Sobre Fluidos y Matemáticas[1]

J.I. Díaz
Real Academia de Ciencias y Universidad Complutense de Madrid

1. Introducción.

El 24 de Mayo de 2000, en el Collège de France, el *Clay Mathematics Institute (CMI)* anunció la creación de unos premios de un millón de dólares para aquellos que resuelvan alguno de siete importantes problemas clásicos que en aquella fecha esperaban aún su solución: se presentaba así lo que denominaban *The Millennium Prize Problems*[2].

Los temas fueron propuestos, tras consultar a numerosos distinguidos matemáticos, por el Comité asesor del *CMI*, formado por Alain Connes, Arthur Jaffe, Andrew Wiles y Edward Witten.

Uno de ellos, el cuarto, versó sobre “la ecuación de Navier-Stokes que gobierna el flujo de los fluidos tales como el agua y el aire”. En la descripción del problema se aludía a que aún no había ninguna demostración de las más básicas preguntas sobre el tema: ¿Existe solución? ¿Es única?

Obviamente, la carencia de respuesta a esas cuestiones matemáticas no representa ningún impedimento para el uso de las ecuaciones de Navier-Stokes en los campos de la Ingeniería y de la Física. Pero la respuesta matemática no está motivada únicamente por un afán de poder asegurar la certeza total. Se pretende conseguir también una comprensión profunda de los fenómenos que puede ser de utilidad en otras direcciones como por ejemplo el análisis numérico y la computación de los fenómenos en los que aparecen[3].

Pero ¿por qué se hizo la presentación de esos premios el año 2000 en Paris? No es descabellado pensar que una razón pudiese ser la de emular a la lista de 23 problemas abiertos que David Hilbert (1862-1943) propuso un siglo antes, el 8 de Agosto de 1900, en el 2º Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Paris[4].

Numerosas reflexiones pueden ser llevadas a cabo contrastando los siete temas de los *Millenium Problems* con los 23 incluidos en la lista de Hilbert. Para nuestros fines, quizás pueda bastar subrayar que la larga lista de problemas propuestos por Hilbert tiene un carácter estrictamente matemático y así, en particular, no se hace ninguna explicita mención a fluidos. Curiosamente, pese a que en aquellos tiempos no se había producido aún la centrifugación de nuestros días en la que muchas disciplinas científicas son presentadas como aisladas entre sí, parece que la celebración de aquel congreso tan singular comenzaba a incitar a caminar en esa dirección. Señalemos también que Hilbert sí hizo alusión, sin descender a detalles, al contexto general de la Física – Matemática pero no queda claro si para él la Mecánica de Fluidos pudiese representar, o no, un capítulo fundamental de la misma[5]. Hilbert alude en uno de sus problemas[6] a algo que

---

[1] Texto de la conferencia impartida en el Instituto de España, el 30 de noviembre de 2006 en el ciclo de conferencias: *Aspectos matemáticos en la ciencia y en la sociedad.*

[2] http://www.claymath.org/millennium/

[3] Ha habido varias declaraciones que ponen en tela de juicio si esas son las cuestiones más relevantes de la Mecánica de Fluidos entre las muchas que esperan aún una respuesta. Véase, por ejemplo, el documento *Reformulation and Resolution of the Clay Mathematics Institute Fluid Dynamics Prize Problem,* de J. Hoffman y C. Johnson que se puede encontrar en la web http://www.femcenter.org/.

[4] D. Hilbert, “Mathematische Probleme”, *Nachrichten Königlichen Gesellschaft Wissenschaften Göttingen, math.-physik. Klasse,* 1900, 253–297.

[5] Un análisis, en otro contexto, se puede encontrar en J. I. Díaz, “Retos y progresos de la Física Matemática contemporánea a Blas Cabrera (1878-1945)”, *Actas del II Simposio “Ciencia y Técnica en*

tiene una vigencia actual y es la conveniencia de replantearse de manera constante la propia noción de solución para los problemas provenientes del Cálculo de Variaciones. Volveremos sobre este punto más adelante. Por último, hemos de enfatizar que lo que Hilbert seleccionó con su famosa lista era más bien un conjunto de “direcciones de investigación en Matemáticas en 1900” más que un listado de problemas pendientes como el que eligió el Comité asesor del *CMI* en el 2000[7].

Pero además, ¿por qué en el Collège de France? Quizás la respuesta pueda encontrarse en un hecho singular como fue el de la celebración, reconocida por la UNESCO, del año 2000 como Año Mundial de las Matemáticas. Tal propuesta, en realidad, había nacido, muchos antes, el 6 de mayo de 1992, en Rio de Janeiro[8], en el seno de una reunión de la Unión Internacional de Matemáticas, a propuesta de su Presidente, el profesor Jacques-Louis Lions (1928-2001), miembro del Collège de France desde 1974. El profesor Lions, *a cuya memoria dedico esta conferencia*, fue uno de los grandes apoyos de los que se valió la comunidad matemática española para alcanzar el grado de actividad y de reconocimiento internacional que ahora goza. Su activa participación como formador de doctores españoles fue reconocida con su nombramiento como Doctor Honoris Causa por las universidades Complutense, Politécnica de Madrid, Santiago de Compostela y Málaga, y como miembro extranjero de la Real Academia de Ciencias[9].

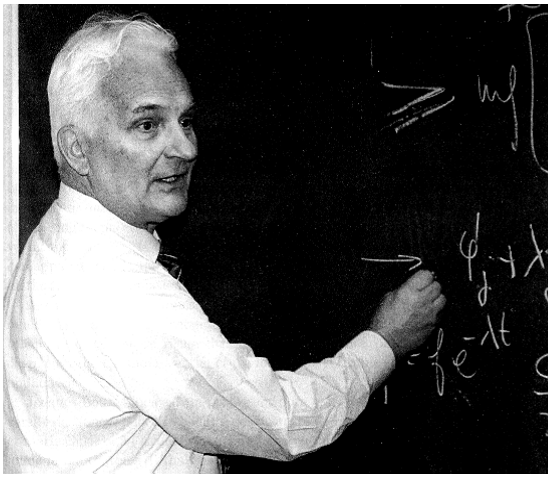

Figura 1. Jacques-Louis Lions (1928-2001).

España de 1898 a 1936: Cabrera, Cajal y Torres Quevedo”, [Yaiza (Lanzarote), julio 2000], Editores: F. González de Posada, F.A. González Redondo y D. Trujillo Jacinto del Castillo, Editorial Amigos de la Cultura Científica, Lanzarote, 2001.

[6] El 23, el último de los problemas de su lista.

[7] Las opiniones sobre hasta que punto esa lista, que tanto influencia tuvo en el desarrollo de la Matemática del siglo XX, fue acertada o no, sobre si era significativa o no de los intereses de otros matemáticos de su época, como Poincaré, pueden ser muy diversas. Hace ya años que yo expuse mi opinión en varias conferencias y mesas redondas. Años más tarde, he visto que esa opinión era compartida por muchas otras personas. Véase, por ejemplo, I. Grattan-Guinness. “A Sideways Look at Hilbert’s Twenty-three Problems of 1900”, *Notices of the AMS*, **47**, 2000, 752-757.

[8] A. Valle y yo tuvimos la oportunidad de conseguir el documento inicial emanado de J.-L. Lions de 1992 propiciando su publicación en el Boletín de SEMA.

[9] Véanse, por ejemplo, los números monográficos que le fueron dedicados, y publicados simultáneamente, por el *Boletín de SEMA* (nº **21**, 2002) y la *Gaceta de la RSME* (Vol.**5**, nº 2, 2002) a raíz de su fallecimiento.

Durante la tercera semana de enero de 1990, el profesor Lions impartió un curso intensivo en esta institución que ahora acoge esta conferencia. Sus notas[10] fueron publicadas como libro en la serie del Instituto de España, en Espasa-Calpe, y se agotaron en un breve plazo de tiempo[11].

Figura 2. J.L. Lions. *El planeta Tierra.*
Serie del Instituto de España. Espasa-Calpe, Madrid, 1990.

El profesor Lions participó activamente en la celebración en España del año 2000 como Año Mundial de las Matemáticas. Así, impartió la conferencia principal de la Jornada Matemática, celebrada el 21 de enero de 2000 en el Congreso de los Diputados[12]. Es de mencionar también que su hijo, Pierre-Louis Lions (1956-), obtuvo la Medalla Fields, en 1994, por sus relevantes aportaciones en diversos campos de la Matemática y en particular por sus resultados, recogidos más tarde en su libro[13] en dos volúmenes, sobre fluidos compresibles.

Pero volvamos al sistema de ecuaciones de Navier-Stokes. Antes de hacer alusión a la fenomenología que modelizan, señalemos que la distinta personalidad y trayectoria de sus autores es una muestra ilustrativa de la diferente naturaleza de las grandes aportaciones a la Matemática y, más en general, a la Ciencia. Claude Louis Marie Henri

[10] Lions, J.L., *El planeta Tierra. El papel de las Matemáticas y de los superordenadores*. Serie del Instituto de España **8**, Espasa-Calpe, Madrid, 1990.

[11] En su fax de 29 de julio de 1999 Lions me informaba que le habían propuesto publicar una segunda edición de su libro (agotado en menos de dos años) pero que su intención era la de preparar todo un nuevo libro incorporando referencias aparecidas desde 1990 y añadiendo varios capítulos complementarios. Me proponía que llevásemos a cabo tal tarea de forma conjunta dada la cercanía de alguno de mis trabajos y mi participación en la preparación del texto original (pues además de traducir al castellano, junto a M. Artola, sus notas, el libro contenía un Apéndice que me solicitó en su día). Desde entonces trabajamos duramente en aquel proyecto y el texto estaba prácticamente acabado a finales del 2000, unos meses antes de su fallecimiento. De hecho Lions hizo explicita mención a ese texto conjunto en preparación en uno de sus últimos artículos (J.-L. Lions., “Some Remarks on the Mathematical Modelling of Planet Earth System”, *Atti dei Convegni Lincei, Accademia Nazionale dei Lincei*, **158**, 2000, 73-93). Sin embargo, restaba por dar los últimos retoques al último capítulo que versaba sobre Teoría de Control, materia en la que Lions era una autoridad mundial. Ahora, tras su fallecimiento, tengo enormes dudas sobre la pertinencia de hacer públicas aquellas notas.

[12] *Jornada Matemática*, J. I. Díaz, J. L. Férnández, A. Martinón, M.T. Riera (Edits.). Publicaciones del Congreso de los Diputados, Madrid, 2000.

[13] P.-L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*, Oxford Science Publications, Dos volumenes. Oxford, 1998.

Navier (1785-1836)[14], ingeniero de Caminos, quien alcanzó en vida gran notoriedad como diseñador de puentes. Prominente figura pública (tuvo una estrecha relación con los progresistas Compte y Saint-Simon), sus trabajos se extendieron también a aspectos muy prácticos de la Mecánica de Fluidos, analizando los efectos de la viscosidad en 1821 y 1822[15].

Figura 3. J Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836).

En contraste a Navier, Sir George Gabriel Stokes (1819-1903) desarrolló sus investigaciones más propiamente en el seno de las Matemáticas[16]. Ocupó la Cátedra (Lucasian professor) de la universidad de Cambridge que originalmente ocupó I. Newton y de la que en nuestros días es titular S. Hawking. Entre otras muchas aportaciones a la Mecánica de Fluidos, analizó los efectos de viscosidad en 1842 y es por ello que, la unidad CGS de viscosidad lleva su nombre: el Stokes. Ocupó durante muchos años el cargo de Presidente de la Royal Society encargándose personalmente de la revista de la sociedad[17].

Figura 4. Sir George Gabriel Stokes (1819-1903).

Tras este preámbulo es ya momento de abordar el objetivo principal de esta conferencia, que no es otro que el de poner de manifiesto el papel fundamental de las Matemáticas en la Mecánica de Fluidos y el de señalar algunos aspectos de la gran versatilidad de esta teoría. Obviamente será imposible descender a los detalles, algunos de los cuales, y otros temas afines, vienen siendo el objeto del Curso de Doctorado que

[14] Excelente reseñas biográficas sobre este y otros científicos que serán mencionados en la conferencia pueden encontrarse en la web http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/. Algunas de las fotografías que aquí se exponen han sido tomadas de esa fuente pública de información.

[15] Ironías de la historia de la ciencia, parece que Navier desconocía el papel crucial del tensor de esfuerzos internos pese a haber propuesto la extensión de las ecuaciones de Euler al caso viscoso.

[16] Las publicaciones de Stokes fueron recogidas en cinco volúmenes; los primeros tres (Cambridge, 1880, 1883, y 1901) bajo su propia dirección editorial, y los últimos dos (Cambridge, 1904 y 1905) bajo la de J. Larmor, quien también seleccionó y editó su correspondencia científica (Cambridge en 1907).

[17] El 3 de diciembre de 2003, la Real Academia de Ciencias llevó a cabo una sesión científica sobre el *Centenario de la muerte de G. G. Stokes.*

impartimos, junto con Amable Liñán[18], desde 1996, en los Programas de Doctorado del Instituto de España y de la UCM. En ellos intentamos plasmar una visión múltiple de la Mecánica de Fluidos que armoniza puntos de vista provenientes de la Ingeniería y de la Matemática.

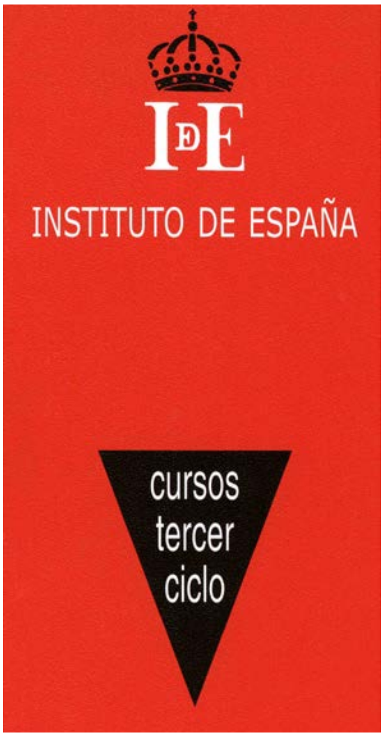

Figura5. Programa de los Cursos de Tercer Ciclo del Instituto de España.

El plan del resto de esta conferencia es el siguiente. La siguiente sección versará sobre una descripción del enunciado del cuarto problema de entre los *Millennium Prize Problems* sobre las ecuaciones de Navier-Stokes, limitando a una breve mención a otros campos de la Matemática relacionados con Fluidos en una última sección.

2. Las ecuaciones de Navier-Stokes.

La descripción de la dinámica de líquidos y gases obedece a una adecuada formulación de la segunda Ley de Newton, "fuerza igual a masa por aceleración", que históricamente requirió unos preparativos más sofisticados que los necesarios para abordar problemas de la Mecánica Clásica.

En realidad, la descripción más cercana a la Mecánica Clásica, fijando su atención en el movimiento de elementos virtuales o partículas del medio contínuo, fue introducida por Joseph Louis Lagrange (1736-1813) años después de que Leonhard Euler (1707-1783) propusiera una descripción espacial en la que las magnitudes cinemáticas (velocidad y aceleración) venían dadas como función del espacio y del tiempo, dejando implícitamente oculta la dependencia de esas magnitudes como función de las partículas[19]. Una de las principales dificultades matemáticas aparece muy

---

[18] Las dos primeras ocasiones contaron también con la participación de M. Gª. Velarde como profesor del curso.

[19] Una excelente exposición puede encontrarse en el texto, ya clásico, de G.K Batchelor, *Introducción a la Dinámica de Fluidos*, Instituto Nacional de Meteorología, Madrid. 1997, y, a un nivel más elemental, en el libro D. J. Acheson, *Elementary Fluid Dynamics*, Clarendon Press, Oxford, 1990. Las notas de Amable Liñán, *Mecánica de Fluidos*, Publicaciones de la E.T.S.I. Aeronáuticos, Madrid, en cualquiera de sus ediciones (por ejemplo la de 1999), son siempre una fuente muy útil de consulta.

tempranamente: el vector aceleración $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$, en cada punto y en cada instante, se expresa como una función no lineal del vector velocidad $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ mediante la fórmula $\mathbf{a}=(\mathbf{u}_t+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})$. Los otros términos de la segunda ley de Newton m$\mathbf{a}$ = $\mathbf{F}$ también requieren importantes precisiones. En primer lugar, el concepto crucial de masa (bien acuñado para partículas aisladas) debe ser sustituido por una función escalar del espacio y del tiempo como es la densidad (definida, de manera intuitiva, a través del paso al límite, en dominios cada vez más pequeños y concentrándose en un punto, del cociente masa/volumen). De hecho, sin pretender ser muy preciso, ya se puede adelantar que una de las clasificaciones más importantes de los fluidos atañe al distinto comportamiento de la densidad y así, para los llamados *fluidos incompresibles*, podemos suponer que la densidad es una constante, mientras que esto no es así en los *fluidos compresibles* en los que la densidad puede experimentar grandes cambios como función del espacio y del tiempo.

El sistema de ecuaciones de Navier-Stokes para el caso de un fluido incompresible se puede escribir como el sistema[20]

$$\rho(\mathbf{u}_t+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})=\mu\Delta\mathbf{u}-\nabla p+\mathbf{f}\ ,$$

$$\mathrm{div}\mathbf{u}=0\,.$$

La segunda de las ecuaciones hace referencia a la incompresibilidad e indica la conservación del volumen a través del principio de conservación de la masa. Por el contrario, la primera de las ecuaciones se refiere a la conservación del momento lineal (y angular), que reformula la segunda ley de Newton, y en la que aparecen las fuerzas exteriores $\mathbf{f}$ y las fuerzas de cohesión como medio continuo y que se expresan en términos de las fuerzas internas de presión ∇p y los esfuerzos viscosos $\mu\Delta\mathbf{u}$. Ambas ecuaciones han de tener lugar cuando las variables espacial y temporal varían en $\Omega\times(0,+\infty)$, siendo Ω un abierto de $\mathbb{R}^d$, con d=2 o 3. El caso usual en el que Ω no cubre todo $\mathbb{R}^d$ es preciso indicar unas *condiciones de contorno* que nosotros tomaremos, por simplicidad en la exposición, como $\mathbf{u}=0$ en $\partial\Omega\times(0,+\infty)$. Dado que los fluidos viscosos se adhieren a las paredes sólidas, lo que esto presupone es que las paredes sólidas que delimitan la región en la que se mueve nuestro fluido están estáticas. Pero además, el problema no estará nunca bien determinado si no indicamos el estado inicial $\mathbf{u}(\mathbf{x},0)=\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ en Ω. Pues bien, no hacen falta más comentarios para poder afirmar que el problema de hallar una función $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ y una función $p(\mathbf{x},t)$ verificando las anteriores condiciones constituye el problema abierto (cuando d=3) propuesto por el Comité asesor del *CMI y* que permanece *abierto* el día en que se imparte esta conferencia.

Antes de pasar al estudio matemático de ese sistema de ecuaciones parece conveniente insistir algo más sobre la gran trascendencia que tuvo la anterior formulación de los esfuerzos internos y sobre otros modelos alternativos en la literatura. El comienzo de la historia[21] puede ser asociado a los trabajos de hidrodinámica de Daniel Bernoulli (1700-1782), quien propuso el famoso principio que hoy lleva su nombre del que se deducen numerosas propiedades de los flujos y en que solo aparecen esfuerzos internos derivados de la presión.

[20] Se supone una mínima familiaridad con los operadores diferenciales gradiente, divergencia y laplaciano (Ñ, div y D, respectivamente): véase, por ejemplo, P. Puig Adam. *Curso de análisis matemático para ingenieros. Cálculo integral*, Madrid 1959.

[21] Entre los muchos textos que analizan esa historia puede consultarse, por ejemplo, el de J. Simón Calero, *La génesis de la mecánica de fluidos*, UNED, Madrid, 1996, donde se pueden encontrar referencias detalladas de los trabajos que se van a mencionar a continuación.

Figura 6. Daniel Bernoulli (1700-1782).

Sería Leonhard Euler quien en su obra magistral *Principes generaux de l'etat d'equilibre des fluides,* de 1755, propusiera las ecuaciones comentadas (para el caso de fluidos no viscosos) y que apenas han sufrido modificación alguna en estos más de 250 años. Euler incluye en su artículo una profunda reflexión:

> *"la teoría de los fluidos queda reducida a dos ecuaciones: solo falta el cultivo de su análisis matemático que no ha sido desarrollado aún".*

Figura 7. Leonhard Euler (1707-1783).

Esa premonición de que a partir de esas dos ecuaciones, la de conservación de los momentos y la de la masa, se puedan deducir numerosas propiedades de los fluidos tras un adecuado análisis matemático de las mismas coloca a la Matemática en el papel correcto que hoy día juega en su relación con numerosos campos con importantes intersecciones con otras ciencias, ingenierías y con la tecnología como es la Mecánica de Fluidos.

Pero el papel de otros científicos (de obra esencialmente matemática) en la formulación de los esfuerzos internos, y en particular de la viscosidad, no se limita a Euler. Así, en los años 1830-1831 las investigaciones de Auguste Cauchy (1789-1857) y de S. D. Poisson (1781-1840) permitirían alcanzar, años más tarde, la solidez de la formulación finalmente materializada por Navier y Stokes del sistema que lleva su nombre. No es pues nada extraño que Gustave Eiffel (1832-1923) incorporara los nombres de Navier, Cauchy y Poisson a la famosa torre que hoy día porta su nombre como orgullo de la ciencia y de la ingeniería francesas.

Figura 8. Navier en la Tour Eiffel (foto del autor).

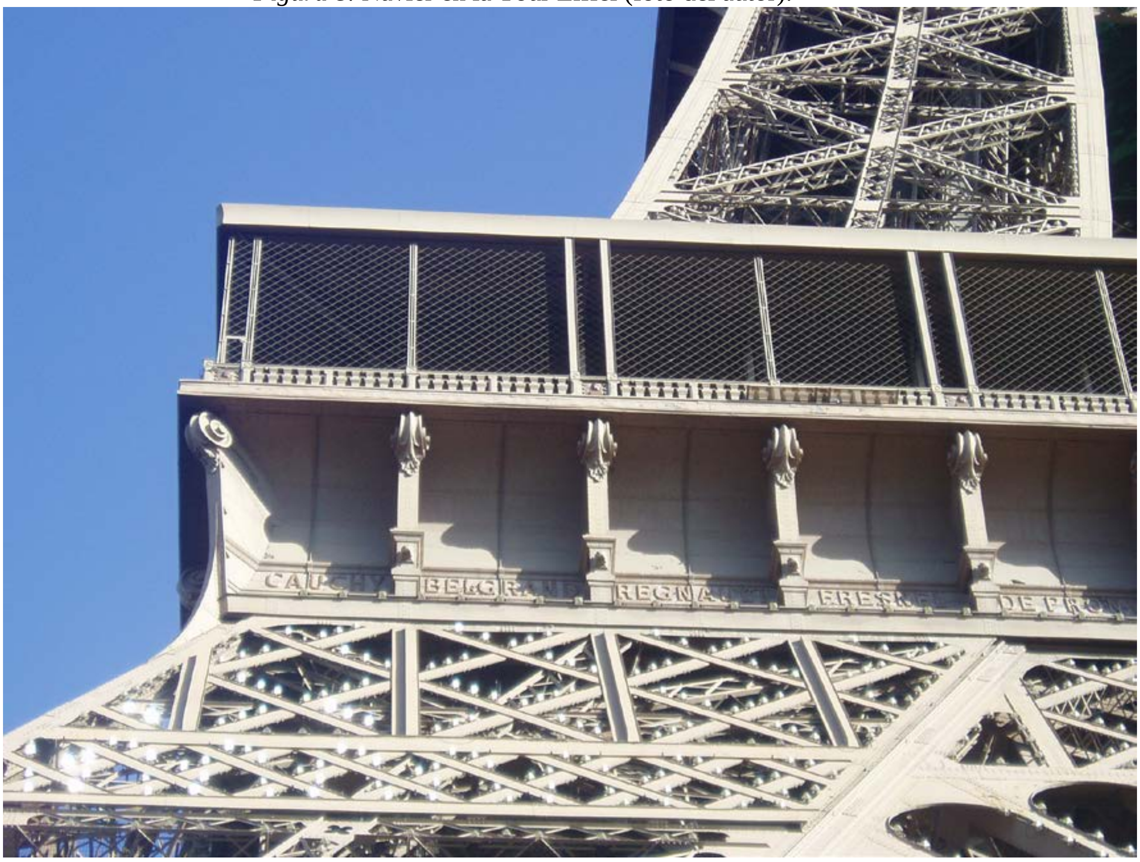

Figura 9. Cauchy en la Tour Eiffel (foto del autor).

La teoría de Newton sobre fluidos era incompleta pero no obstante muchos de sus resultados fueron punto de referencia de estudios posteriores. Este es el caso, por ejemplo, de su estudio sobre el perfil de simetría de rotación que menor resistencia ofrece al movimiento, contenido en la Proposition XXXIV, Book II, de su obra maestra *Philosophiae Naturalis Principia Matemática* de 1687, y al que me referiré más tarde.

También tiene su origen en la teoría de Newton la clasificación de los fluidos viscosos en newtonianos y no newtonianos según que el tensor de esfuerzos dependa linealmente, o no, de la parte simétrica del gradiente de velocidades[22].

Pasemos a ocuparnos del tratamiento matemático del sistema de ecuaciones de Navier-Stokes. Ya se ha mencionado que su resolución es uno de los problemas abiertos más relevantes de la época en la que vivimos. Pero, ¿qué resultados matemáticos cabe esperar? Abordar el tema con gran generalidad nos llevaría a detallar el concepto de *problemas bien planteados* según la teoría que propuso J. Hadamard (1865-1963) en 1923[23]. Un camino más corto puede aparecer al ilustrar esto con algún ejemplo sencillo de fácil comprensión, como puede ser el disparo parabólico. Las fuerzas que se pueden presentar en ese caso son sencillas (sólo la acción de la gravedad si despreciamos la fricción debida a la resistencia del aire).

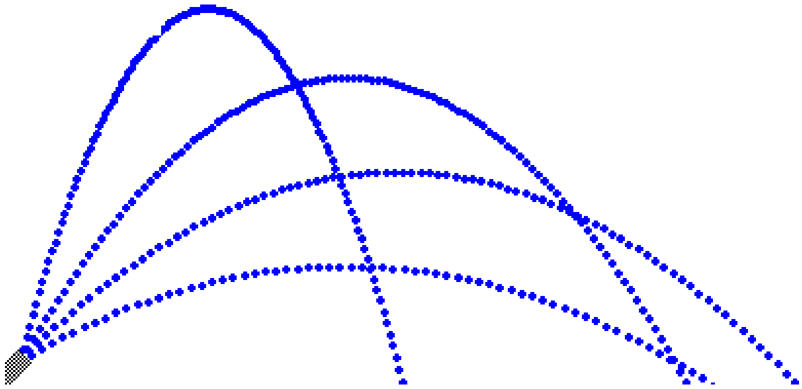

Figura 10. Tiro parabólico: la fuerza determina la trayectoria para cada velocidad inicial dada.

Si denominamos por **y**(t) al vector velocidad, y prescribimos su valor inicial, encontramos que **y**(t) viene dado como solución del problema de valor inicial para una ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{v}_0 \end{cases}$$

para la que hoy día conocemos (gracias a Auguste Cauchy (1789-1857)) que basta suponer que **f** es contínua para poder afirmar que *"para todo dato inicial existe una solución que está definida al menos en un intervalo que contiene al instante inicial"*. De hecho, desde los tiempos de Rudolf Lipschitz (1832-1903) sabemos que la solución es única una vez que **f** sea un poco más regular, por ejemplo derivable respecto de **y**, y que existe para todo tiempo si, por ejemplo, la derivada de **f** respecto de **y** está globalmente acotada[24].

---

22 Véase, por ejemplo, C. Trusdell, *Sketch for a history of constitutive relations. Rheology*, Vol I. Edited by G. Astarita, G. Marruci and L. Nicolais, Plenum Press. New York.

23 J. Hadamard, *Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations,* Yale University Press, New Haven, 1923.

24 Véase, por ejemplo, A. Dou, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Dossat, Madrid, 1968.

La gran diferencia entre el ejemplo anterior y el sistema de Navier-Stokes es que ahora las ecuaciones involucran derivadas parciales pues además de la variable tiempo aparece la variable espacial de $\mathbb{R}^d$. Además, la primera ecuación es no lineal y así queda fuera del alcance de aplicabilidad de los resultados generales en la literatura que se limitan a las ecuaciones lineales. En muy contados casos es posible encontrar *soluciones explícitas*. Uno de esos ejemplos elementales se refiere al denominado flujo de Poiseuille[25].

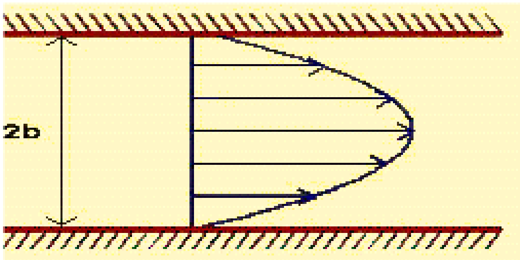

Figura 11. Solución elemental de Poiseuille.

Pero además, no es difícil mostrar que conviene comenzar buscando la solución en una clase de funciones más amplia que la clase de las llamadas *soluciones clásicas*[26]. Los resultados parciales en esa dirección fueron produciéndose bastante más tarde de la deducción de las ecuaciones a mediados del siglo XIX. Esencialmente, hay que esperar hasta el 1911 en el que C.W. Osen prueba la existencia local en el tiempo de soluciones del sistema de Navier-Stokes con energía finita (*soluciones débiles*). No se producen cambios significativos hasta el comienzo del uso de adecuados espacios funcionales en el Cálculo de Variaciones de la mano de L.Tonelli (en 1926) entre otros autores. Es en 1931 cuando se produce un cambio cualitativo con los trabajos[27] de Jean Leray (1906-1998) en los que muestra la existencia de *soluciones débiles* globales en el tiempo para el caso de d=2 (y locales en el caso d=3) mediante "estimaciones a priori" y técnicas de Análisis Funcional.

---

[25] Véanse por ejemplo los textos de Batchelor, Acheson o Liñán antes indicados.

[26] Funciones tantas veces derivables y con derivadas parciales continuas como precise la ecuación y que verifican la identidad en todo punto del dominio espacio-temporal.

[27] Étude de divers équations intégrales nonlineaires et de quelques problèmes que posent l'hydrodynamique, *J. Math. Pures. Appl.*, **12**, 1931, 1-82, y Sur le Mouvement d'un Liquide Visqueux Emplissent l'Espace, *Acta Math. J.* **63** ,1934, 193–248. Véanse también las monografías O. A. Ladyzenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, New York,1969, R. Temam, *Navier-Stokes Equations*, North-Holland, Amsterdam, 1984, G. P. Galdi, *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations*, Dos volúmenes, Springer, Berlin, 1994.

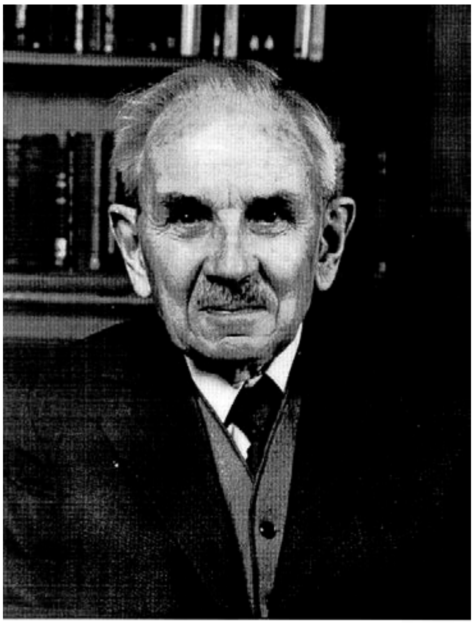

Figura 12. Jean Leray (1906-1998).

Pero, insistamos algo más sobre la naturaleza de las llamadas *soluciones débiles*[28]. En primer lugar, maticemos que diferentes nociones de soluciones débiles aparecen ya en los trabajos de D'Alembert (para la ecuación de ondas que surge, por ejemplo, en acústica), en el estudio de ciertas ecuaciones de Euler-Lagrange del Cálculo de Variaciones y en la formulación de las llamadas *ondas de choque* en fluidos compresibles desarrolladas por Ranking y Hugoniot. Conviene recordar también que, de hecho, la propia obtención de las ecuaciones de Navier-Stokes requiere diferentes herramientas del Cálculo Integral. Así, por ejemplo, las ecuaciones puntuales se obtienen en realidad mediante un *proceso de localización* que consiste en un paso al límite sobre los balances integrales extendidos a volúmenes de control que se concentran en un punto

$$\mathbf{0} = \frac{1}{med(V(t))} \int_{V(t)} \left(\rho(\mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) - \mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p - \mathbf{f} \right) d\mathbf{x}$$

$$\to (\rho(\mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) - \mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p - \mathbf{f})\Big|_{(\mathbf{x},\, t)}, \text{ cuando } med(V(t)) \to 0,$$

y tras utilizar una versión multidimensional del teorema fundamental del cálculo[29] que afirma que

$$lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)ds = f(t).$$

En el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes, dado que su término de mayor orden está en forma de divergencia, la noción de solución débil aparece al multiplicar (formalmente) por un "amplio" conjunto de funciones "test" e integrar por partes. Este fue el mecanismo empleado para abordar ciertas ecuaciones de Euler-Lagrange del Cálculo de Variaciones provenientes de los principios de Maupertuis y de Hamilton[30]. De hecho, de una forma más general, lo que lleva a la ecuación en derivadas parciales es el *principio de trabajos virtuales*

---

[28] Funciones que no cumplen los requisitos de regularidad de las soluciones fuertes pero verifican la ecuación en algún sentido indirecto a precisar en cada caso.
[29] M. de Guzmán y B. Rubio, *Integración: teoría y técnicas*, Alhambra, Madrid, 1979.
[30] J. Luzen, *The Prehistory of the Theory of Distributions*, Springer-Verlag, New York, 1982.

$$0 = \int_\Omega \big(\rho(\mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p - \mathbf{f}\big)\cdot\mathbf{v}\,d\mathbf{x}$$

$$= \int_\Omega \big\{(\rho(\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} - \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + \nu\nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v} - p\,div\mathbf{v}\big\}\,d\mathbf{x}$$

para todo desplazamiento virtual **v,** tras utilizar la propiedad fundamental de que

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0 \ \forall g \in C(\overline{\Omega}) \Rightarrow f = 0 \text{ en } \Omega,$$

una de cuyas demostraciones más tempranas se debe a P. Du Bois-Reymond (1818-1896), en 1879[31]. La idea "pionera" de Leray fue la de introducir la *energía cinética total*[32]

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\mathbf{u}(\mathbf{x},t)|^2 d\mathbf{x}$$

y obtener estimaciones *a priori* a través de la disipación de la energía total con el tiempo que para **f**=**0** se puede escribir por la desigualdad[33]

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\mathbf{u}(\mathbf{x},t)|^2 d\mathbf{x} + \frac{\nu}{2}\int_0^t\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x},s)|^2 d\mathbf{x}ds \le \frac{1}{2}\int_\Omega |\mathbf{u}_0(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$$

¿Cual es, pues, la gran dificultad que hace que este sea uno de los problemas más difíciles de nuestros días? Comencemos recordando que se sabe mostrar que si una solución débil **u** verifica que

$$\int_0^T\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x},t)|^2 d\mathbf{x}dt < \infty$$

entonces **u** es infinitamente derivable. Ahora bien, si se define el vector *vorticidad*[34] $\omega = \nabla\times\mathbf{u}$ entonces se cumple la identidad[35]

$$\int_\Omega |\omega(\mathbf{x},t)|^2 d\mathbf{x} = \int_\Omega |\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x},t)|^2 d\mathbf{x}.$$

La sutileza de lo que resta por conocer es del siguiente género: se sabe que $\omega \in L^2(0,T:L^2(\Omega))$ pero para concluir la existencia global se requiere que $\omega \in L^4(0,T:L^2(\Omega))$. Los resultados conocidos (para **f**=**0**) son los siguientes[36]:

---

[31] P. Du Bois-Reymond, "Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung", *Math. Ann.*, **15,** 1879, 283-314. Este autor aparece identificado con su hermano Emil (1818-1896) en varias biografías accesibles por Internet.

[32] A estos efectos se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que la densidad es la constante unidad.

[33] Las funciones que cumplen que la expresión de la izquierda de la desigualdad es finita constituyen el espacio $L^2(0,T,H^1(\Omega))$, con $H^1(\Omega)$ el espacio de Sobolev: véase, por ejemplo, H. Brezis, *Análisis Funcional aplicado*, Alianza Universidad, Madrid, 1983.

[34] De gran relevancia en numerosos capítulo de la Mecánica de Fluidos. Véase, por ejemplo, la exposición de D. Córdoba, M.A. Fontelos y J.L. Rodrígo, "Las matemáticas de los fluidos: torbellinos, gotas y olas", *La Gaceta de la RSME*, **8** (2005), 565-596.

[35] Término denominado como *enstrofía en t (*del inglés *enstrophy*). El problema de consolidar la posible alternativa de palabras como esta es una de las responsabilidades atribuidas a la Real Academia de Ciencias desde su creación, lo que ha dado lugar a la publicación de varias versiones de su *Vocabulario Científico y Técnico* (la tercera versión aparecida en Espasa, Madrid, 1996).

[36] Una exposición bastante asequible, conteniendo numerosas referencias, se puede encontrar en los artículos E. Fernández-Cara, " A review of basic theoretical results concerning the Navier-Stokes and other similar equations", *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl.*, **32 (**2005) 45-73, y J.C. Robinson, "Regularity and singularity in the three-dimensional Navier-Stokes equations", *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl.,* **35 (**2006) 43-71.

i) Si la “enstrofía” inicial es pequeña entonces ésta permanece acotada en todo tiempo y existe solución clásica global.
ii) En general, la “enstrofía en t” permanece acotada para todo t suficientemente grande.
iii) Podrían aparecer “episodios de singularidad t* (con “enstrofía” no acotada en t*).
iv) El conjunto de instantes de singularidad {t*} es “muy pequeño”.

Se plantea pues, de manera natural, la necesidad de “medir” conjuntos muy finos de “dimensión” no entera (de tipo *fractal*) tales como el conjunto introducido por Georg Cantor (1845-1918) en 1883.

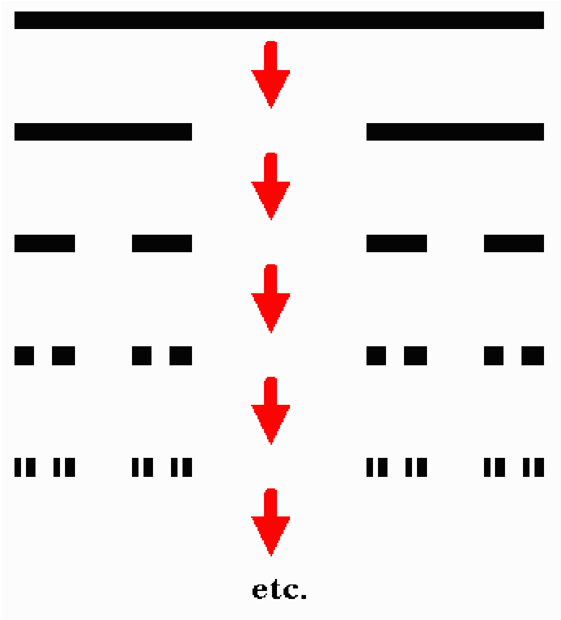

Figura 13. Conjunto de Cantor.

El gran avance se produjo tras la definición rigurosa, en 1902, del concepto de *dimensión topológica* por H. Lebesgue (1875- 1941) [37], lo que conduciría más tarde, en 1918, a la noción más fina de *dimensión y medida de Hausdorff*

Figura 14. Felix Hausdorff (1868-1942).

y después a la medida de Minkowski-Bouligand (la dimension de entropía o capacidad, de Kolmogorov)[38]

[37] La Real Academia de Ciencias celebró una sesión científica, el 24 de abril de 2002, sobre el Centenario de la Tesis Doctoral de H. Lebesgue: "Integrale, longueur, aire," *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, Serie 3, Vol. **7**, 1902, 231-361.

[38] Una exposición con especial énfasis en su aplicación al sistema de Navier-Stokes puede encontrarse en el texto J. Robinson, *Infinite-dimensional Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

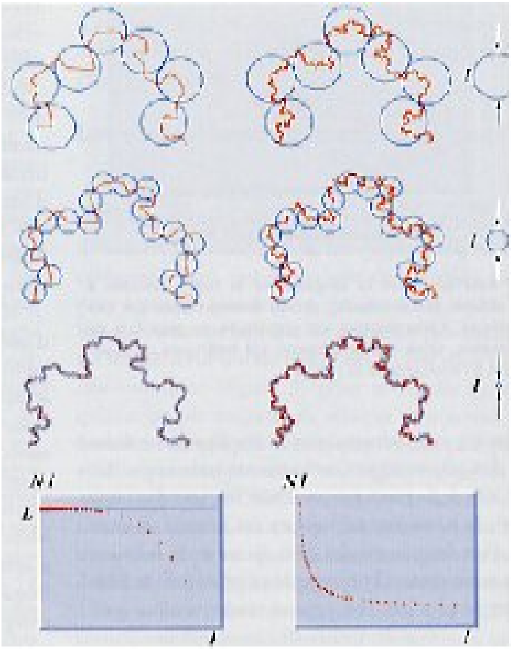

Figura 15. Ejemplos de conjuntos con dimensiones fraccionarias.

Los resultados sobre el *conjunto de episodios singulares* de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes se pueden describir de la siguiente manera[39]. Se empezó conociendo que la dimensión de Hausdorff del conjunto de instantes en los que aparecen puntos singulares es a lo sumo ½ (por lo que no puede llenar un subintervalo)[40]. Se trata de una información global en el espacio.

Con respecto a la información local en espacio, el resultado más general se debe a L. Caffarelli, R. Kohn y L. Nirenberg, fechado en 1982[41]: si se realiza un recubrimiento por cilindros parabólicos del conjunto espacio-temporal de singularidades entonces se pueden ir haciendo esos cilindros cada vez más pequeños y se llega a que la medida 1-Hausdorff (en el cilindro global) de las singularidades es nula. En particular, esto implica que esas singularidades ni siquiera pueden formar una curva en el espacio/tiempo, por lo que es prácticamente imposible de observarlas[42]. Es importante resaltar que ambas estimaciones sobre las dimensiones de Hausdorff vuelven a mostrar un hecho ya probado por Leray: en el caso de flujos planos (de dimensión dos) no hay singularidades. De hecho, conviene recordar que el enunciado del *Clay Mathematics Institute* premiaría tanto respuestas positivas como negativas sobre la existencia de singularidades en tres dimensiones (lo que es muy indicativo del grado de ignorancia sobre el tema). El problema del CMI no se limita a la indagación de la posible *explosión en tiempo finito en 3-d* sino que pregunta también por la cuestión de la *unicidad (o multiplicidad)* de las soluciones débiles en el caso tridimensional[43]. Dar respuesta a esas cuestiones es imprescindible para alcanzar una comprensión profunda del modelo matemático, lo que como en muchos otros casos puede deparar aplicaciones futuras insospechadas en estos instantes.

[39] Véase, por ejemplo, la exposición de la monografía de Robinson antes citada.
[40] V. Scheffer, "Turbulence and Hausdorff dimension", in *Turbulence and the Navier–Stokes Equations,* Lecture Notes in Math. No. 565, Springer Verlag, 1976, 94-112.
[41] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, "Partial regularity for suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations", *Commun. Pure Appl. Math*., **35** (1982), 771-831.
[42] En el caso de que existan (cosa que no está asegurada).
[43] De nuevo, el caso abierto es el de d=3 pues para el caso bidimensional pronto se vio que no puede haber más que una solución débil: J.-L. Lions y G. Prodi. "Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2", *C. R. Acad. Sc*., **248** (1959), 3519-3521.

Otra cuestión de gran actualidad y relevancia sobre las ecuaciones de Navier-Stokes se refiere a la estimación de la dimensión fractal del "atractor". Pero vayamos por partes. En primer lugar hemos de replantear ese sistema en el marco de los sistemas dinámicos definidos sobre un espacio métrico.

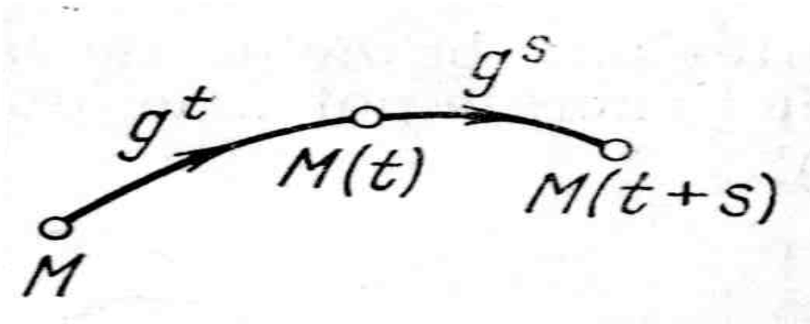

Figura 16. Propiedad de sistema dinámico.

Una vez hecho esto llegaríamos a la noción de *atractor A* del sistema dinámico[44] que representa el conjunto hacia el que converge la dinámica de todas las órbitas cuando $t \to +\infty$ y tal que

a) A es invariante por el flujo,
b) existe un entorno B de A que es la cuenca de atracción de A,
c) ningún subconjunto de A verifica las dos propiedades anteriores.

Esto se puede ilustrar mas fácilmente para el caso en el que el espacio métrico tiene dimensión finita. Así, si consideramos el *sistema dinámico discreto logístico*

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n),$$

el atractor interesante se produce tras un proceso de bifurcación reiterada a medida que el parámetro λ va aumentando, originando la famosa *cascada de Feigenbaum*[45].

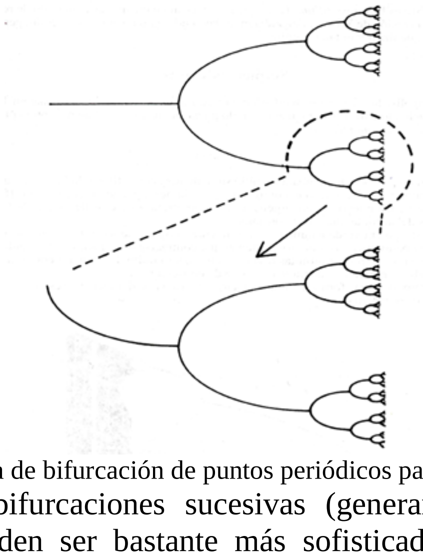

Figura 17. Diagrama de bifurcación de puntos periódicos para el sistema logístico.

Los procesos de bifurcaciones sucesivas (generando soluciones periódicas: bifurcación de Höpf) pueden ser bastante más sofisticados en el caso de sistemas dinámicos continuos como por ejemplo los generados a través de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas[46].

[44] Véase, por ejemplo, el texto de Robinson antes citado.

[45] M.J. Feingenbaum, "Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations", J. Stat. Phys. **19,** 1978, 25-52.

[46] Véase, por ejemplo, K. T. Alligood, T. D. Sauer y J.A. Yorke, Chaos. *An Introduction to Dynamical Systems*, Springer, New Cork, 1996 y la exposición de J. Aguirre y M.A.F. Sanjuan, "Fractalidad extrema e indeterminación clásica en sistemas dinámicos", *La Gaceta de la RSME*, **9** (2006), 43-58.

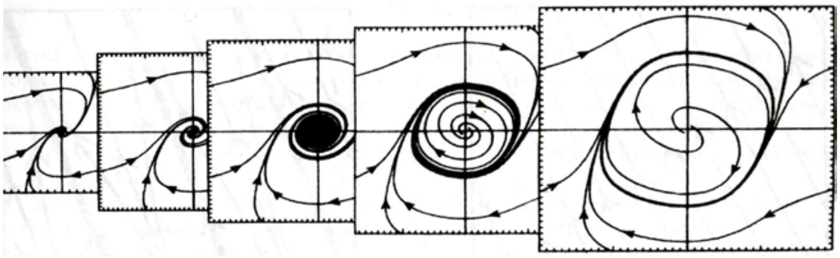

Figura 18. Bifurcación de Höpf en el plano de fases para un sistema dinámico continuo.

En el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes el sistema dinámico asociado se ha de plantear en algún espacio de dimensión infinita al que, por ejemplo, se puede llegar mediante pasos al límite, series de Fourier, procedimiento iterativo de Galerkin, etc.[47]. Aparecen descomposiciones del tipo de las de Fourier para la ecuación lineal del calor con datos nulos en el contorno sobre un intervalo $(0, L)$

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(t)\, sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right),$$

que en nuestro caso debemos encontrar para cada componente del vector velocidad **u**.

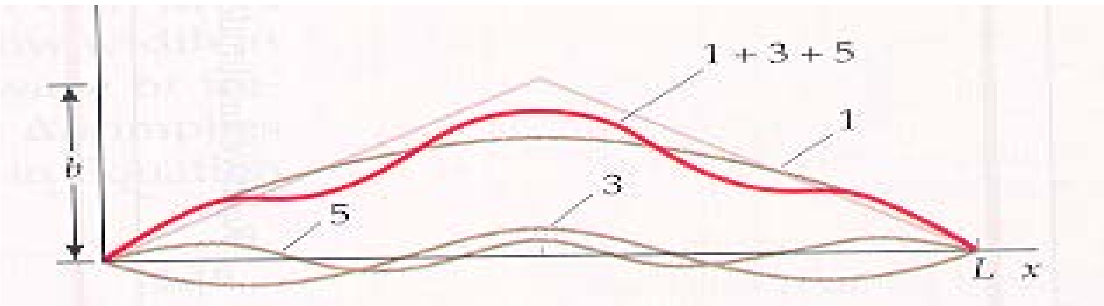

Figura 19. Diferentes términos de la serie de Fourier de la función $\left|x - \frac{L}{2}\right| + b$ con $b = \frac{L}{2}$.

En el caso de las ecuaciones Navier-Stokes la llamada "ruta al caos" puede ser apreciada, por ejemplo, en el *problema de Taylor-Couette*[48] para el fluido limitado por dos cilindros en rotación en el que se toma la velocidad de rotación del cilindro interior como parámetro en progresión.

[47] Véase, por ejemplo, R. Temam, *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer Verlag, New York, 1988 o el texto de Robinson antes mencionado.

[48] D. Ruelle and F. Takens, "On the nature of turbulence", *Commun. Math. Phys.* **20**: 167-192 y **23**: 343-344, 1971.

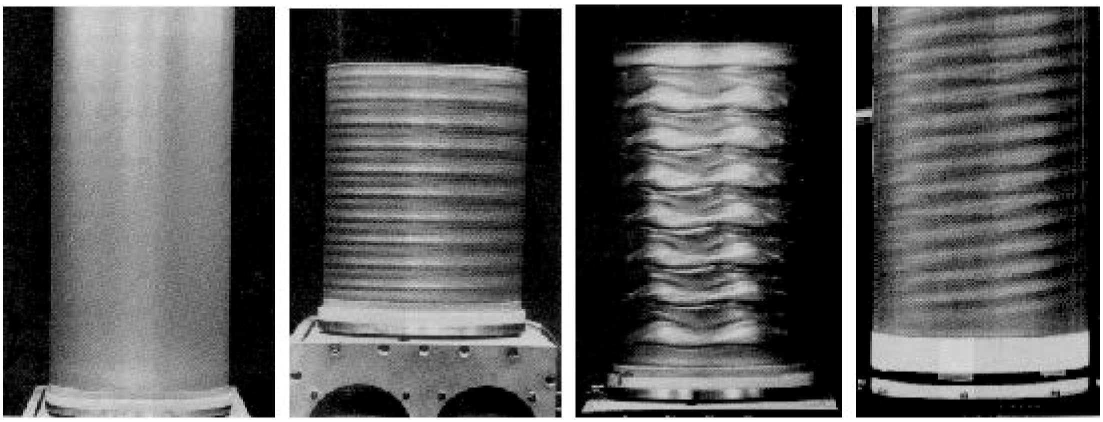

Figura 20. Problema de Taylor-Couette para diferentes velocidades de rotación. Imagen tomada de http://www.geocities.com/evolutionweb/boek/H6.htm

La obtención de diversas estimaciones superiores ("por exceso") de la dimensión (finita) de Hausdorff del atractor de las ecuaciones de Navier-Stokes fue iniciada por O.A. Ladyzenskaya (1982) y más tarde generalizada y mejorada por otros autores[49]. Un estudio "riguroso" del número de grados de libertad de la dinámica para el caso d=2, se debe a P. Costantin, C. Foias y R. Temam[50] y muestra que la dimensión de Hausdorff del atractor verifica la estimación

$$d_H(A) \le cG^{2/3}(1+\log G)^{1/3} \text{ siendo } G := \frac{|f|}{\nu^2 \lambda_1} \text{ el número de Grashov.}$$

Esos estudios confirman los previamente realizados "heurísticamente" por Kraichnan en 1967, sobre turbulencia.

Un tema relacionado con el estudio de los atractores de un sistema dinámico y que impacta sobre los fundamentos tradicionales de la Matematica motiva una reflexión sobre el concepto de demostración. La cuestión se planteó, una vez más, cuando Warwick Tucker (1970-) abordó en su tesis doctoral[51] el estudio del atractor del sistema de E. Lorenz (1917-).

$$\frac{dx}{dt} + \sigma(x - y) = 0, \quad \frac{dy}{dt} + y - rx + xz = 0, \quad \frac{dz}{dt} + bz - xy = 0,$$

mediante *auto-validating numerical methods*. La "demostración" de la existencia del atractor reducía todos los casos posibles a un número finito (varios miles), comprobables únicamente por medio de ordenadores, al igual que ya había pasado antes con el famoso *problema de los cuatro colores*[52].

3. Otros campos de la Matemática relacionados con Fluidos

Además de las cuestiones básicas aludidas en el cuarto problema de la lista de los *Millennium Prize Problems,* son numerosas las cuestiones que enlazan la Mecánica

---

[49] Numerosas referencias pueden encontrase en los textos de Temam y de Robinson antes mencionados.
[50] P. Costantin, C. Foias y R. Temam, "On the dimension of the attractors in two-dimensional turbulence", *Physica D*, **30** (1988), 284-296.
[51] *The Lorenz Attractor Exists*. Ph.D. Uppsala University, 1998.
[52] Propuesto en 1879, "resuelto" en 1976 por Kenneth Appel and Wolfgang Haken. Véase, por ejemplo, la monografía de R. Wilson, *Four Colors Suffice: How the Map Problem Was Solved*. Princeton University Press, 2002.

de Fluidos con diversos campos de la Matemática[53] tales como la teoría de grupos y las álgebras de Lie, la variable compleja, las teorías de la optimización, de los problemas inversos y del control, las perturbaciones singulares, la Geometría Diferencial, la computación, los modelos estocásticos, etc. Obviamente, los límites de esta conferencia nos impiden desarrollar esos y otros temas con la extensión y la importancia que se merecen. Nos limitaremos pues a unas pinceladas que dejen entrever algunos de los muchos paisajes que se deberían describir[54].

La teoría de grupos emerge en la Mecánica de Fluidos al observar el papel fundamental que juegan las distintas escalas en la descripción del movimiento. Cuando se escriben las ecuaciones en su forma adimensional, sin unidad ninguna, aparecen distintos *números adimensionales*[55] que conducen a relevantes simplificaciones al suponerlos cercanos a cero o a infinito. Quizás el número más indicativo del flujo es el llamado número de Reynolds

$$\mathrm{Re} = \frac{VL}{\nu},$$

con V y L velocidad y longitud características del flujo y $\nu = \mu / \rho$ la viscosidad del fluido, que permite diferenciar los regímenes laminar y turbulento de un fluido. Flujos enormemente dispares pero con un número de Reynolds similar poseen el mismo tipo de comportamiento lo que fundamenta las bases de la experimentación por analogía, como son los túneles de viento[56]. Es la idea básica del *Análisis Dimensional* que tan tempranamente fue desarrollado por Julio Palacios (1891 – 1970) en su famoso texto[57] traducido a tantos idiomas. Además, la teoría de grupos aparece en el estudio de transformaciones invariantes por simetrías (aquí entendidas en un amplio sentido) que dejan también invariante a la ecuación en estudio. Estos aspectos, y otros muchos no mencionados aquí, pueden encontrarse en la bella obra de G. Birkhoff[58] en la que también se presta una especial atención a las múltiples paradojas que se han ido planteando en el seno de la Mecánica de Fluidos.

No se pueden dejar de citar, en ese contexto, los métodos topológicos de bifurcación (con importantes conexiones con la teoría de grupos) y que, entre otras cosas permiten obtener rigurosas justificaciones[59] de las formas geométricas generadas por las *células de Rayleigh-Benard*[60] producidas por la dinámica de un fluido sometido a una temperatura muy superior en la base que la de alturas superiores. Además de poder observar esas estructuras en experiencias culinarias habituales, hemos de hacer mención a su aparición en procesos insospechados en Geología y estructura interna de

[53] Aunque esas conexiones han ido siendo publicadas en las más dispares revistas de investigación, desde 1999 se cuenta con una revista especializada para esos fines: *The Journal of Mathematical Fluid Mechanics.*

[54] Sobre alguno de los anteriores aspectos, como es el de la estrecha relación entre Fluidoestática y *Superficies de minimales* y *de curvatura constante,* he tenido la ocasión de escribir algunas líneas de carácter divulgativo. Véase, por ejemplo, J. I. Díaz, "De la pompa de jabón al satélite artificial: lo óptimo como estrategia". En el libro *Horizontes culturales. Las Fronteras de la Ciencia. 2000: Año Mundial de las Matemáticas* Espasa-Calpe, Madrid, 2002, 159-172.

[55] Véase el artículo de M. Gª. Velarde: "Por los fluidos y sus corrientes, número a número", *Revista Española de Física*, **9,** 1995, 12-19.

[56] Una variada galería de flujos concretos con indicación de su número de Reynolds correspondiente puede encontrarse, por ejemplo, en G. M. Homsy, *et al.*: *Multi-media Fluid Mechanics,* CD-Rom Teaching Tool, Cambridge Univ. Press, 2000.

[57] J. Palacios. *Análisis Dimensional*. Espasa-Calpe S. A., Madrid, 2ª edición, 1964.

[58] G. Birkhoff, *Hydrodynamics,* Princeton University Press, Princeton, N. J., 1960.

[59] M. Golubitsky, I. Stewart y D. G. Schaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory,* Dos volumenes, Springer-Verlag, New York, 1988.

[60] M. Velarde and C. Norman, "Convection". *Sci. Am.* **243**, (1980), 78–85

la Tierra, formación de cierto tipo de dunas en el desierto durante las noches (en ese caso la temperatura atmosférica nocturna es más baja que la del suelo), etc.

Un capítulo tradicional de la Mecánica de Fluidos se refiere a la aplicación de técnicas de *variable compleja* tales como transformaciones conformes, funciones holomorfas, teoría de residuos, etc. Aparece en numerosos flujos y en particular en el estudio de flujos a través de obstáculos que ya atrajo la curiosidad de Leonardo da Vinci (1452-1519).

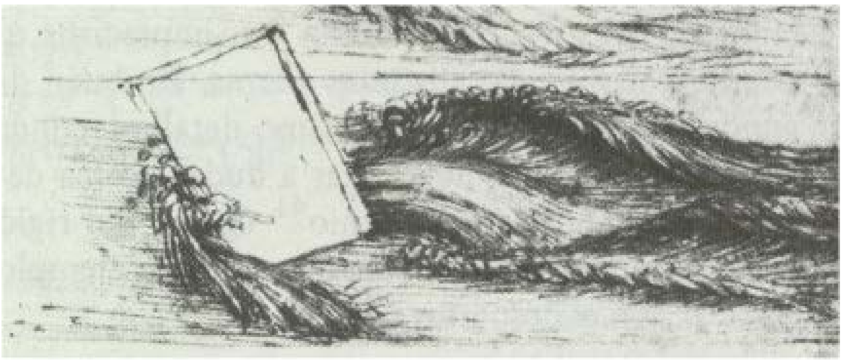

Figura 21. Flujo a través de un obstáculo según Leonardo da Vinci.

Desde entonces, el problema suscitó la atención de numerosos científicos: P. Molenbroeck (1890), S.A. Chaplying (1902), J. Leray (1935), H. Bateman (1938), T. von Karman (1941), R. Courant and K.O. Friedrich (1948), L. Crocco (1951), L. Bers (1954), P. Germain (1954), M.J. Lighthill (1955), R. Finn and D. Gilbarg (1957), R. Finn and J. Serrin (1958),…, apareciendo varias monografías sobre el tema[61].

No parece haber sido suficientemente advertido que Julio Rey Pastor (1888-1962), uno de los matemáticos españoles más brillantes de todos los tiempos, también se ocupó de esos temas en varios trabajos del final de su larga trayectoria científica [62].

Pese a ser un problema tan clásico, el flujo a través de obstáculos recibió un tratamiento innovador en un trabajo de 1973 de Haïm Brezis y Guido Stampacchia[63]. La adecuada mezcla de técnicas de Análisis Funcional, Variable Compleja y Teoría de Inecuaciones Variacionales permitió a esos autores superar elegantemente todos los estudios precedentes[64]. A mi juicio, se trata de una creación intelectual que admite comparación con otras “re-creaciones” intelectuales, muestra de las más altas cotas creativas alcanzadas, como puedan ser los casos de la *Rhapsody on a Theme of Paganini, Op.43* de Sergei Vasilyevich Rachmaninov (1873-1943) o *Les Demoiselles d'Avignon*, de 1907, de Pablo Picasso (1881-1973) (inspirandose, quizás, en obras

---

61 Véanse, por ejemplo, los textos de L. Bers, *Mathematical aspects of subsonic and transient gas dynamics*, Chapman and Hall, London, 1958, J. Serrin: Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics, in *Handbuch der Physik*, **8,** Springer-Verlag, Berlin 1959, 125-263 y C. Ferrari and F. Tricomi, *Aerodinamica transonica*, Cremonese, Roma,1962.

62 Véanse su trabajos “Sobre mecánica supersónica” (publicado en el número monográfico del *Centenario de la Real Academia de Ciencias*, en 1947), “Sobre la ecuación linealizada del vuelo supersónico” de 1949, “El método hodógrafo en los movimientos planos de fluidos compresibles”, también de 1949 y “Sobre las ecuaciones en derivadas parciales de la física” (en alemán), expuesto en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Amsterdam en 1954. Las referencias exactas pueden encontrarse en *Julio Rey Pastor: Selecta*, Edición preparada por la RAC. Fundación Banco Exterior, 1988.

63 “Une nouvelle méthode pour l‘étude d‘écoulements stationnaires”, *C. R. Acad. Sci.*, **276** (1973) 129-132

64 Una contribución posterior, bajo la citada formulación, fue el trabajo J.I. Díaz y A. Dou, “Sobre flujos subsónicos alrededor de un obstáculo simétrico”. *Collectanea Mathematica* (1983) 142-160.

como *La Visitación* (1610-14) de Domenicos Theotocopoulos "El Greco" (1541-1614)).

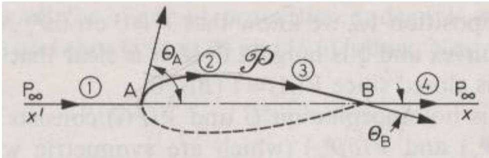

Figura 22. Flujo subsónico a través de un obstáculo.

Otro capítulo de gran relevancia y actualidad de la Mecánica de Fluidos en la que se requiere un fino uso de técnicas matemáticas, como las de la optimización y del control, puede enmarcase en el contexto general de los llamados *problemas inversos*. Curiosamente, un problema de este estilo fue uno de los primeros temas abordados en el desarrollo de la ciencia determinista pues, como ya se ha mencionado anteriormente, fue considerado por I. Newton, en sus *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Newton se preguntaba cuál era el cuerpo de revolución que ofrece menor resistencia al movimiento. La empresa tenía un enorme mérito si se es consciente de los conocimientos que se poseían en esa época: setenta años antes de la derivación de los leyes de la conservación para un fluido compresible no viscoso por L. Euler en 1755. Con su estudio[65], Newton introducía, en 1685, uno de los problemas pioneros del Cálculo de Variaciones. De hecho, el problema fue sugerido ya por Galileo en su fomoso *Discursi* de 1638 y sería objeto de numerosos estudios posteriores como los de Legendre (1786), Bolza (1909),..., etc. [66].

Además de analizar la resistencia al movimiento para algunos cuerpos particulares, caso de una esfera o de un cono, Newton abordó el caso de un perfil de revolución general. Su método, típicamente geométrico, le llevó a concluir que el perfil óptimo debía ser "chato": una especie de cono truncado. De hecho, se aventuró a predecir su posible utilidad: "*it may be of use in the building of ships*". Su teoría se basaba en unas hipótesis que le permitían concluir que la resistencia era proporcional al cuadrado de la velocidad. Si bien es cierto que su hipótesis sobre el fluido como "*a rare medium consisting of equal particles freely disposed at equal distances*" excluye el caso de los fluidos incompresibles, no lo es menos que su teoría es muy pertinente para el caso de fluidos compresibles lejanos a nuestra atmósfera, habiendo sido objeto de inspiración en el diseño de diversas naves espaciales de la NASA[67].

[65] En la edición inicial de su libro, tal estudio apareció sin apenas detalles, limitado a menos de un folio. Más tarde lo detallaría mucho más a requerimiento de su estudiante D. Gregory, en 1691, apareciendo incluido en una versión de los *Principia* de 1729.

[66] Para una historia detallada véase H.H. Goldstine, *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1980) y el trabajo M. Compte, J. I. Díaz, "On the Newton partially flat minimal resistance body type problems", *Journal of the European Mathematical Society*, **7**, 2005, 395-411 y sus referencias.

[67] A.J. Eggers Jr., M. M. Resnikoff and D.H. Dennis, "Bodies of revolution having minimum drag at high supersonic airspeeds", *NASA Report* 1306, 1958.

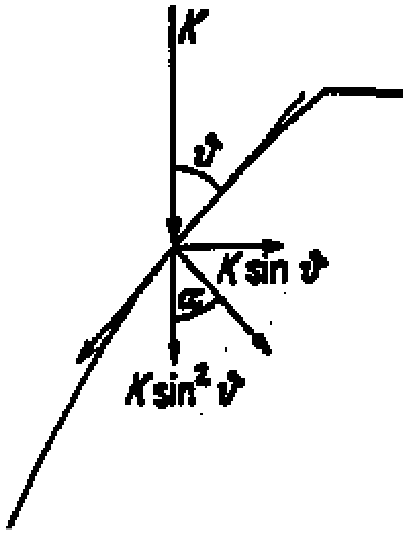

Figura 23. Resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad.

Son muchos las técnicas y disciplinas matemáticas que han visto vigorizado su desarrollo por su conexión con importantes problemas de la Mecánica de Fluidos. Una de esta disciplinas, quizás la más representativa de esa interacción, es la Teoría de Perturbaciones Singulares. No cabe duda de que uno de los trabajos que espolearon el desarrollo de esa teoría fue el trabajo de Prandtl de 1904[68] sobre la *capa límite* y que luego recibiría un tratamiento matemáticamente riguroso por parte de O.A. Oleinik en 1963[69]. Existen otras aplicaciones de la teoría de perturbaciones singulares a la Mecánica de Fluidos como es el caso de los flujos reactivos y de la teoría de la combustión[70]. Todo ello aparece muy pormenorizadamente expuesto en la memoria que recoge y amplía el discurso de ingreso de Gregorio Millán Barbany (1918-2004)[71] en la Real Academia de Ciencias.

[68] L. Prandtl, Uber flussigkeitsbewegung bei sehr kleiner reibung, *International Mathematical Congress*, Heidelberg, (1904), 484-491.

[69] Véase la monografía O.A. Oleinik, V.N. Samokhin, *Mathemathical Models in Boundary Layer Theor*y, Series in Applied Mathematics and Scientific Computation, vol. **15**, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.

[70] Esa teoría ha generado otras de gran aplicabilidad en numerosos contextos como es la Teoría de la Homogenización, o de escalas múltiples, que tiene a E. Sánchez-Palencia (1942-) como uno de sus máximos cultivadores.

[71] G. Millán Barbany, *Problemas matemáticos de la mecánica de fluidos. Estructura de las ondas de choque y combustión*. Discurso de recepción en la Real Academia, Madrid, 1975. G. Millán fue colaborador de Von Karman, siendo su asistente durante el curso académico 1951/52 en el que éste impartió un curso en Paris. Gregorio Millán propició la creación de un brillante grupo de investigadores sobre Combustión en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos de la Universidad Politécnica de Madrid que mantiene una gran actividad científica y del que Amable Liñán (1934-) es el exponente más representativo.


REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

Problemas matemáticos de la mecánica de fluidos. Estructura de las ondas de choque y combustión

DISCURSO

LEIDO EN EL ACTO DE SU RECEPCION

POR EL

EXCMO. SR. D. GREGORIO MILLAN BARBANY

Y

CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. FELIPE LAFITA BABIO

MADRID

Figura 24. Discurso de ingreso de Gregorio Millán en la Real Academia de Ciencias.

Un último capítulo al que quisiera hacer referencia antes de concluir esta conferencia hace alusión al importante papel motivador que tuvo en su día, y que aún sigue teniendo de manera ininterrumpida desde entonces, la Mecánica de Fluidos en los inicios, y posteriores desarrollos, de la Computación.

Más concretamente, me parece muy ilustrativo de todo ello el innovador enfoque propuesto por von Neumann[72] en 1947 a propósito de la predicción meteorológica y que constaba cuatro etapas. La primera de ellas era la Modelización Física en la que la distintas simplificaciones habían marcado los progresos en el área gracias a los trabajos iniciales de Euler, Navier y Sokes, Kelvin, Rayleigh, Helmholtz y otros, hasta llegar a V. Bjerknes en 1904 y especialmente L. Richardson en 1922. Uno de sus distinguidos continuadores, C.G. Rossby, entabló contacto con von Neumann en 1942. Una segunda etapa se refería a las técnicas numéricas y gráficas que basadas en procesos de aproximación deberían suplir la imposibilidad de obtener soluciones explicitas. La toma y almacenamiento de datos sería de una capital importancia para representar adecuadamente las condiciones de contorno e iniciales de los modelos. Finalmente, la cuarta etapa consistiría en la Computación en grandes ordenadores que permitiesen un pronóstico diario en tiempo real. Ese mismo año, en un informe a L. Straus (director del IAS de Princeton) en 1947, presenta una lista de temas que el ordenador que él diseñó debería abordar entre los cuales figuraban en primer lugar las ecuaciones en derivadas parciales no lineales de la Hidrodinámica. Se puede decir que ese es el momento de arranque de la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD) como una de los ramas de la Mecánica de Fluidos que utiliza métodos y algoritmos numéricos para "resolver" y para analizar problemas complejos planteados en ese campo. Los ordenadores se utilizan para realizar millones de cálculos requeridos, por ejemplo, para simular la interacción de líquidos y de gases con las más sofisticadas superficies usadas en la ingeniería. El problema de obtener algoritmos cada vez más exactos que puedan simular, exacta y rápidamente, panoramas complejos tales como los que se presentan en flujos transónicos o turbulentos es un campo de investigación de gran actualidad que cuenta con distinguidos especialistas españoles[73] y que ocupan buena parte del tiempo

[72] J. von Neumann, The Future Role of Rapid Computing in Meteorology, *Aeronautical Engineering Review* **6**, 30. 1947. Para otros detalles históricos puede consultarse, por ejemplo la exposición realizada en J. I. Díaz, "John von Neumann: de la matemática pura a la matemática aplicada", *Boletín de la Soc. Esp. de Mat. Aplic.*, Nº 32, 2005, 149-170.

[73] Una reciente muestra es, por ejemplo, el trabajo de S. Hoyas y J. Jiménez. "Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to $Re_\tau = 2000$". *Phys. of Fluids*, **18**, (2006).

de cómputo del superordenador *Marenostrum*, el mejor con el que cuenta nuestro país en las fechas presentes.

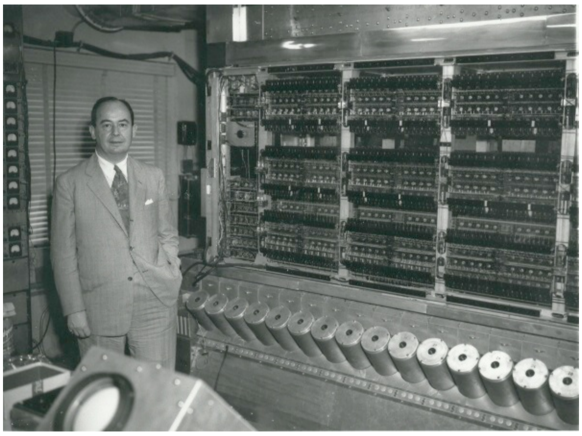

Figura 25. John von Neumann (1903-1957).

Otros muchos aspectos podían haber sido también traídos a colación para resaltar el privilegiado papel de la Mecánica de Fluidos como uno de los principales motores de las más finas técnicas matemáticas de todos los tiempos. Su presencia, y la voluntad de describir, de una manera divulgativa, alguno de los problemas que caracterizan a la Matemática de nuestros días, no podían faltar en un ciclo de conferencias como este que porta el título de *Aspectos matemáticos en la ciencia y en la sociedad.*

Muchas gracias por su atención.