partial A}{\partial t} = (1 - i\omega)A - (1 + i\alpha)|A|^2 A + (1 + i\beta)\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + F(A, t, \tau) \quad (2)$$

con un término de feedback retardado  $F$

$$F(A, t, \tau) = \mu e^{i\xi} [m_l(A(x, t - \tau) - A(x, t)) + m_g(\bar{A}(t - \tau) - \bar{A}(t))], \quad (3)$$

que contiene componentes locales y globales, ya que

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{L} \int_L A(x, t) dx \quad (4)$$

designa al promedio espacial de la variable compleja  $A$ . Los parámetros  $m_l$  y  $m_g$  representan la magnitudes con las que las señales locales y globales contribuyen al feedback total. El parámetro  $\mu$  designa la magnitud de acoplamiento del feedback a la dinámica, y  $\chi$  caracteriza la fase con la que el feedback actúa a la dinámica.

Basándose en el método de pseudo-linearización, Casal y Díaz recientemente han demostrado un teorema que da un criterio de cuando oscilaciones uniformes pueden ser estabilizadas a través de un feedback con componentes locales y globales [8]. Aquí presentamos el teorema para una formulación del modelo (2-4) ligeramente modificada. El feedback se supone dado por

$$F(A, t, \tau) = \mu e^{i\xi} [m_1 A(x, t) + m_2 \bar{A}(t) + m_3 A(x, t - \tau) + m_4 \bar{A}(t - \tau)], \quad (5)$$

y supongamos  $m_1 + m_2 = 0$  y  $m_3 + m_4 = 1$ . Para  $3 - m_1 - 2m_3 \geq 0$ ,  $m_1 + m_3 \geq 0$ ,  $3 + 2m_3 > 0$ ,  $\chi \in (\pi, 3\pi/2)$  y además

$$\mu > \max \left\{ \frac{3\alpha - \omega + 3(\omega + \alpha) \sin \chi + \cos \chi}{1 - 5\alpha \sin \chi \cos \chi}, \frac{m_3(3\alpha - \omega - \beta \frac{\pi^2}{L^2}) + 3(\omega + \alpha) \sin \chi + (m_1 + m_3) \cos \chi}{(3 - m_1 - 2m_3) \sin^2 \chi + (m_1 + m_3) \cos^2 \chi - (3 + 2m_3)\alpha \sin \chi \cos \chi} \right\}$$

existe  $\tau_0 \in (0, 1)$  tal que si  $\tau \in (\tau_0, 1)$ , oscilaciones uniformes son estables.

## 3. Resultados numéricos

A través de un estudio numérico sistemático construimos el diagrama de fases en función de los parámetros del feedback para diferentes combinaciones  $m_l$  y  $m_g$ .

Por razones de comparación con [5], fijamos los parámetros  $\alpha = -1,4$ ,  $\beta = 2$ ,  $\omega = 2\pi - \beta \approx 7,68$ ,  $\xi = \pi/2$ . Por lo tanto,  $1 + \alpha\beta < 0$  y observamos caos espacio-temporal en ausencia de feedback. Consideramos condiciones de contorno de periodicidad. Como condiciones iniciales elegimos caos espacio-temporal y oscilaciones uniformes perturbadas. Se puede observar histéresis, es decir, hay regiones en el espacio de parámetros donde se pueden encontrar oscilaciones uniformes o bien caos, según sea la condición inicial. No obstante, esas regiones son pequeñas y no consideradas abajo. El tiempo de simulación es  $t = 700$ , ya que en la mayoría de los casos se alcanza el estado asintótico en un tiempo muy inferior. El tamaño del sistema (undimensional) es  $L = 128$ , con una resolución espacial de  $\delta x = 0,32$ . El Laplaciano es discretizado con una representación de *next-neighbor* y la integración temporal se hace con el método explícito de Euler. Para obtener el diagrama de fases,  $\tau$  ha sido variado en múltiplos de 0,05 desde 0,05 a 2,0 y  $\mu$  en múltiplos de 0,05 desde 0,05 a 1,0.

Primero consideramos el caso  $m_l = m_g = 1$ . Variando  $\mu$  y  $\tau$ , obtenemos el diagrama de fases (Fig. 1). Vemos que para magnitudes  $\mu$  pequeños no se pueden estabilizar oscilaciones uniformes. No obstante, si  $\mu$  es suficientemente grande, existe un  $\tau_c$  tal que para  $\tau > \tau_c$  se pueden encontrar oscilaciones uniformes. Para ciertos valores de  $\tau$ , existe una zona entre las oscilaciones y la región de caos donde se forma ondas estacionarias.

Ahora discutimos el caso  $m_l = 1,8$ ,  $m_g = 0,2$ , dibujado en Fig. 2. El resultado obvio es que la supresión de caos es mucho menos eficaz que antes. Sólo hay una pequeña región donde las oscilaciones uniformes representan la solución asintótica. En la mayor parte del espacio de parámetros, caos persiste (aunque con características posiblemente diferentes a las del caso sin

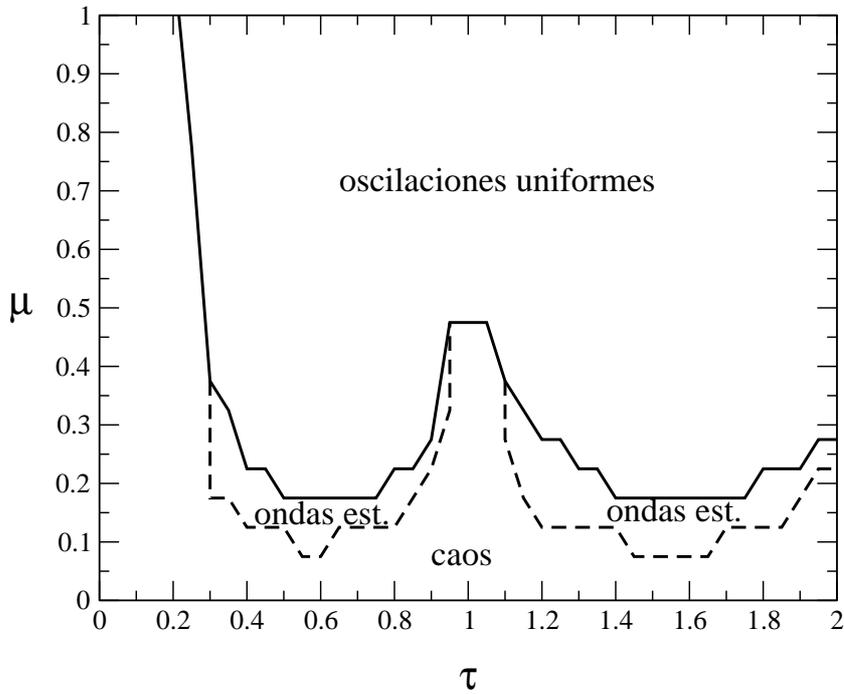


Figura 1: Diagram de las soluciones en el espacio de parámetros  $\tau$ ,  $\mu$  para  $m_l = m_g = 1$ .

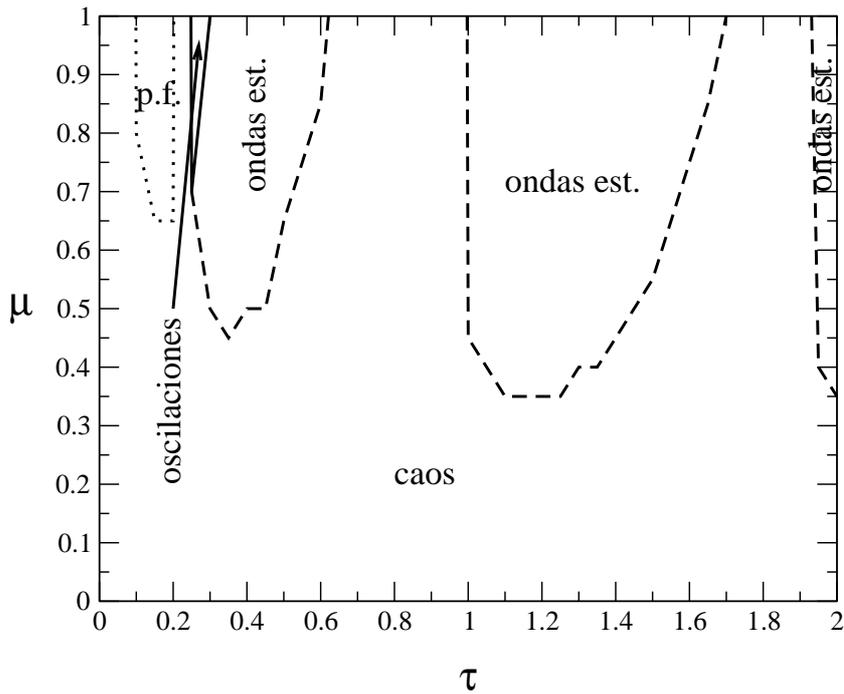


Figura 2: Diagram de las soluciones en el espacio de parámetros  $\tau$ ,  $\mu$  para  $m_l = 1,8$ ,  $m_g = 0,2$ .

feedback) y se presentan grandes regiones con ondas estacionarias. La longitud de onda del patrón disminuye si crece  $\mu$  para  $\tau$  fijo.

Para el caso de feedback local exclusivo,  $m_l = 2$ ,  $m_g = 0$ , hemos hecho simulaciones con un tiempo de simulación corto  $t = 300$  que no nos permiten hacer conclusiones definitivas. Hasta ahora, no hemos encontrado oscilaciones uniformes u ondas estacionarias. No obstante, ondas viajeras y estabilizacion del punto fijo están presentes.

## 4. Discusión

Valorando los resultados obtenidos aquí podemos decir que el caso  $m_l = m_g = 1$  se parece bastante al caso sin feedback local [5]. Una explicación simple de este resultado es que el feedback local en general varía fuertemente en el espacio y la aplicación de una señal caótica a un sistema caótico no necesariamente da lugar a una dinámica regular. Por otro lado, la difusión no ejerce su papel en el feedback global ya que su contribución es constante en el espacio. Además, como estamos interesados en oscilaciones uniformes, una solución sin dependencia espacial, es de esperar que un feedback sin dependencia espacial, es decir global, tenga mayor eficacia en suprimir el caos.

Esto es claramente observable en las simulaciones para  $m_l = 1,8$ ,  $m_g = 0,2$ , donde la región de oscilaciones uniformes se ha desplazado hacia valores de  $\mu$  muy altos. Las simulaciones con feedback local exclusivo han mostrado que es el feedback global el que es preciso para estabilizar oscilaciones uniformes y que el feedback local puede ser más adecuado para obtener ondas viajeras o el estado estacionario (punto fijo). Estos resultados están de acuerdo con el estudio [9] donde la formación de ondas viajeras como resultado de un feedback local ha sido descrito.

En suma, hemos encontrando oscilaciones uniformes y formación de ondas estacionarias como principales soluciones, pero también hemos discutido otros patrones espacio-temporales como estabilización del punto fijo y ondas viajeras, que igualmente requieren un estudio analítico.

Este trabajo continúa estudios recientes sobre control retardado en la ecuación compleja de Ginzburg-Landau [5] y un estudio analítico reciente llevado a cabo en [8]. No hemos querido presentar ninguna comparación detallada entre el estudio analítico y el numérico, pues es trabajo actualmente en curso de elaboración.

**Clasificación para el Cedy 2005:** ítem del congreso donde se engloba la conferencia: EDPs

### Bibliografía

- [1] K. Pyragas, *Continuous control of chaos by self-controlling feedback*, Phys. Lett. A **170** (1992), 421–428.
- [2] M. Stich. “Target patterns and pacemakers in reaction-diffusion systems” (PhD thesis), Technische Universität Berlin, 2003.
- [3] D. Battogtokh; A.S. Mikhailov, *Controlling turbulence in the complex Ginzburg-Landau equation*, Physica D **90** (1996), 84–95.
- [4] D. Battogtokh; A. Preusser; A.S. Mikhailov, *Controlling turbulence in the complex Ginzburg-Landau equation II. Two-dimensional systems*, Physica D **106** (1997), 327–362.
- [5] C. Beta; A.S. Mikhailov, *Controlling spatiotemporal chaos in oscillatory reaction-diffusion systems by time-delay autosynchronization*, Physica D **199** (2004), 173–184.
- [6] C. Beta; M. Bertram; A.S. Mikhailov; H.H. Rotermund; G. Ertl, *Controlling turbulence in a surface chemical reaction by time-delay autosynchronization*, Phys. Rev. E **67** (2003), 046224.
- [7] M. Kim; M. Bertram; M. Pollmann; A. von Oertzen; A.S. Mikhailov; H.H. Rotermund; G. Ertl, *Controlling chemical turbulence by global delayed feedback: pattern formation in catalytic CO oxidation reaction on Pt(110)*, Science **292** (2001), 1357–1360.
- [8] A.C. Casal; J.I. Díaz, *On the complex Ginzburg-Landau equation with a delayed feedback*, Math. Models Meth. Appl. Sci. (2005), in press.
- [9] M.E. Bleich; J.E.S. Socolar, *Controlling spatiotemporal dynamics with time-delay feedback*, Phys. Rev. E **54** (1996), 17–20.