

**AGIR POUR CONSERVER L'ENVIRONNEMENT?:
RÉFLEXIONS GÉNÉRALES ET ANALYSE MATHÉMATIQUE
DE DEUX PROBLÈMES CONCRETS**

Robert DAUTRAY*

Jesús Ildefonso DÍAZ**

*Académie des Sciences, 23 quai Conti, 75006 Paris, Robert.Dautray@laposte.net

**Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid, Ciudad Universitaria, 28040-Madrid, ji_diaz@mat.ucm.es

Dédié a la mémoire de Jacques-Louis Lions

1. Introduction

Cet article considère le débat actuel de la convenance d'agir activement sur l'environnement comme réaction à la détérioration croissante introduite par l'action humaine. Notre contribution, tandis que scientifiques, ne peut pas être séparée de quelques réflexions qui encadrent la discussion dans un contexte général et dans une perspective historique. Comme exemple, dans une seconde partie, nous présenterons aussi l'analyse mathématique de deux problèmes concrets liés à ce type de questions. C'était un des sujets des nombreux entretiens des deux auteurs avec J.-L. Lions. Cet article complète d'autres contributions des auteurs d'une nature plus technique sur les modèles du système climatique (Dautray, Díaz [34]) où bien avec une présentation de divulgation diverse (Dautray, Díaz [35]).

Notre point de départ est le fait que le XX^{ème} siècle et ce début de XXI^{ème} siècle ont dressé le cadre d'un système global complexe formé par l'environnement, les écosystèmes et l'homme. Donc, il incombe aux scientifiques de montrer que si des changements substantiels influant sur le long terme corrigeant les effets actuels sur l'environnement ne sont pas lancés, le partage des richesses produites et de leurs outils de création, désiré ardemment par tant de démunis, pliera sous le partage fatal des nuisances, des possibilités de dangers (où risques) et de leurs réalisations.

Où nous situons-nous aujourd'hui? Le traitement scientifique de l'environnement en est à ses débuts (par exemple: les écosystèmes). Manier utilement tant d'informations hétérogènes est ardu et conduit à des notions nouvelles sur les modélisations. Maîtriser les systèmes dynamiques de l'environnement nécessite de poser des questions pertinentes engendrant des instruments et donc des observations nouvelles.

La collaboration des physiciens, chimistes, mécaniciens, sciences de la Terre et du Soleil, biologistes, etc avec les mathématiciens-informaticiens est nécessaire à tous les niveaux des études, des diagnostics et des propositions d'actions.

Nous montrerons que derrière beaucoup des perturbations humaines, on peut trouver ces deux aspects universels: *énergie* et *information* (au sens le

plus large, comportant connaissances, cultures, métiers, transmission, stockage, formation, savoir-faire, etc.).

Vouloir agir sur les perturbations humaines à l'environnement et à son épanouissement à travers la compréhension du système inter connecté, soit la Terre, les climats, les couvertures fluides de la Terre, les sols, etc., soit la Biosphère et ses écosystèmes, etc., soit les activités de l'espèce humaine, c'est rechercher un contrôle du système qui comporte ce qui vient d'être énoncé (mais qui est loin d'être seulement décrit, ni même connu: par exemple la biodiversité: Wilson [128], [129], [130]), a un sens où presque tout, critères, contraintes, états, seuils, stabilités, réversibilité et irréversibilité, développement équitable, variables de contrôle, etc., reste à découvrir ou à préciser ou quand cela est effectué, à se mettre d'accord sur quasiment tous les aspects énoncés, et notamment les *critères*. C'est donc bien souvent agir sur les énergies et les informations sous-jacentes aux caractéristiques du système global ci-dessus.

A l'heure d'illustrer quelques exemples concrets nous considérerons, dans les deux dernières sections, deux problèmes de l'environnement sous la formulation commune d'un problème général de contrôle du type

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + \mathcal{A}(\mathbf{y}) = \text{sources} + \text{actions}$$

où l'état initial est donné par

$$\mathbf{y}(x, 0) = \mathbf{y}_0(x). \quad (1)$$

Ici les actions signifient des contrôles actifs et sont les inconnues du problème. Supposons, par exemple, que nous ne sommes pas satisfaits de l'état initial et qu'il vaudrait mieux être près d'une donnée y^T (état idéal). Si $T > 0$ est donné, pouvons-nous conduire le système (en choisissant les actions) de façon que $y(\cdot, T)$ soit aussi proche que possible de y^T ? À partir du moment où notre intérêt est fixé à un état idéal concret, y^T , le problème peut être compris comme un *problème inverse* typique. Néanmoins, si notre intérêt est sur la réponse pour une grande famille de y^T vivant dans un certain espace fonctionnel X nous arrivons à la notion de *contrôlabilité approchée* dans X .

Avant d'être plus précis, mentionnons que la *AMS Mathematical Classification* a consacré une section spéciale aux problèmes relatifs surgissant dans des sciences économiques environnementales (voir 91B76). Différents exemples des actions humaines (*antropogenerated actions*) s'appliquent aujourd'hui. La plupart d'entre elles sont des actions locales comme, par exemple, la *cloud seeding* (voir Dennis [37]). À un niveau plus global, les actions globales actuelles (telles que des lois de limitations pour la pollution atmosphérique de Rio, de Kyoto, des propositions par l'IPGC, etc ...) coexistent avec quelques spéculations (voyez, par exemple l'article de Thomson [125]) cassant le *Principe de Précaution* (*Precautionary Principle*: voir Harremoës [67]).

Dans la Section 5 nous traiterons un problème inverse suggéré par John von Neumann en 1955 ([107]):

Microscopic layers of colored matter spread on an icy surface, or in the atmosphere above one, could inhibit the reflection-radiation process, melt the ice and change the local climate. Probably intervention in atmospheric and climate matters will come in a few decades, and will unfold on a scale difficult to imagine at present.

L'idée de von Neumann était d'agir sur le climat atmosphérique par l'action sur l'albedo. Ce type de problème correspond au cas d'un contrôle simple v , dans la terminologie du Contrôle et des Théories des Jeux.

Dans une première partie nous présenterons quelques résultats récents sur une formulation mathématique exprimée en termes des modèles bilan énergétique (*Energy Balance Models*) posés, en 1969, indépendamment par M. I. Budyko et W. D. Sellers. En général, le problème est de trouver $v(x)$ tel que $y(T : v) = y^T$ avec $y(T : v)$ solution du problème (P_v)

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + By + C = QS(x)(\beta(y) + v(x)H(y)) & \text{dans } (\mathcal{M} - \mathcal{I}) \times (0, T), \\ y = u_i & \Gamma \times (0, T) \\ y(0, \cdot) = y_0(\cdot) & \text{sur } (\mathcal{M} - \mathcal{I}). \end{cases}$$

La signification des différents termes impliqués dans la formulation ci-dessus sera faite dans la section suivante. Dans la Section 6 nous traiterons un problème de contrôle d'environnement différent avec plusieurs *joueurs* (non nécessairement coopérant entre eux) selon une formulation présentée, dans l'économie, par H. von Stackelberg en 1934 ([119]). Comme exemple typique (un scénario idéal) nous pouvons mentionner le problème de maintenir propre un lac représenté par un ensemble ouvert Ω de \mathbb{R}^3 . L'état du système est noté par $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_N\}$, chaque y_i étant une fonction de temps t et d'espace $x \in \Omega$. Les y_i correspondent aux concentrations de divers produits chimiques ou de la matière organique dans le lac. Les y_i sont donc données par la solution d'un ensemble d'équations de diffusion-convection. Nous supposons la présence de plusieurs *agents locaux* ou d'usines locales P_1, P_2, \dots, P_N . Chaque usine décide de sa politique (ici représentée par les inconnues $w_i(t, x)$). Nous supposons également l'existence d'une action différente ($v(t, x)$) prise par une autorité représentative (*leader*), contrairement au reste des joueurs (*followers*).

Le but général du *leader* est "de conduire le système" au temps T , $y(T : v)$, aussi près que possible d'un état idéal \mathbf{y}^T , au moyen du contrôle v . Chaque usine a (essentiellement) le même but mais elle fera attention particulièrement à l'état \mathbf{y} près de son domaine. Pour exprimer cela, on donne des fonctions régulières ρ_i dans $\bar{\Omega}$ tels que

$$\rho_i(x) \geq 0, \quad \rho_i = 1 \text{ près de } P_i. \quad (2)$$

Alors P_i essaiera de choisir w_i tel que l'état, $\mathbf{y}(x, T)$, au temps T soit "proche" de $\rho_i \mathbf{y}^T$, et réaliser ceci en un *coût minimum*. Ceci mène à l'introduction de

$$J_i(v; w_1, \dots, w_N) = \frac{1}{2} \|w_i\|^2 + \frac{\alpha_i}{2} \|\rho_i(\mathbf{y}(\cdot, T) - \mathbf{y}^T)\|^2, \quad (3)$$

où $\|w_i\|$ est le coût de w_i , α_i est une constante positive et $\|\rho_i(\mathbf{y}(\cdot, T) - \mathbf{y}^T)\|$ est une mesure “de la distance localisée” entre l’état réel au temps T et l’état désiré \mathbf{y}^T .

Les “contrôles locaux” $w_1 \dots, w_N$ supposent que le *leader* a fait un choix v et essaient de trouver un *équilibre de Nash* [106] de leur coût J_i , c.-à-d., qu’ils recherchent w_1, \dots, w_N (comme fonctions v) tels que

$$\left. \begin{aligned} J_i(v; w_1, \dots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \dots, w_N) &\leq J_i(v; w_1, \dots, w_{i-1}, \widehat{w}_i, w_{i+1}, \dots, w_N) \\ \forall \widehat{w}_i, \text{ pour } i &= 1, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Si $\mathbf{w} = \{w_1, \dots, w_N\}$ satisfait (4), on dit que c’est un *équilibre de Nash*. Nous supposons que le *leader* v veut maintenant que l’état global (c.-à-d. l’état $y(\cdot, T)$ dans le domaine entier Ω) soit aussi proche comme possible du \mathbf{y}^T . Ce sera possible, pour n’importe quelle fonction donnée \mathbf{y}^T , si le problème a la propriété de la *contrôlabilité approchée*, c.-à-d. si

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y}(x, t; v; w_1, \dots, w_N) &\text{ décrit un sous-ensemble dense quand } v \\ \text{varie dans l’ensemble de tous les contrôles disponibles au leader.} &\end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Dans la Section 6 nous commençons par donner quelques conditions suffisantes pour l’existence (et l’unicité) d’un équilibre de Nash. Nous prouverons également que, s’il y a existence et unicité d’un équilibre de Nash pour les *followers*, alors le *leader* peut contrôler le système (au sens de la contrôlabilité approchée). La plupart des résultats de la section sont proviennent de l’article Díaz, Lions [52]. Nous présentons également ici une nouvelle démonstration, à caractère constructif, de la contrôlabilité approchée. Quelques remarques sur la *mesure de contrôlabilité* et le cas des équations d’état non-linéaires sont également données.

2. Les perturbations de l’environnement dues à l’espèce humaine

Les autres espèces vivantes, y compris celles des hominides et des primates, étaient comprises dans la description du système Terre (Dautray, Díaz [34]) sans l’activité “récente” de l’espèce humaine. Pour celle-ci, citons: ses “outils” (à tous les sens du mots), dont l’évolution de ses cultures (Cavalli-Sforza [23]), ses migrations, son organisation sociale, sa démographie (Cohen [26]) et sa consommation croissante (Wilson [128], [129], [130]) qui actuellement sont parmi les moteurs légitimes des nouveaux problèmes d’environnement.

Les perturbations citées dans cette section et la suivante sont déterminantes pour l’objet de plusieurs colloques sur les mathématiques et l’environnement (voir, par exemple, Díaz, Lions [49], [50], Parés, Valle [110], Díaz [43], Blasco [14], Díaz [47] et Brezis, Díaz [17]).

Ceci nous ramènent à l’étymologie du mot « environnement ». Le mot suppose implicitement l’homme au centre du monde. Détaillons quelques unes de

ces perturbations au système Terre, sans être exhaustif (voir les textes généraux Daumas [31], Amouretti, Comet [12], Gilles *et al.* [65]).

2.1. Naissance de l'agriculture

L'agriculture durant sa naissance et son essor, durant les millénaires à partir de 8000 ans bp, nécessite des hommes comme source d'énergie des travaux agricoles¹ et d'élevage (chaque homme "fournit" de l'ordre de 100 W/personne²: Mc Neill [100]). Produire de la nourriture par l'agriculture et l'élevage, c'est posséder outre de la terre, de l'eau, et des animaux, cette énergie des hommes³. Donc, partout où est née l'agriculture (moyen orient, vallée de l'Indus, Chine, Amérique centrale, régions andines, Afrique, ...), puis dans les régions où elle s'étend (Europe, Egypte, Iran, etc.), le système social des populations rendues sédentaires par l'agriculture, est l'esclavage. Cela se traduit dans le langage de ce texte par la maîtrise, la possession des sources d'énergie, (aux côtés des animaux de trait comme le bœuf⁴) aussi bien pour travailler la terre, que pour transporter l'eau, mouvoir les meules, etc. Les rameurs prolongent sur les mers cette énergie, quelque soit l'usage transitoire des voiles.

2.2. Les moulins à vent et à eau

Ces augmentations des sources d'énergie marquant la fin de l'antiquité et tout le moyen âge sur toute la Terre (Taton [120]) ne changeront pas la base du système social, qui suivant les régions de la Terre, sera appelé, esclavage, caste, servage, prisonnier, ou d'autres noms.

Ces nouvelles sources d'énergies se contenteront de déplacer l'utilisation de la peine musculaire des hommes sur d'autres objets, tout aussi pénibles: travaux des édifices, des routes, des transports par hommes (encore dominants au XIX^{ème} siècle au Japon sur les estampes du Tokkaido), des galères, des mines, des carrières, de la forge, etc.

Ce sera la base de l'organisation sociale de la Chine⁵, du Japon, de l'Inde,

¹Le temps écoulé depuis le début de l'agriculture, donc d'une activité humaine sur l'environnement, sensible, est de l'ordre de 10^{-6} de la durée de la vie multicellulaire.

²Rappel: une molécule-gramme d'ATP fournit 33 kJ par des réactions se résumant par : $ATP + H_2O = ADP + phosphates$. La cadence de beaucoup de réactions des enzymes se compte en kiloHertz.

³Durant un jour complet, un homme- comme les autres animaux- fera agir tant de fois ces réactions productrices d'énergie, que, même si leur masse à un instant se compte en-dessous de la micro-moléculegramme pour un seul individu, la somme sur un journée de toutes les réactions d'ATP ayant crée de l'énergie, et donc de toutes ces molécules d'ATP, comptées une fois pour chaque réaction productrice d'énergie, explicitée plus haut, est équivalente à environ le tiers de la masse de cet homme. L'homme en question refabrique évidemment cet ATP à mesure de sa transformation en ADP.

⁴Le cheval restant durant l'antiquité un auxiliaire fondamental de la guerre chez les sédentaires et une source multiple de biens et de transports chez les nomades, de l'Ordos du nord de la Chine à leur pénétration de l'Europe.

⁵La littérature chinoise nous montre, comme allant de soi, les parents vendant leurs enfants à tel maître ou troupe, les maîtres vendant au bordel telle servante jeune, etc.

de l'Amérique, du monde arabe, persan, turque, russe et plus généralement slave et bien sûr européen, etc.

Cela durera jusqu'à la deuxième moitié du XIX^{ème} siècle (cf. abolition du servage en 1866 en Russie), dans les cas les plus favorables et se prolonge jusqu'au XX^{ème} siècle (comment appeler les millions d'hommes enfouis dans le travail forcé jusqu'à la mort?).

2.3. Stabilité de la première période inter-glaciaire

L'agriculture, à partir d'il y a environ 11.500 ans, pouvait se développer grâce à la longue stabilité de la première interglaciaire qui soit si chaude, si régulière et propice aux activités de ce type.

Les inter glaciaires précédentes, il y a environ 100.000 (de 126.000 à 110.000 ans) et 200.000 ans étaient-elles moins favorables. Les travaux récents sur ces instabilités et stabilités des interglaciaires, permettent d'élucider les causes de sa stabilité et de ses instabilités⁶.

2.4. Défense des troupeaux contre les prédateurs humains

Il fallut défendre les récoltes et les troupeaux contre les prédateurs humains: la naissance des villes, de l'organisation sociale, de l'artisanat spécialisé, accompagna ces besoins des hommes agriculteurs et éleveurs. Comptabiliser ses récoltes et ses animaux, conduisit, en particulier, à la naissance de l'écriture, dont le système des nombres. Stocker la nourriture, engendra toutes les catégories de la poterie. Il fallut des armes plus efficaces et plus nombreuses, d'où la naissance de l'artisanat du bronze, puis du fer (donc la maîtrise de la combustion). Ces métaux serviront aussi pour le harnachement des chevaux de guerre, pour certains objets des civilisations nomades et aussi pour l'agriculture elle-même.

Une partie de la population sera libérée de l'obligation constante de chasser et de cueillir, d'où la naissance outre des artisans, des métiers spécialisés déjà cités, des divisions de la sociétés en castes (Dumézil [56]).

2.5. Croissance de la population humaine

La population totale des humains passera de moins de deux à vingt millions (Cohen [26]) avant l'agriculture, à deux cent à trois cent millions à la fin de l'antiquité (Mc Neill [100] et ses références). Certaines de populations de primates seraient plus nombreuses que cela à cette époque? Quelle est la validité de ces assertions?

⁶Quant à l'homo sapiens sapiens, on le date de 200.000 à 100.000 ans avec des interrogations sur environ 130.000 ans (Coppens *et al* [28]); sa culture était de plus en plus avancée, notamment vers les 30 à 10.000 ans comme en témoigne tant de restes (dont les arts, les tailles d'outils, les sépultures, etc.).

L'activité énergétique et surtout organisée et cohérente de ces hommes croîtra elle-aussi?.

RAPPEL DES REPÈRES: Chaque homme et chaque femme dans sa période de pleine force peut engendrer de l'ordre de 100 Watts par personne, c'est à dire par esclave. Aujourd'hui, chaque européen (bébés, enfants, vieillards, malades, etc. compris) dispose en moyenne pour la seule électricité⁷ de 1000 W, soit 10 esclaves, qu'il faut plus que quadrupler en tenant compte des carburants pour les transports, le chauffage, la cuisson, etc.).

Ces humains ont défriché, construit, transporté des charges, ramé, com-
mercé, creusé la terre à la recherche des matériaux nécessaires, les remontant, les triant, et les purifiant, les mouvant, les mettant en forme utile.

Cette activité des hommes, aujourd'hui plusieurs fois décuplée⁸ par l'énergie dont ils disposent, est devenu a son tour, une perturbation croissante du système de la Terre. Cela est dû en fait, insistons sur ce point, à l'énergie que cette activité des humains met en oeuvre (cf. le livre *De re metallica*, par Agricola⁹; 1556 où les estampes détaillées sont révélatrices des besoins d'énergie pour les mines au XVI^{ème} siècle).

2.6. L'énergie du cheval

Entre temps, l'énergie du cheval¹⁰ (Clutton-Brock [25]) s'ajoutera à celle des hommes ainsi que celle de la combustion du bois, etc., mais ne changeant pas la part de travail manuel des hommes. Et là encore, se contentant de la déplacer vers d'autres tâches physiques aussi lourdes et aussi pénibles.

REMARQUE 1 Dans ces domaines, le bilan du XX^{ème} siècle est donné dans Mc Neill [100]. Mais les créations utiles aux hommes sont données par la liste des *Greatest technical achievements of the 20th century*, obtenue sur Internet et élaborée par la National Academy of Engineering (NAE):

⁷La puissance électrique du réseau français est de l'ordre de 60 gigawatts électriques (un peu moins dans le cas espagnol). Cette puissance doit être additionnée à celle fournie par le pétrole, le gaz naturel, etc, directement aux consommateurs, ce qui fait plus que la doubler.

⁸En fait, cette multiplication est variable suivant les pays et les groupes sociaux.

⁹Traduction latine de Bauer, né en 1494, mort en 1555, médecin, notamment à Joachimstahl en Bohême, dépendant des Habsbourg, sur la pente Est de l'Erzegebirge, qui était alors le district minier le plus important d'Europe. L'argent extrait des mines servait à fabriquer la monnaie autrichienne (à partir de 1519), nommée pour cela, le Thaler. Cette monnaie était appelée Daler en bas-germanique, puis en ancien hollandais. Utilisée aux États-Unis, ceux-ci le prononçait "dollar".

¹⁰Dans la France paysanne des années 1940, le plus grand compliment qu'un paysan pouvait faire de son épouse était: "Celle-là, elle vaut un cheval".

- | | |
|---|--|
| 1. Electrification | 11. Highways |
| 2. Automobile | 12. Spacecraft |
| 3. Airplane | 13. Internet |
| 4. Water Supply and Distribution | 14. Imaging |
| 5. Electronics | 15. Household Appliances |
| 6. Radio and Television | 16. Health |
| 7. Agricultural Mechanization | Technologies |
| 8. Computers | 17. Petroleum and Petrochemical Technologies |
| 9. Telephone | 18. Laser and Fiber Optics |
| 10. Air Conditioning
and Refrigeration | 19. Nuclear Technologies |
| | 20. High-performance Materials |

Qui aurait pu prévoir cela en 1900? C'est dire la présomption des exercices de prévisions, aussi prudents soient-ils!

3. La révolution industrielle et ses conséquences sur la machine climatique

3.1. La machine à vapeur

Au XVIII^{ème} siècle, d'une manière empirique, la machine à vapeur fut créée et perfectionnée durant plus d'un siècle.

Sa première utilisation, quand elle fut opérationnelle (Newcomen, puis James Watt à la fin du XVIII^{ème} siècle, avec les dates de progression de 1712–1769 puis une forme plus mûre en 1780 à 1787) fut de dénoyer les mines de charbon en Grande Bretagne. Tout cela était entièrement d'initiative et d'utilisation privée.

Cela fournira une nouvelle source d'énergie centralisée qui développera les manufactures, permettant la croissance de la grande métallurgie, des usines à textiles, de la grande chimie, des produits manufacturés.

Le fait de passer du fonctionnement à la pression atmosphérique (rendement de l'ordre de 1%) à un fonctionnement à la plus haute pression techniquement possible (on arrivera à un rendement de l'ordre de 5% vers 1800) diminuera la taille des machines à vapeur, permettant de les placer sur des chars, des rails, et de créer les chemins de fer.

Leur premier but fut de transporter le charbon (Richard Trevithick, ingénieur de Cornouailles, quand les brevets expirèrent, inventa la machine à vapeur à haute pression, qui renvoya directement la vapeur dans l'air, minimisant le rôle du condenseur, rendant la machine à vapeur capable d'être mobile: machine avec rail).

Ainsi, toute la perturbation à l'environnement du XIX^{ème} siècle est notamment fille du développement de l'énergie du charbon, extraite et utilisée grâce à la machine à vapeur par les Humains.

La théorie vient ensuite notamment avec la thermodynamique (*La puissance motrice du feu* de S. Carnot, 1824). La conservation de l'énergie n'est énoncée,

démontrée et acceptée que vers la moitié du XIX^{ème} siècle par les expériences de Joule James Prescott de 1843 à 1850, avec sa déclaration officielle nette en 1847. Dans Saint's Ann Reading Room, à Manchester, le 28 avril 1847, Joule déclare:

“Wherever living force is apparently destroyed, whether by percussion, friction, or any similar means, an exact equivalent of heat is restored. The converse of this proposition is true, that heat cannot be lessened or absorbed without the production of living force, or his equivalent attraction through space, all three therefore, heat, living force or attraction through space (to which, I must add light, were it consistent with the scope of the present lecture) are mutually convertible into one another” (voir Purrington [112]).

Hermann von Helmholtz également l'écrit en 1847, et cela est imposé par l'autorité scientifique de William Thomson, futur Lord Kelvin (voir Cahen [21])¹¹.

3.2. Pétrole et gaz naturel

Nous ne traiterons pas la suite, pétrole et gaz naturel (voir Tissot [124], [123]). Il s'agit donc d'une énergie facilement transportable et stockable (d'une grande densité d'énergie: environ 12.000 kilocalories par kilogramme, c'est à dire plus que l'énergie spécifique d'un explosif); distribués par des réseaux accessibles à chacun, et permettant transports, bateaux, automobiles, avions, fusées, transformations par les usines pétrochimiques. Nous ne traiterons ni de l'électricité, ni du gaz, ni de leurs réseaux de distribution déjà traités dans les rapports de l'Académie des Sciences [4] et [8].

Quand chaque homme dispose de son énergie librement, on peut parler de premier pas vers la liberté (au sens grec ne pas être esclave, et ensuite au sens de Périclès¹² de “ne pas être à la disposition d'un autre”), égalité (accès à l'énergie), autonomie, individualisme librement accepté, respect des minorités, bref, démocratie. On retrouve une phrase historique du XX^{ème} siècle.

3.3. L'agriculteur d'aujourd'hui

Quand l'agriculteur d'aujourd'hui utilise des engrais, des pesticides, etc. Il utilise de l'énergie mise sous cette forme chimique. Il en est ainsi pour tous les produits nécessaires à l'agriculture, à la mécanisation; au transport et au stockage et à la distribution des récoltes ainsi que pour l'élevage. De même pour toute l'industrie agroalimentaire, où l'énergie est omniprésente, sous forme de

¹¹Notons les rôles importants de Julius Robert Mayer en 1842, de Michael Faraday dans les années quarante du XIX^{ème} siècle, de William Grove autour de 1842, de Marc Seguin en 1839, de la “posthumous remark” de Carnot en 1832, de Ludwig Colding en 1840, de Friedrich Mohr en 1837.

¹²Discours de Périclès dans *l' Histoire de la guerre du Péloponèse*.

conservation et d'hygiène (la chaîne du froid), de produits chimiques de toutes sortes, d'énergie mécanique, de transports, etc.

3.4. Au cœur d'une forêt tropicale

Mais aussi, quand au cœur d'une forêt tropicale on coupe des arbres avec des scies mécaniques (mues par l'énergie), il a fallu des transports, pour y aller, pour en revenir et en ramener le bois débranché, puis pour l'envoyer vers des marchés consommateurs. Là encore, l'énergie est au cœur de la perturbation créée par les activités humaines.

REMARQUE 2 Il va de soit que la survie et la diminution de la douleur et de la peine physique des hommes (système médical, chaîne du froid, information en vue des sauvetages, diminution de la pénibilité des travaux miniers, de génie civil, de sidérurgie, de manufacture, . . .); leur éducation (il faut bien transporter des maîtres et des élèves ainsi que les matériels d'éducation) que nous pensons être la clef principale du futur; etc. . . viennent aussi de l'énergie et de l'information). C'est la "langue" de Esopo: il n'appartient qu'aux hommes d'en tirer le meilleur, le neutre ou le pire.

3.5. L'énergie et l'information

En un mot, derrière toutes les perturbations du système Terre d'aujourd'hui¹³, il y a l'énergie et aussi l'information depuis les débuts de l'agriculture depuis de l'ordre de 10.000 ans. Il est en effet capital, essentiel, en prenant l'exemple des forêts, par exemple, ou des mines, ou de l'exploration pétrolière et de gaz naturel, d'ajouter que cette action de l'homme muni de l'énergie, est d'autant plus forte qu'elle se conjugue avec le fabuleux développement des "mesures, de l'extraction de connaissances opératoires qu'on arrive à effectuer et de leur maniement", ce que nous appellerons: *l'information et de son traitement*.

La croissance inovie de la population de l'espèce humaine au XX^{ème} siècle est due déjà à la médecine. L'outil de celle-ci a été, outre l'évolution de la pensée médicale (l'ouvrage de M. Tubiana [121] la raconte), les sciences physiques, chimiques, biologiques (c'est à dire toutes trois sur l'usage de connaissances et d'éducation, englobées dans ce que l'on appelle *l'information*), l'énergie (tout compris, l'utilisation d'énergie au XX^{ème} siècle a été multipliée par 16) des services de l'hôpital, des transports d'urgences, (du malade, et du médecin), de la fabrication des médicaments (avec les connaissances, c'est à dire *l'information*).

¹³Aux effets indésirables cités, il faut ajouter la pollution de l'atmosphère des villes par les transports, les moyens de cuisson et de chauffage (cf le smog de l'ancien Londres et de bien d'autres villes industrielles), les rejets industriels, les déchets liquides (effluents, boues, etc.) et solides, l'assèchement des lacs, et de mers intérieures par détournements de fleuves, les côtes bétonnées, les marées noires sur les côtes et la pollution sans témoins dans les océans, les rejets chimiques, toxiques, incendiaires, explosifs, tout cela est un reliquat de l'énergie utilisée pour tous ces processus.

3.6. Toutefois, ne nous leurrions pas

La Terre a toujours évolué, changé, que ce soit aux rythmes des phénomènes géologiques, et au premier plan de son refroidissement (qui continue aujourd'hui pour le noyau: les chiffres sont donnés dans le rapport, de l'ordre de 10 % du dégagement radioactif de la Terre, c'est à dire se comptant en térawatts), de la tectonique des plaques, des épanchements géants de magmas (*traps*) volcaniques, des chutes de météorites de son *weathering*, de dépôts et de subduction des sédiments, etc., que ce soit aux rythmes des océans, à ceux de son atmosphère, de sa chimie réductrice puis oxydantes, que ce soient aux rythmes biologiques dont celui de l'*evolution*¹⁴. . . , etc. Ajoutons le rythme et la variabilité des changements climatiques naturels, ayant de nombreuses constantes de temps que nous rencontrons très souvent dans Dautray, Díaz [34] et ce texte.

Ajoutons y les changements climatiques brusques (Alley *et al.* [9])¹⁵ souvent advenus dans le passé. Prenons un seul exemple: l'assèchement du Sahara durant la fin de l'Holocène¹⁶ alors que la mousson africaine (Alley *et al.* [9]) comme suite à la diminution de l'irradiation solaire d'été, amplifiée par l'assèchement, qui diminuant la végétation, réduit l'évapotranspiration qui elle-même fournissait une partie de la vapeur d'eau qui deviendrait une des sources des précipitation. Cela réduit encore les pluies et augmente la sécheresse. Elle réduit aussi la capacité des racines à capturer de l'eau.

REMARQUE 3 Le climat moyen, global, terrestre a été stable de puis le début de l'Holocène (10.000 ans bp). Mais cela n'empêche pas que tel climat régional, varie fortement pendant cette période. Ainsi pour le nord de la mer Rouge et le sud-est des régions méditerranéennes, on mesure un intervalle humide (Arz *et al.* [13]) entre 9.250 et 7.250 ans, avec des pluies augmentées, des circulations d'eaux douces plus abondantes, peut-être causées par l'Oscillation Arctique et une mousson régionale engendrée par des différences de températures.

Du seul critère de l'ampleur des phénomènes primaires (teneur des gaz à effets de serre, etc.), le bilan de l'action de l'homme, vu aujourd'hui, est infiniment plus faible en ce qui concerne les grands traits de l'environnement¹⁷

¹⁴Toutefois et réciproquement, les conditions imposées par l'environnement constituent l'un des principaux facteurs qui commandent l'*évolution*. C'est bien dire, une fois de plus l'interconnexion des phénomènes *Terre, Biosphère, Homme*, avec leurs différentes échelles de temps.

¹⁵REPÈRES: Sur une température moyenne qui a maintenu l'eau liquide pendant 4 milliards d'années, les changements globaux récents des âges glaciaires (les 4 derniers cycles d'environ 110.000 ans) sont de l'ordre de 5 à 6° C provenant d'un forçage radiatif externe (orbite terrestre). Toutefois des variations régionales du même ordre, ont existé sur des périodes variant de 10 à 1000 ans: variation de 4° C dans l'Atlantique durant les années 20, la grande sécheresse aux États-Unis ensuite (*The Dust Bowl*), celles du Sahel, etc.

¹⁶*Holocène*: la période la plus récente du quaternaire (commençant il y a environ 180.000.000 d'années), s'étendant sur les derniers 10.000 ans environ.

¹⁷Les systèmes vivants adaptés aux montées hydrothermales (Reysenbach, Shock [115]), qui semblent avoir existé depuis les débuts du vivant sur la Terre ne sont-ils pas, avec leur génôme et les machineries associées, des témoins des changements environnementaux, utilisant les

que l'a été depuis des milliards d'années, le résultat de l'action des microorganismes, dont les constantes de temps sont gouvernées par des interactions à l'échelle moléculaire (Newman, Banfield [109]).

Mais le fait fondamental n'est pas là. *Il y a une différence considérable d'échelle de temps entre les variations climatiques et terrestres d'origine humaine et celles d'origine naturelle.* Le vivant évolue au rythme biologique, sur des millions d'années. L'homme évolue au rythme de sa culture, avec du très court terme (bien moins du siècle) du moyen terme (en siècle) et en long terme (plusieurs siècles): voir Braudel [15].

4. Sur le contrôle du système Terre–biosphère–activités humaines

Pour freiner la détérioration du système Terre/biosphère/activités des humains, nous venons de montrer que nous devons traiter un problème de contrôle. Mais quels sont les critères à choisir? Quelles sont les variables de contrôle du système Terre/biosphère/activités humaines aujourd'hui? Quels critères faut-il élaborer pour caractériser les états optimaux?

4.1. Quels critères utiliser pour le contrôle optimal de l'environnement?

C'était un des sujets d'entretiens des deux auteurs avec J. L. Lions: i) les coûts, les prix et les substitutions de biens que cela permet, constituent le critère de base de la régulation de la vie économique (Costanza *et al.* [29], Daily *et al.* [30]), ii) des sanctions (positives, récompenses, et négatives, est au cœur de la régulation de l'enseignement, de la recherche, de l'ordre civil (droit et institutions judiciaires, etc.: thème développé par Eschyle dans "Les Euménides").

De plus, ces deux types de critères entraînent les relations d'ordre et donc des possibilités de comparaison, d'équivalence, de substitution et participent aux choix des priorités et des calendriers.

Un nombre restreint d'articles de *Science* et *Nature* (Costanza *et al.* [29], Daily *et al.* [30]) ont essayé de chiffrer tous les coûts liés à l'environnement et leurs bénéfices, avec des bilans analogues à ceux de l'économie, c'est à dire ici en coût de remplacement.

Résumons en disant que Lions et les auteurs ont interrogé beaucoup d'économistes sans avoir de réponses qui les aient convaincues. Peut-être a-t-on encore besoin d'y travailler. Les avis exprimés ne font pas non plus l'unanimité sur les critères d'optimalité à adopter.

conditions redox limitées de ces époques en "le peu de O₂", par exemple des gaz volcaniques? Sont-ils parmi les plus anciens de ces microorganismes?

REMARQUE 4 Dans l'énoncé précis du ou des critères, doit-on placer en particulier les mots "sustainable" et "conservation".

The United Nations Convention on Biological Diversity (CBD) définit sustainable use par "use of the components of biological diversity in a way and at a rate that does not lead to the long-term decline of biological diversity, thereby maintaining its potential to meet the needs and aspirations of present and future generations" (Knapp [76]). Il est lié d'une manière absolue dans ce texte à la "conservation". Il est à noter que tant à Rio de Janeiro -1992- qu'à Johannesburg -2002-, le mot *conservation*, qui était l'essentiel de du CBD n'a pas été défini.

Dans le Oxford English Dictionary (page 855 de l'édition de 1971) on trouve: *The action of conserving; preservation from destructive influences, natural decay or waste; conservation in being, life, health, perfection.*

Comment les deux mots seraient-ils compatibles¹⁸?

La population humaine croissante et ses activités ramenées à chaque habitant croissantes elles aussi, agissent partout sur la biosphère et également toutes les ressources inanimées. Dès aujourd'hui, ce monde contient 1,9 hectares par humain pour ses besoins de production agricole et d'eau. Il en faudrait 2,3 hectares par humain (Rees [114])? Ajoutons pour illustrer à quel point les moyennes constituent des données insuffisantes, que dans les pays développés, chaque humain dispose de 5 à 10 hectares de terres cultivables pour son alimentation et son eau. Dans la plupart des pays en voie de développement, chaque humain doit survivre avec moins d'un demi hectare (Rees [114]).

La conservation existe-t-elle aujourd'hui, tant pour les combustibles fossiles, les matériaux issus de la Terre, les sols cultivables, etc. Pour ce qui est du futur prévisible et non pas des utopies sans fondements dans la réalité connue aujourd'hui, le développement si nécessaire aux démunis, est-il compatible avec la « conservation » (mais, la nécessité de quoi?).

De plus, l'océan, l'atmosphère, la biosphère dans chacun de ses écosystèmes, sont des systèmes dynamiques, qui sont non-linéaires, et par nature, n'ont pas d'état stationnaire. Comment conserver quelque chose qui n'a pas d'état stable ou même seulement de référence? Les mondes formés par les activités humaines (l'écosphère) sont des systèmes auto-organisés et des structures dissipatives toujours en dehors de toute notion d'équilibre thermodynamique. Cela signifie notamment qu'ils croissent et augmentent leur ordre interne et leur « richesse » en important de l'énergie du système Terre/Biosphère et en y renvoyant leurs déperditions, leurs déchets.

Va-t-on sortir de ce dilemme des mots en disant que nous voulons préserver la dynamique d'un monde naturel dont nous faisons partie depuis peu?

Dans cette nature, il y a des pans entiers du vivant préservés de notre action grâce à leurs capacités d'adaptation, y compris aux activités humaines:

¹⁸Certains cherchent à sortir de cette contradiction en changeant le sens des mots, afin d'aller vers des notions réalistes. Ainsi, dans Dally [30], il est proposé de définir *sustainability* par *throughput from and back to nature*.

par exemple, les bactéries.

Le mot important, *s'adapter*, vient d'être ainsi explicité. Il nous faut préserver les facultés d'adaptation de la nature (et donc, les humains compris), et notamment en assurant les qualités qui permettent cette adaptation, telles que la résilience grâce à d'innombrables redondances et d'interactions endogènes de cette nature dont nous faisons partie.

4.2. Diminutions des rejets de gaz à effet de serre,

Pour ce qui est des variables de contrôle à notre disposition, il y a évidemment les diminutions des rejets de gaz à effet de serre. Mais les solutions, éventuelles, ne dépendent-elles pas des horizons du futur auxquels on se place (ainsi que des quantités et qualités de l'énergie espérée)?

La première moitié du XXI^{ème} siècle va-t-elle rester avant tout celle des carburants, du gaz naturel, du charbon, tous combustibles fossiles, sans autre choix pour les plus démunis pour sa partie prévisible (et de l'uranium 235¹⁹)?

Parmi les autres ressources d'énergies: quelles seront les possibilités de l'utilisation des énergies hydrauliques, des autres énergies renouvelables, dont l'énergie solaire (incident, 174 PW- absorbé, 86 PW, pour toute la Terre, océans et glaces inclus, soit 280 Mw- respectivement 140 MW- par humain)?

Quel est le niveau atteignable pour ces énergies renouvelables dans les deux prochaines décennies? Moins de 10 % des besoins énergétiques? Mais plus loin dans l'avenir? C'est l'ignorance, une fois de plus.

Un seul point en émerge: le niveau d'emploi des énergies renouvelables dépendra des découvertes et innovations scientifiques et techniques, ainsi que du niveau des prix et de l'intensité des peurs engendrées par le *Global Change*.

On ne parle pas ici du nucléaire civil puisque, à la demande de l'Académie des Sciences le premier auteur a écrit un rapport à sur le sujet (Académie des Sciences [8]), faisant le bilan neutre des performances et des nuisances – possibilités de dangers, des forces et des faiblesses. Mais le nucléaire est devenu l'objet d'une guerre de religions. Montaigne caractérisait une telle époque, où il vivait, en disant: *une saison gâtée*.

Revenons-en aux capacités humaines d'agir sur la variable de contrôle "rejets de gaz à effets de serre" (ainsi que sur les autres variables de contrôle comme celles contrôlant les autres nuisances de l'activité humaine, telles que les gaspillages de l'eau douce). Les progrès des sciences et des techniques devraient y contribuer.

Toutefois, la réalité n'est-elle pas de reconnaître qu'au début des années 1900, les esprits scientifiques les plus brillants, ne pouvaient avoir que des interrogations sur ce que serait la science en 2050 ou 2000. Notre ignorance sur les nouveautés de la science dans les prochains 50 ou 100 ans n'est-elle analogue? Il y a pourtant des différences essentielles: nous savons aujourd'hui ce

¹⁹L'énergie nucléaire représente le 17 % de l'électricité des pays de l'OCDE. Pour ce qui est des problèmes scientifiques, la faisabilité en est en cours d'avancement sur le plan international (Académie des Sciences [8]).

que sont les fondements scientifiques des sources d'énergies à base de fission, du fusion (voir Lovelock [81]), de solaire photovoltaïque et thermique, de piles à combustible, d'hydrogène, de biotechnologies, de géothermique.

4.3. Pouvons-nous parler d'un problème de contrôle?

Une bonne manière pour le lecteur étranger à la discipline scientifique du contrôle, d'en saisir le rôle central pour le contrôle de l'environnement, est de prendre connaissance des textes de J.L. Lions (voir par exemple [93], [82], [91], et [84])²⁰.

Évidemment, un élément important du système à contrôler, les activités humaines, dépend des hypothèses de croissance des populations humaines et d'usage des énergies. Quel est l'aspect stochastique?

On emploie le mot "scénario" dans des situations si diverses qu'un glossaire serait nécessaire. Les prévisions démographiques ont été tellement démenties par les faits comme l'ont montré les derniers recensements, que le mot le plus exact, pour beaucoup des éléments de la démographie et d'autres activités humaines du futur n'est-il pas à nouveau le mot *ignorance*?

4.4. Où agir pour améliorer l'environnement

Le déficit principal pour faire le diagnostic et savoir ainsi où agir pour améliorer l'environnement, c'est, aujourd'hui, celui des observations mises sous formes pertinentes et utilisables²¹ et donc directement et indirectement, celui de l'information²² au sens large (telle que nous l'avons défini, c'est à dire incluant, en particulier, toutes les connaissances qu'on tire des mesures brutes par les traitements mathématiques). Ainsi, à propos des problèmes d'instabilités glaces/circulation thermohaline/climat, vus dans Dautray, Díaz [34], Colman [27] écrit:

Better marine records are needed to define the timing and the location of thermohaline circulation changes during deglaciation and to further test whether circulation changes indeed coincide with the drainage rerouting events. Numerical models need to use the more recent estimates of drainage location, amount, and sequence to test the plausibility of postulated effects on the thermohaline circulation. Instability of climate and ice sheets during the ice ages may now be generally accepted, but we still have a way to go before we

²⁰Voir aussi le texte exposé par O. Pironneau [111] lors de la cérémonie à l'Académie des Technologies, en l'honneur de J. L. Lions et de Pierre Faurre.

²¹C'est ce que nous appelons "opérateur".

²²Le mot information désigne donc les mesures, ce qu'on en tire par toutes sortes de traitements, dont les inversions des équations, les assimilations de données, les analyses statistiques, les banques de données, les bases de données, les fichiers de données, les synthèses qu'on en fait, les sensibilités des paramètres, les seuils de changement de comportement des systèmes et des sous-systèmes, etc.

fully understand the processes that produce this instability or the controls and timing of what has occurred.

Pour être guidé dans cette recherche, les modèles et les simulations numériques fournissent aussi des concepts à tester, donc un guide pour savoir quelles observations rechercher.

Mais ensuite, pour agir et améliorer l'environnement il faudra, outre les informations citées ci-dessus (notamment sur ce qu'on doit faire en priorité, et avec quelle rigueur, de l'énergie²³ sous une forme directe ou indirecte (tout matériau, donc tout équipement, tous services, comportent de l'énergie, toute pratique agricole, tout pompage, transport et traitement d'eau, toute action médicale, etc.).

Le mathématicien, le physicien, le chimiste, l'homme des sciences de l'univers, etc. y ont aussi un rôle essentiel: les rendements de l'énergie solaire sont aujourd'hui de très bas ordre. Que de progrès à faire! L'énergie nucléaire est handicapée par des problèmes dont la faisabilité, dans le cadre qui lui a été donné, reste à démontrer en Europe: confinement des déchets, fission du plutonium et de ses descendants, sûreté nucléaire à accroître, etc. qui tous, demandent des modélisations avec des équations non linéaires et même non locales, des résultats fiables de simulations numériques, avec des méthodes de validations expérimentales inédites.

4.5. Hiérarchiser les priorités

Parmi tant d'actions possibles qui toutes, ont un coût en peine des hommes, que faire? L'inertie²⁴ des sociétés humaines et des phénomènes géophysiques fait qu'il faut maintenant nommer contraintes (dont le niveau n'est pas complètement inéluctables), les faits suivants:

- a) les évènements climatiques (d'origines internes et externes au système climatique) et notamment, les évènements extrêmes et leurs dérivés, leurs amplifications qui peuvent conduire à des changements brusques, voire instabilités;
- b) la variation du niveau des mers;
- c) l'accès à l'eau de qualité requise (voir de Marsily et ses références);
- d) la disponibilité de terres cultivables, face à l'érosion et à la salinisation, etc., en un mot, la dégradation des sols;
- e) la diminution de tant de forêts tropicales et de végétations;
- f) la *pollution*²⁵ de l'air, les villes malades du charbon, de la lignite brûlés, des rejets industriels, et des vents qui transportent ces pollutions;

²³Attention au cercle vicieux qui consiste à engendrer cette énergie en émettant pour ce faire des gaz à effets de serre.

²⁴Il faut que les scientifiques caractérisent ces inerties par des constantes de temps, des élasticités, des gammes d'incertitudes. Cela est traité dans Dautray [33].

²⁵Pollution vient du latin "polluere" et donc de "polluo": mouiller (de manière à salir) (Virgile: Enéide, Livre III, vers 234, désignant l'effet des lèvres des Harpyes sur les mets que s'étaient préparés les compagnons de Enée) d'où salir, souiller, profaner, séduire (une femme), déshonorer, attenter à l'honneur de ; dans le dictionnaire Gaffiot, pollution apparaît comme: proche de "luere laver", baigner. Ce n'est pas obligatoirement péjoratif: Montaigne l'emploie pour

- g) les mégavilles et leurs prolongements par les personnes démunies, les ruissellements;
- h) la *pollution* de l'espace proche et donc des sols, des lacs et des rivières²⁶;
- i) l'atmosphère des régions, au delà des villes, (dont les acidités réelles, et leurs transports) et donc par les transports du vent et des pluies;
- j) la *pollution* des sols et de l'enfoncement de corps toxiques dans les sous-sols et les aquifères;
- k) les eaux urbaines qui ont servi longtemps, de ressources d'eau, de dilution des déchets;
- l) les lacs et leur eutrophication;
- m) les océans et les mers et leurs proliférations de déchets d'origine humaine et d'espèces vivantes chassant les autres (c'est le cas du Bangladesh aujourd'hui, au delta du Gange, du Bramapotre et de la Meghna, richesse et malédiction de ce pays);
- n) les côtes *polluées* par le tar en telle mer, par les marées noires en telles autres;
- o) les eaux souterraines condamnées à la hausse de la concentration de tels corps mobiles dans les sous-sols;
- p) le monde microscopique compté pour rien dans toutes les réglementations (cf. radioprotection) dans la protection contre les radiations, contre les corps chimiquement actifs fabriqués par l'homme, alors qu'il est l'origine et toujours la base invisible, aujourd'hui compris, de toute la vie (dont notre nourriture) sur la Terre;
- q) la disparition de tant d'espèces au prix de la prolifération des espèces domestiquées comme utiles à l'homme, une véritable invasion du monde s'additionnant à celle des hommes (et donc avec)
- r) la perte irréversible d'une biodiversité (nous reconnaissons comme toujours que cette biodiversité est variable naturellement comme tout le système *Terre/Biosphère/Homme*, mais avec sa propre échelle de temps- celle de la biologie- incomparablement plus lente que l'échelle de temps des hommes, qui est celui commandé par leur culture, où une génération d'humain est l'unité

exprimer l'infériorité des hommes par rapport au divin. Le mot ne reviendra dans le monde entier que de la fin du XIX^{ème} siècle au milieu du XX^{ème} siècle à partir de l'anglais "to pollute", lui-même emprunté bien avant au français. Il est significatif des mentalités de notre civilisation occidentale en ce passage dans le XXI^{ème} siècle, de constater que déposer un corps étranger, inassimilable dans la nature, Terre, Air, Eaux ait pris le sens terriblement péjoratif de "polluer". Il est important pour comprendre notre époque, de savoir que ce mot a eu le sens de "profaner" depuis deux millénaires. Cela en dit long sur la montée de la déification de la nature depuis la fin du XVIII^{ème} siècle (de J. J. Rousseau aux origines du Romantisme, "La Nature est là qui t'invite et qui t'aime" Lamartine, jusqu'à la déification actuelle de la Nature, allant tellement de soi que c'est l'argument favori de la publicité).

²⁶Pour ne prendre qu'un exemple dû à la qualité de l'information et aux soucis d'amélioration de l'environnement de ce pays, 80 % des 50 000 km de rivières majeures de Chine ne contiennent plus de poissons . Par exemple, la rivière Jaune contient trop de chrome hexavalent, de cadmium, de produits toxiques rejetés des raffineries de pétrole, des usines chimiques de toutes catégories (y compris le papier) sans oublier tous les types de bactéries et de microorganismes, notamment issus de déjections humaines et animales (Wilson [128], page 38).

de temps: voir Braudel [15] pour les moyens et longs termes, toutefois encore infiniment plus rapides que l'évolution biologique);

s) les difficultés de la protection de la santé quand tant de cadres et d'équilibres naturels sont bouleversés (Schwartz [117]²⁷, Ezratty, Le Merrer [59]) et du cadre de vie, etc.;

t) la perte (irréversible?) d'une partie de la biodiversité, (Wilson [130], Heywood [70], Watson [127]) dans des écosystèmes divers, etc.

Pour agir sur tout cela, si divers, si contradictoire avec la démographie et les besoins des humains, il faut avoir des bases de jugement sur le bien-fondé de telles ou telles actions sur les variables de contrôle du système Terre-Biosphère-activités humaines.

Ces bases de jugement nécessitent: i) des critères d'optimisation du système ci-dessus, (avantages, inconvénients, performances, nuisances, possibilités de danger, incertitudes, ignorance, etc.; répartition des risques entre ceux qui peuvent y faire face et les démunis, entre les avantages d'aujourd'hui et de la décennie à venir, ii) des variables de contrôle, et donc iii) des modèles mathématiques validés par les observations tenant compte des contraintes et des états, où on se trouve et où on veut aller, avec leurs contraintes, leurs états, leurs domaines, leurs conditions aux limites, leurs conditions d'interface. Et tout cela n'est jamais bien défini.

Ces critères doivent contribuer à *hiérarchiser* les importances, les calendriers, les priorités et les urgences des actions, c'est à dire créer des relations d'ordre.

Dans cette confusion de sujets d'études et d'action, d'échelles de temps, de régions favorisées et défavorisées, de problèmes locaux et/ou globaux, parmi tous les outils mathématiques cités depuis le début de ce rapport, le plus important comme guide pour ordonner dans le temps, les régions, les sujets, les objectifs, les malheurs humains, mais aussi l'efficacité des remèdes (avec leurs effets pervers) est donc *l'ensemble des critères* de ces problèmes de contrôle assorti des contraintes, des sensibilités, des seuils d'irréversibilité, etc. Toutes les actions, leurs ordonnancement dans le temps et les régions, le poids de leurs inconvénients, l'obtention des ressources, le partage des sacrifices, des bénéfices, des avantages et des risques, découleront de ces critères. C'est donc ces critères qui seront, même implicites (et avec les contraintes associées), le fondement du dialogue entre les scientifiques et la société. C'est évidemment la société qui décidera.

REMARQUE 5 Cette longue liste de problèmes bien différents en apparence, est-

²⁷ À la page 238 il dit: "Ce mal protéiforme, en dépit de ses propriétés extraordinairesne constitue qu'un exemple parmi d'autres, de ces nouvelles maladies infectieuses... Durant cette fin de millénaire, l'humanité en a connu de nombreuses à commencer par le Sida. Toutes ont été dues à des agents infectieux maintenus depuis longtemps dans un réservoir naturel, mais auxquels les changements dans nos modes de vie ont donné l'occasion de se répandre dans l'humanité". Le livre se termine en rejoignant le sujet de cet article: "Demain, une meilleure prise en compte des interactions entre l'espèce humaine et l'environnement nous permettra peut-être, non seulement de dépister les nouvelles maladies, mais de prévenir leur émergence".

elle soluble, dans les cadres nationaux, internationaux? Dans quelles échelles de temps?

La longue liste ci-dessus, de nuisances, de détriments, grosse de possibilités de dangers, qui n'est pas exhaustive, des -problèmes de l'environnement, peut paraître bien au delà des possibilités de solutions humaines. On pourrait toutefois citer des éléments relatifs aux possibilités d'action pour donner au lecteur les moyens d'élaborer lui-même son jugement global personnel:

Tous ces problèmes d'environnement (en se restreignant à ceux qui sont locaux) sont solubles avec les outils scientifiques et techniques existant, ou en cours d'achèvement de démonstration de faisabilité, pour ce qui est des seuls pays de l'OCDE et ceux qui ont rejoint leur niveau scientifique et technique. Est-ce possible de se restreindre en se bornant à résoudre les problèmes de leur propre pays?²⁸ Pour ce qui est des problèmes globaux (comme les problèmes climatiques), une contribution scientifique et technique substantielle pourrait contribuer à initier le processus vertueux.

Mais ne doit-on pas ajouter que presque aucun de nos seuls pays européens n'est unanime pour choisir la voie à suivre. Chacun donne plutôt le spectacle d'une guerre de religions. Les luttes entre les "unités actives"²⁹ semblent dominer l'accès à l'information et les réalités des débats. La compétence ne peut pas accéder à la diffusion de l'information qu'elle détient et donc encore moins au débat.

Ces problèmes d'environnement ne sont pas solubles, aujourd'hui pour l'ensemble du monde. Du moins avec les outils scientifiques et techniques d'aujourd'hui, dans une durée qu'on pourrait planifier avec des étapes et des obligations de résultat concret, vérifiable tout le long de la progression espérée.

Y aura t-il d'autres pays qui rejoindront ce niveau scientifique et technique repéré par celui des pays de l'OCDE dans les prochaines décennies, avec leur culture et leurs méthodes nationales? Ceci doublerait ou triplerait la population techniquement à l'œuvre dans les problèmes d'environnement avec des outils puissants. Les tâches de ces pays accédant au stade industrialisé, sont immenses avec leurs populations dépassant le milliard d'habitants. Beaucoup de faits très concrets, vérifiables, semblent solidement montrer que cette émergence est en cours. Quelles sont les constantes de temps nécessaires à de telles évolution scientifiques et techniques? Des décennies? Une génération ou plus? Ils seraient un exemple entraînant par son succès les autres pays encore plongés dans la spirale terrible du sous-développement.

La population et sa répartition d'âge, auront peut-être, alors sensiblement augmenté chez ces autres pays encore en cours de développement, c'est-à-dire,

²⁸ Soit en tout, environ un sixième à un cinquième de la population de la Terre.

²⁹ Définition de l'unité active selon Montbrial [105] "Une unité active est un groupe humain dont les membres individuels (les personnes physiques qui appartiennent à ce groupe) sont liées: 1.- par un système stable de pratiques, de références et de croyances, autrement dit, une Culture. . . , 2.- par une organisation, effective sur l'ensemble du groupe, et tendue vers des buts à la fois à l'intérieur et à l'extérieur. . . ."

encore plongées dans le malheur?

Quelle est la constante de temps de cette dernière progression en éducation, formation professionnelle, technique et en investissements d'équipements? Faut-il la compter en générations? On en revient toujours à comparer des échelles de temps.

Il va de soit qu'il est impossible, aujourd'hui, pour un groupe humain de s'isoler³⁰, de quelque manière que ce soit, d'abord moralement, humainement impossible dans les faits, dans ce XXI^{ème} siècle de droits de l'homme, de respect de l'autre, de compassion, de charité, de miséricorde, et pour tout résumer, de démocratie.

C'est d'ailleurs tout simplement techniquement impossible, dans ce monde de communications, de transports universels, de secours aux malheureux dont les blessures de la faim, de la soif, de la guerre, etc, sont visibles par la télévision et entainent l'opinion publique, de s'enfermer dans une forteresse,, comme le proposent avec inconscience des esprits loin des réalités de ce monde de 2002.

C'est donc sur un front mondial qu'il semblerait falloir agir. Ce n'est possible qu'en s'appuyant sur ces populations démunies. Cela passe par l'éducation, la formation aux métiers concernés, l'aide et les dons de techniques, en un mot l'aide au développement (pompes pour l'eau, etc.). Pour reprendre une citation de Cervantes dans la traduction Viardot pour les bucherons: *celui qui a une hache, a un manteau*.

Mais quelle seront les constantes de temps pour ces diverses populations? Quels éléments humains commanderont ces constantes de temps, et d'abord la volonté propre des acteurs?

Comment commencer à faire quelque chose de positif dans ce projet gigantesque, de durée bien supérieure à la vie professionnelle humaine, sur lequel tout les acteurs se déchirent comme dans des guerres de religion, sauf sur un point : Ne jamais tenir compte des avis des scientifiques compétents, sauf pour des incantations dans des réunions internationales médiatisées, sans lendemain réel ? C'est ce que nous proposons plus tarde, en répétant mon proverbe chinois que J. L. Lions aimait tant: *il vaut mieux allumer, même une toute petite lanterne, que de pester contre l'obscurité*³¹. C'est l'équivalent du: *Cela est bien dit, répondit Candide, mais il faut cultiver notre jardin* (Candide, Voltaire, Collection de la Pleïade, Gallimard)

Directement ou indirectement, deux clés des périls et des remèdes sont l'énergie libérée par les hommes et l'information au sens large qui inclut toutes connaissances, leurs traitements, les diagnostics, leurs cibles, sous toutes ses formes souvent combinées (par exemple, pour éviter la déforestation).

Il nous faut des energies (chacune adaptée à son utilisation) sans émissions de gaz a effect de serre. Certaines existent déjà à l'échelle industrielle, d'autres se dessinent. A nous de maîtriser les points non terminés et les effets pervers: elles en ont toutes. Nous ignorons ce que ce XXI^{ème} siècle nous apportera du point de vue scientifique en matière d'énergie. Mais nous savons qu'il faut

³⁰Y compris vis-à-vis des migrations, même massives.

³¹J. L. Lions renvoyais alors à la lecture de *La muraille de Chine* Kafka.

plusieurs décennies pour passer des procédés scientifiques à la production industrielle d'énergie. Dans les deux étapes, le mathématicien a un rôle substantiel à jouer.

4.6. Une contribution substantielle

Les mathématiciens et les savants de l'environnement peuvent y amener une contribution substantielle depuis différentes échelles: la molécule (spectroscopie, moments électriques dipolaires, taux de collisions inélastiques), jusqu'à celle des grands transferts océaniques de masses, d'énergie (faire le bilan d'énergie de la circulation thermohaline et la part de ses différentes sources), de chaleur, de quantité de mouvement, de vorticité, de *mixing*, de salinité, etc. , des dynamiques atmosphériques, de la dynamique des écosystèmes, des grands cycles biogéochimiques (voir les références Duplessy et coauteurs [57], [58]) -et à celle de la variabilité du soleil.

Ils peuvent y amener une contribution substantielle aussi pour les applications concernant: l'air des villes (énergie), l'accès à l'eau (dont les pompes et le transport), à son traitement et à sa conservation (énergie), aux terres agricoles (énergies directes et indirectes) et aux industries agroalimentaires (énergie et information), aux transports (énergie), à la cuisson, (énergie), au chauffage (énergie), aux déchets solides et liquides (sous-produits de l'énergie, à retraiter avec de l'énergie), aux marées noires (énergies que certains disent "bonnes"), à la pollution des océans (énergies), des lacs, des fleuves, des puits, de l'irrigation et maintenant des aquifères (de Marsilly [101], [102]), etc.

On voit, un facteur derrière ou directement dans tous ces sujets, les énergies et des informations qui, comme la langue d'Esopé, sont la source de tant de bien et de tant de mal.

4.7. Le plan scientifique et technique

Pour contribuer à résoudre tout cela, il faudrait sur le plan scientifique et technique des connaissances (cela fait partie de ce que nous appelons *l'information*), des procédés agricoles, industriels (donc l'emploi d'énergie) etc., des services (basés sur l'énergie) et une volonté commune à chaque niveau, de la commune rurale à l'ensemble des pays.

Un des rôles des scientifiques est d'en montrer le chemin scientifique et technique d'une manière claire et convaincante, mais sans plaider. Notre seul rôle est de faire un diagnostic scientifique neutre, de dire les pistes d'action scientifiques et techniques. Offrir pour chaque problème diverses solutions entre lesquelles le public choisira.

Tout cet exposé se résume en peu de mots. L'étude de problèmes modèles nous permettra de savoir où travailler pour mieux continuer à améliorer la connaissance des caractéristiques opératoires du système de l'environnement examiné et de déterminer les outils nécessaires pour agir au mieux sur les variables de commande.

Derrière la diversité, il y aura toujours, au moins, deux outils universels: l'énergie et l'information: c'est sur eux qu'il nous faut agir. Notre action possible peut être substantielle si nous le voulons.

Quelques exemples des mots clés mathématiques liées a ce programme: échelles de temps, contrôle optimal, assimilation des données, Navier-Stokes, évolutions, contre-réactions, stabilité, instabilité, dérive, changements " rapides », cycles régulations, systèmes dynamiques, sous-systèmes et variables de contrôle ou d'action, non stationnarités, oscillations, attracteurs, variétés inertielles, système adjoint, équations primitives, *Rossby asymptotics*, attracteurs, discontinuités, problèmes bien posés, etc.

5. Le problème de von Neumann

Nous formulerons le problème de von Neumann mentioné dans l'introduction en termes des *modèles de bilan énergétique* EBM, posé, indépendamment, en 1969 par M. I. Budyko [20] et W. D. Sellers [118] (un modèle pionnier est dû à S. Arrhenius en 1896). Un tel type de modèles climatologiques a un caractère diagnostique et prévoient pour comprendre l'évolution du climat global pour échelle longue du temps. Sa caractéristique principale est sa sensibilité élevée à la variation des paramètres solaires et terrestres. Ces modèles ont été employés dans l'étude de la *théorie de Milankovitch* des glaces-âges (voir, par exemple Mengel, Short, North [103], Díaz [45]). Les modèles étudient une distribution de température, $y(x, t)$, qui est ponctuellement exprimé à l'aide de plusieurs processus de moyennisation dans l'espace (la variable spatiale x est dans un petit voisinage $B(x)$ de la surface de la terre) et le temps (sur un petit intervalle $(t - \tau, t + \tau)$)

$$y(x, t) = \frac{1}{2\tau |B(x)|} \int_{t-\tau}^{t+\tau} \int_{B(x)} T(a, s) da ds.$$

Le modèle est obtenu à partir de l'équation de thermodynamique des équations primitives de l'atmosphère par moyennisation (voir, par exemple, Lions, Temam, Wang [96] pour une étude mathématique de ces équations et Kiehl [75] pour l'application des moyennes dans ce contexte). Plus simplement, le modèle peut être formulé en employant le bilan énergétique sur la surface de la terre: variation du flux d'énergie interne = $R_a - R_e + D$ où R_a (respectivement R_e) représente l'énergie solaire absorbé (resp. le flux terrestre émis d'énergie) et D est la diffusion horizontale de la chaleur. En identifiant la surface de la terre avec une variété Riemannienne compacte sans frontière \mathcal{M} (par exemple, la sphère S^2), la distribution de la température, $y(x, t)$, devient une fonction des variables spatiales x et du temps t . L'échelle de temps est considérée relativement longue. Néanmoins, dans les *modèles saisonniers* une plus petite échelle de temps est présentée afin d'analyser l'effet des cycles saisonniers dans le climat et en particulier dans la formation des callotes polaires. *L'énergie absorbée*

R_a dépend du *coalbedo planétaire* β . La fonction de coalbedo représente la fraction du flux entrant de rayonnement qui est absorbé par la surface. Dans des zones couvertes de glace, la réflexion est plus grande que dans les océans, et donc, le coalbedo est plus petit. On observe qu'il y a une transition pointue entre les zones du haut et bas coalbedo. Dans les modèles de climat de bilan énergétique, un changement fondamental du coalbedo est produit dans un voisinage d'une température critique pour laquelle la glace devient blanche: habituellement considéré que $y = -10^0C$. Le coalbedo peut être modelisé par différentes fonctions croissantes (discontinues dans le cas du modèle de Budyko et Lipschitz continue pour le modèle de *Sellers*). Une paramétrisation plus réaliste d'albedo peut être obtenue en supposant que la fonction de coalbedo $\beta(x, y)$ dépend également des coordonnées spatiales de chaque point de la Terre (particulièrement sur sa latitude: voir la Section 3.3 de [68])

$$\beta(x, u) = \begin{cases} \beta_i(x) & u < u_i, \\ \beta_i(x) + \left(\frac{u - u_i}{u_w - u_i} \right) (\beta_w(x) - \beta_i(x)) & u_i \leq u \leq u_w, \\ \beta_w(x) & u > u_w, \end{cases} \quad (6)$$

avec $0 < u_i < u_w < 1$ (les valeurs de coalbedo pour la zone couverte de glace et pour la zone libre de glace peuvent être estimées par l'intermédiaire des satellites). Pour simplifier la présentation nous supposons que la variation interne de flux d'énergie est simplement donnée par le produit de la capacité de chaleur c (une constante donnée qui peut être supposée égale à un par un changement d'échelle des variables) et la dérivée partielle de la température y par rapport au temps. Dans les deux modèles, l'énergie absorbée est donnée par $R_a = QS(x)\beta(x, y)$, où $S(x)$ est la *fonction d'insolation* et Q est la *constante solaire*.

La surface (l'atmosphère) de la terre, chauffée par le soleil, reemis le flux solaire absorbé comme une onde longue infrarouge. Cette énergie R_e est représentée, dans le modèle de Budyko, selon la loi de refroidissement de Newton, c.-à-d.,

$$R_e = By + C. \quad (7)$$

Ici, B et C sont des paramètres positifs, qui sont obtenus par observation, et peuvent dépendre de l'effet de serre (cependant, dans le modèle de *Sellers*, R_e est exprimé selon la loi de Stefan - Boltzman $R_e = \sigma y^4$, où σ est appelée la constante d'*émission* et où, maintenant, u est en Kelvin degrés).

La diffusion de la chaleur D est donnée par la divergence du flux F_c de conduction de la chaleur et du flux F_a d'advection de la chaleur. La loi de Fourier donne $F_c = k_c \nabla u$, où k_c est le *coefficient de conduction*. Le flux de la chaleur d'advection est donné par $F_a = \mathbf{v} \cdot \nabla u$ et on sait (voir par exemple Ghil, Childress [63]) que, au niveau de la balance planétaire, il peut être modelisé en termes de $k_a \nabla u$ pour un coefficient de diffusion approprié k_a . Ainsi, $D = \text{div}(k \nabla u)$ avec $k = k_c + k_a$. Dans la plupart des modèles, le coefficient de diffusion k a été considéré comme constante positive.

Une étude mathématique des actions sur les émissions peut être obtenue dans Díaz ([43]). Pour ce qui concerne la conjecture de von Neumann, une formulation possible de l'action sur le coalbedo peut être la suivante:

$$\beta(x, u; v) = \begin{cases} \beta_i & u < u_i, \\ \beta_i + \left(\frac{u - u_i}{u_w - u_i} \right) (\beta_w + v(x)\chi_\omega(x) - \beta_i) & u_i \leq u \leq u_w, \\ \beta_w + v(x)\chi_\omega(x) & u > u_w. \end{cases} \quad (8)$$

avec $\beta_w > \beta_i$ constantes et avec $\chi_\omega(x)$ la fonction caractéristique d'une petite région où la modification d'albedo a lieu. Notons que $\beta(x, u; v) = \beta(u) + v(x)\chi_\omega(x)H(u)$ avec

$$H(u) = \begin{cases} 0 & u < u_i, \\ \left(\frac{u - u_i}{u_w - u_i} \right) & u_i \leq u \leq u_w, \\ 1 & u > u_w. \end{cases} \quad (9)$$

Quelques conditions additionnelles sont nécessaires afin de simplifier la formulation de la question. La première est que nous supposons que les modifications locales sur l'albedo ne présentent aucun changement important sur la région occupée par le callote polaire et le perpetuum glace, c.-à-d. sur l'ensemble $\mathcal{I} = \{x \in \mathcal{M} : y(x, 0) \geq u_i\}$ (nos arguments seront valides également pour le cas opposé dans lequel les modifications sont faites uniquement sur un voisinage de la région $\{x \in \mathcal{M} : y(x, 0) \leq u_w\}$). En conséquence, dans le reste de cette section nous supposons que $\omega = \mathcal{M} - \mathcal{I}$.

Étant donné une fonction de la température desirable $y^T(x)$ (par exemple, la distribution de la température avant l'ère industrielle), nous considérons le problème suivant. Trouver une fonction $v(x)$ telle que $y(T : v) = y^T$, avec $y(T : v)$ solution de (\mathcal{P}_v)

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + By + C = QS(x)(\beta(y) + v(x)H(y)) & \text{dans } (\mathcal{M} - \mathcal{I}) \times (0, T), \\ y = u_i & \Gamma \times (0, T) \\ y(0, \cdot) = y_0(\cdot) & \text{sur } (\mathcal{M} - \mathcal{I}), \end{cases}$$

où $\Gamma = \partial\mathcal{I}$. Notre but principal est de trouver une telle fonction à l'aide d'une application appropriée d'un argument de point fixe.

Nous précisons que les contrôles v (c.-à-d. la modification d'albedo) doivent satisfaire la contrainte $\beta(y) + v(x)H(y) \in [0, 1]$. Si, en particulier, nous voulons atteindre une fonction désirée de la température $y^T(x)$ considérablement plus petite que celle du présent (c.-à-d. sans action volontaire: $v = 0$) alors les contrôles appropriées doivent prendre des valeurs négatives (autrement il y aura une croissance de la température). Ainsi, nous supposons que

$$v(x) \in [-\mu, 0], x \in \mathcal{M} - \mathcal{I}, \text{ avec } \mu = \beta_w - \beta_i. \quad (10)$$

Notons que par le *principe forte du maximum* nous pouvons supposer que $y(x, t : v) > u_i$ pour n'importe quelle contrôle v et *presque chaque point* $(x, t) \in (\mathcal{M} - \mathcal{I}) \times (0, T)$.

Il est important de voir que l'état désiré $y^T(x)$ doit être en correspondance avec les limitations sur les contrôles. Ainsi, par le *principe du maximum*, si v vérifie (10) alors nécessairement

$$y(T : -\mu) \leq y(T : v) \leq y(T : 0) \text{ dans } \mathcal{M} - \mathcal{I},$$

et ainsi si $y(T : v) = y^T$ nous obtenons la condition nécessaire sur y^T

$$y(T : -\mu) \leq y^T \leq y(T : 0) \text{ dans } (\mathcal{M} - \mathcal{I}).$$

Notre but est d'expliciter une certaine classe de fonctions y^T dans l'ensemble des états désirés correspondants à ces contrôles. Notons que pour $\gamma, \delta > 0$ fixés, si nous supposons $y^T = u_i$ sur Γ , l'existence du contrôle cherché $v(x)$ est réduite à l'existence d'un point fixe pour l'opérateur $v \rightarrow \mathcal{T}v$ donné par

$$\frac{y_t(T : v) + By(T : v) + C + QS(x)(v(\gamma y(T : v) + \delta) - \beta(y(T : v))) - \Delta y^T}{QS(x)(H(y(T : v)) + \gamma y(T : v) + \delta)},$$

$x \in \mathcal{M} - \mathcal{I}$.

En effet, si v est un tel point fixe nous obtenons que $\Delta y^T = \Delta y(T : v)$ et les fonctions y^T et $y(T : v)$ satisfont les mêmes conditions de frontière. Ainsi nous déduisons que $y^T = y(T : v)$ dans $\mathcal{M} - \mathcal{I}$.

Notons que les paramètres γ et $\delta > 0$ ont été introduits afin d'éviter l'indétermination surgissant quand le dénominateur de $\mathcal{T}v$ disparaît (une raison plus technique sera mentionnée plus tard). Nous prendrons $\gamma > 0$ suffisamment grande pour assurer que la fonction $v \rightarrow v(\gamma y(T : v) + \delta) - \beta(y(T : v))$ soit non décroissante quand v vérifie (10). Par le principe du maximum $y(T : v)$ dépend de façon monotone de v et ainsi il sera suffisant supposer que

$$\gamma > \frac{\beta_w - \beta_i}{u_w - u_i}. \quad (11)$$

Pour conserver positif le dénominateur de \mathcal{T} nous supposons

$$\delta > \gamma(-u_i). \quad (12)$$

Un résultat donnant une réponse positive à la conjecture de von Neumann est le suivant:

THÉORÈME 1 *Supposons (11), (12) et soit $y_0 \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathcal{M} - \mathcal{I}})$ vérifiant la condition de compatibilité $y_0 = u_i$ sur Γ et tel que*

$$\Delta y_0 - By_0 - C + QS(x)\beta(y_0) \leq 0 \text{ sur } \mathcal{M} - \mathcal{I}. \quad (13)$$

Soit $y^T \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathcal{M}-\mathcal{I}})$ tel que $y^T = u_i$ sur Γ et satisfaisant que

$$\Delta y(T : 0) \leq \Delta y^T \text{ sur } \mathcal{M} - \mathcal{I}, \quad (14)$$

$$\Delta y^T \leq \Delta y(T : 0) + QS(x)(\beta_w - \beta_i)(H(y(T : 0)) + \delta) \text{ sur } \mathcal{M} - \mathcal{I}. \quad (15)$$

Alors, il existe $v \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathcal{M}-\mathcal{I}})$ avec $v(x) \in [-\mu, 0]$, $\forall x \in (\mathcal{M} - \mathcal{I})$ tel que $y(T : v) = y^T$ dans $\mathcal{M} - \mathcal{I}$.

DÉMONSTRATION. Montrons que l'opérateur \mathcal{T} est monotone mais décroissant. Soient $v_1 \leq v_2$. Alors

$$\begin{aligned} y_{1t} - \Delta y_1 + B y_1 + C &= QS(x)(\beta(y_1) + v_1(x)(H(y_1) + \delta)) \\ &\leq QS(x)(\beta(y_1) + v_2(x)(H(y_1) + \delta)) \end{aligned}$$

et, par le principe de comparaison pour le problème satisfait par y_2 , nous déduisons que $y_1 \leq y_2$ sur $(\mathcal{M} - \mathcal{I}) \times (0, T)$. Voyons que, en fait, nous avons également que $y_{1t} \leq y_{2t}$. Pour faire cela, par dérivation dans l'équation nous obtenons

$$y_{1tt} - \Delta y_{1t} + B y_{1t} = QS(x)[\beta'(y_1) + v_1(x)H'(y_1)]y_{1t}.$$

Par le principe du maximum et l'hypothèse (13) nous obtenons $y_{1t}(t, v) \leq 0$ pour n'importe quel v et presque chaque $t \in (0, T)$. Par conséquent, comme $\beta'(r) + v_1(x)H'(r)$ est décroissante quand $v(x) \in [-\mu, 0]$ et $r \geq u_i$, nous en déduisons que

$$\begin{aligned} y_{1tt} - \Delta y_{1t} + B y_{1t} &= QS(x)[\beta'(y_1) + v_1(x)H'(y_1)]y_{1t} \\ &\leq QS(x)[\beta'(y_2) + v_1(x)H'(y_2)]y_{1t}. \end{aligned}$$

D'autre part, comme $y_{1t} = y_{2t} = 0$ sur $\Gamma \times (0, T)$ et $y_{1t}(0, x) \leq y_{2t}(0, x)$ pour $x \in \mathcal{M} - \mathcal{I}$, du principe de comparaison, nous en concluons que $y_{1t} \leq y_{2t}$ dans $(\mathcal{M} - \mathcal{I}) \times (0, T)$. Maintenant, pour vérifier que \mathcal{T} est monotone il est suffisant d'observer que de (11) nous déduisons

$$\begin{aligned} &y_t(T : v) + B y(T : v) + C + QS(x)(v(\gamma y(T : v) + \delta) - \beta(y(T : v))) \\ &\leq y_t(T : 0) + B y(T : 0) + C - QS(x)\beta(y(T : 0)) \\ &= \Delta y(T : 0) \leq \Delta y^T, \end{aligned}$$

et alors, le numérateur de \mathcal{T} est ≥ 0 et la conclusion est obtenue à partir de la monotonie de $H(y(T : v))$ par rapport v . Maintenant, la condition (14) implique que $\mathcal{T}(-\mu) \leq 0$ et l'hypothèse (15) conduit à $-\mu \leq \mathcal{T}(0)$. Alors, l'"intervalle des fonctions" $[-\mu, 0] = \{w \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathcal{M}-\mathcal{I}}) \text{ avec } -\mu \leq w(x) \leq 0, \forall x \in \mathcal{M} - \mathcal{I}\}$ est invariant par \mathcal{T} , c.-à-d. $\mathcal{T}([- \mu, 0]) \subset [- \mu, 0]$.

Finalement, la régularité $L^\infty(0, T : W^{2,p}(\mathcal{M} - \mathcal{I})) \cap H^1(0, T : L^\infty(\mathcal{M} - \mathcal{I}))$ de la solution, pour n'importe quel $p > 1$, implique que \mathcal{T} est relativement compact et la conclusion est obtenue par le théorème de point fixe d'Amann [11]. \square

REMARQUE 6 Pour quelques résultats relatifs pour d'autres problèmes inverses voir Choulli [24] et Zeghal [131] (voir aussi d'autres travaux précédents dans leur liste de références). Nous précisons également que les itérations successives de l'opérateur \mathcal{T} appliqué à $v = 0$ et $v = -\mu$, respectivement, donne un algorithme constructif pour les points fixes de \mathcal{T} (non nécessairement uniques).

REMARQUE 7 Notons que, en prenant l'opérateur inverse du Laplacien (avec la condition aux limites donné dans (P_v)) dans les deux termes de la condition (14) nous obtenons que nécessairement

$$\begin{aligned} y(T : 0) - \theta &\leq y^T \leq y(T : 0) \text{ dans } (\mathcal{M} - \mathcal{I}), \text{ avec} \\ \theta(x) &:= (\beta_w - \beta_i)(-\Delta)^{-1}[QS(x)(H(y(T : 0)) + \delta)]. \end{aligned}$$

6. Stratégie de Stackelber-Nash pour la contrôlabilité approchée

Soit A un opérateur elliptique de second ordre sur Ω :

$$A\varphi = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{i,j}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^N a_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_0(x)\varphi, \quad (16)$$

où tous les coefficients sont suffisamment réguliers et avec

$$\sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^N \xi_i^2, \alpha > 0, x \in \overline{\Omega}. \quad (17)$$

Nous supposons que l'équation d'état est donnée par

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = v\chi + \sum_{i=1}^N w_i \chi_i \quad (18)$$

où

$$\left. \begin{array}{l} \chi \text{ est la fonction caractéristique de } \mathcal{O} \subset \Omega \\ \chi_i \text{ est la fonction caractéristique de } \mathcal{O}_i \subset \Omega. \end{array} \right\} \quad (19)$$

Le contrôle $v(x, t)$ du *leader* est distribué sur \mathcal{O} et le contrôle $w_i(x, t)$ du *follower* " i " est distribué sur \mathcal{O}_i . Nous supposons que l'état initial est

$$y(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (20)$$

Comme le système est linéaire il n'y a aucune perte de généralité en supposant que l'état initial est nul, comme il n'y a aucune restriction en supposant dans (18) qu'il n'y a pas aucune perte de généralité en supposant qu'il n'y a pas de term source dans (18). Nous supposons que les conditions aux limites sont

$$y = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T). \quad (21)$$

Nous nous donnons maintenant des fonctions ρ_i tels que

$$\left. \begin{array}{l} \rho_i \in L^\infty(\Omega), \rho_i \geq 0, \\ \rho_i = 1 \text{ dans un sous-ensemble } \mathcal{G}_i \subset \Omega \end{array} \right\} \quad (22)$$

et nous définissons la fonction coût J_i par

$$J_i(v; w_1, \dots, w_N) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} w_i^2 dx dt + \frac{\alpha_i}{2} \|\rho_i y(T; v, \mathbf{w}) - \rho_i y^{\mathbf{T}}\|^2, \quad (23)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme de $L^2(\Omega)$. Nous supposons que $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$, $w_i \in L^2(\mathcal{O}_i \times (0, T))$ et que $y(x, t; v, \mathbf{w})$ est la solution de (18), (20), (21).

Étant donné $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$, nous définissons maintenant

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{w} = \{w_1, \dots, w_N\}, \text{ équilibre de Nash pour les} \\ \text{fonctions coût } J_1, \dots, J_N \text{ données par (23).} \end{array} \right\} \quad (24)$$

Nous prouverons que cet équilibre de Nash peut être défini en fonction de v :

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(v) \text{ ou bien } w_i = w_i(v), i = 1, \dots, N. \quad (25)$$

Nous remplaçons alors w_i par $w_i(v)$ dans (18). ce qui donne

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = v\chi + \sum_{i=1}^N w_i(v)\chi_i \quad (26)$$

avec y satisfaisant (20) et (21). Le système (26), (20) et (21) admet une solution unique $y(x, t; v, \mathbf{w}(v))$. Nous nous le verrons plus tard. Le système (26), (20) et (21) admet une solution unique $y(x, t; v, \mathbf{w}(v))$. On va démontrer le suivant resultat:

THÉORÈME 2 *Supposons que*

l'ensemble d'inégalités (4) admet une solution unique (un équilibre de Nash). (27)

Alors, si v varie dans $L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$, les fonctions $y(\cdot, T; v, \mathbf{w}(v))$ décrivent un sous-ensemble dense de $L^2(\Omega)$. En d'autres termes

$$\left. \begin{array}{l} \text{il y a contrôlabilité approchée du système quand} \\ \text{une stratégie du type de Stackelberg-Nash est suivie.} \end{array} \right\} \quad (28)$$

6.1. Une démonstration non constructive du Théorème 2

Nous commençons par quelques considérations sur l'équilibre de Nash. Nous avons (4) si et seulement si

$$\int_0^T \int_{O_i} w_i \widehat{w}_i dx dt + \alpha_i \int_{\Omega} \rho_i^2(y(T; v, \mathbf{w}) - y^T) \widehat{y}_i(T) dx = 0, \forall \widehat{w}_i, \quad (29)$$

où \widehat{y}_i est défini par

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \widehat{y}_i}{\partial t} + A \widehat{y}_i = \widehat{w}_i \chi_i, \\ & \widehat{y}_i(0) = 0, \text{ dans } \Omega, \widehat{y}_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Afin d'exprimer (29) sous une forme commode, nous présentons l'état adjoint p_i défini par

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{\partial p_i}{\partial t} + A^* p_i = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ & p_i(x, T) = \rho_i^2(x)(y(x, T; v, \mathbf{w}) - y^T(x)) \text{ dans } \Omega, \\ & p_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

où A^* est l'adjoint de A . Si nous multiplions (31) par \widehat{y}_i et si nous intégrons par parties, nous trouvons

$$\int_{\Omega} \rho_i^2(y(T; v, \mathbf{w}) - y^T) \widehat{y}_i(T) dx = \int_0^T \int_{\Omega} p_i \widehat{w}_i \chi_i dx dt,$$

de sorte que (29) devient

$$\int_0^T \int_{O_i} (w_i + \alpha_i p_i) \widehat{w}_i dx dt = 0, \forall \widehat{w}_i,$$

c'est à dire

$$w_i + \alpha_i p_i \chi_i = 0. \quad (32)$$

Alors, si $\mathbf{w} = \{w_1, \dots, w_N\}$ est un équilibre de Nash nous avons

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial y}{\partial t} + Ay + \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i \chi_i = v \chi, \\ & -\frac{\partial p_i}{\partial t} + A^* p_i = 0, i = 1, \dots, N, \\ & y(0) = 0, p_i(x, T) = \rho_i^2(x)(y(x, T; v, \mathbf{w}) - y^T(x)) \text{ dans } \Omega, \\ & y = 0, p_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T). \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Nous rappelons qu'ici nous supposons l'existence et l'unicité d'un équilibre de Nash (hypothèse (27)). Nous reviendrons sur cela plus tard.

DEMONSTRATION DU THÉORÈME 2. Nous voulons prouver que l'ensemble décrit par $y(\cdot, T; v)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, où y est la solution donnée par (33) et quand v varie dans $L^2(\mathcal{C} \times (0, T))$. On peut supposer sans perte de généralité que $y^T \equiv 0$. Soit f donnée dans $L^2(\Omega)$ et supposons que

$$(y(\cdot, T; v), f) = 0, \forall v \in L^2(\Omega). \quad (34)$$

Nous voulons prouver que $f \equiv 0$. Soit $\{\varphi, \psi_1, \dots, \psi_N\}$ la solution du système adjoint

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A^* \varphi &= 0, \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + A \psi_i &= -\alpha_i \varphi \chi_i, \\ \varphi(T) &= f + \sum_i \psi_i(T) \rho_i^2, \\ \psi_i(0) &= 0, \\ \varphi = 0, \psi_i = 0 &\text{ sur } \partial\Omega \times (0, T). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Nous multiplions la première (resp. la seconde) équation de (35) par y (resp. p_i). Nous obtenons

$$\left. \begin{aligned} -(f + \sum_i \psi_i(T) \rho_i^2, y(T)) + \int_0^T \int_{\Omega} \varphi \left(\frac{\partial y}{\partial t} + Ay \right) dx dt + \sum_i (\psi_i(T), p_i(T)) + \\ + \sum_i \int_0^T \int_{\Omega} \psi_i \left(-\frac{\partial p_i}{\partial t} + A^* p_i \right) dx dt = - \sum_i \alpha_i \int_0^T \int_{\Omega} \varphi p_i \chi_i dx dt. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

En utilisant (33) (où $y^T \equiv 0$) (36) est réduit à

$$-(f, y(T)) + \int_0^T \int_{\Omega} \varphi v \chi dx dt = 0.$$

Par conséquent si (34) vérifiée, alors

$$\varphi = 0 \text{ sur } \mathcal{O} \times (0, T). \quad (37)$$

En utilisant le théorème de l'unicité de Mizohata (voir Mizohata [104] ou Saut et Scheurer [116]: ici, seule la régularité des coefficients de A est nécessaire) on obtient de (35)₁ et (37) que

$$\varphi = 0 \text{ sur } \Omega \times (0, T). \quad (38)$$

Alors (35)₂, (35)₄ et $\psi_i = 0$ sur $\partial\Omega \times (0, T)$ impliquent que

$$\psi_i = 0 \text{ sur } \Omega \times (0, T), \forall i = 1, \dots, N, \quad (39)$$

de sorte que (35)₃ donne $f \equiv 0$.

6.2. Un critère pour l'existence et l'unicité des équilibres de Nash

Nous considérons les fonctionnelles (23). Définissons

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H}_i &= L^2(\mathcal{O}_i \times (0, T)), \mathcal{H} = \prod_{i=1}^N \mathcal{H}_i, \\ L_i \widehat{w}_i &= \widehat{y}_i(T) \text{ (cf. (30)) ce qui définit } L_i \in L(\mathcal{H}_i; L^2(\Omega)). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Puisque v est fixée, on peut écrire

$$y(T; v, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^N L_i w_i + z^T, \quad z^T \text{ fixé.} \quad (41)$$

Avec ces notations, (23) peut être réécrit

$$J_i(v; \mathbf{w}) = \frac{1}{2} \|w_i\|_{\mathcal{H}_i}^2 + \frac{\alpha_i}{2} \left\| \rho_i \left(\sum_j L_j w_j - \eta^T \right) \right\|^2 \quad (42)$$

où $\eta^T = y^T - z^T$. Alors $\mathbf{w} \in \mathcal{H}$ est un équilibre de Nash si et seulement si

$$(w_i, \widehat{w}_i)_{\mathcal{H}_i} + \alpha_i (\rho_i (\sum_j L_j w_j - \eta^T), \rho_i L_i \widehat{w}_i) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad \forall \widehat{w}_i. \quad (43)$$

ou bien

$$w_i + \alpha_i L_i^* (\rho_i^2 \sum_{j=1}^N L_j w_j) = \alpha_i L_i^* (\rho_i^2 \eta^T), \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad (44)$$

(où $L_i^* \in \mathcal{L}(L^2(\Omega); \mathcal{H}_i)$ est l'adjoint de L_i), ou d'une manière équivalente

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Lw} &= \text{donné dans } \mathcal{H}, \mathbf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H}) \\ (\mathbf{Lw})_i &= w_i + \alpha_i L_i^* (\rho_i^2 \sum_{j=1}^N L_j w_j). \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Alors nous avons la

PROPOSITION 1 *Supposons que*

$$\alpha_i = \alpha, \quad \forall i, \quad (46)$$

et que

$$\alpha \|\rho_i - \rho_j\|_{L^\infty(\Omega)} \|\rho_i\|_{L^\infty(\Omega)} \text{ est assez petit, pour } i, j = 1, \dots, N. \quad (47)$$

Alors \mathbf{L} est inversible. En particulier, il existe un équilibre unique de Nash de (23).

REMARQUE 8 Naturellement, si $N=1$ la situation est beaucoup plus simple. Dans ce cas

$$(\mathbf{L}w, w) = \|w_1\|^2 + \alpha_1 \|\rho_1 L_1 w_1\|^2,$$

par conséquent \mathbf{L} est coercive et ainsi l'existence et l'unicité d'un minimum w de $J_1(v; w)$, quand v est fixé, est un résultat classique.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1. Dans le cas général $N > 1$, on a

$$(\mathbf{L}\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \sum_i \|w_i\|_{\mathcal{H}_i}^2 + \sum_i \alpha_i (\rho_i \sum_j L_j w_j, \rho_i L_i w_i). \quad (48)$$

Alors on peut écrire

$$(\mathbf{L}\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^N \|w_i\|_{\mathcal{H}_i}^2 + \alpha \left\| \sum_{i=1}^N \rho_i L_i w_i \right\|^2 + \alpha \sum_{i,j=1}^N (\rho_i - \rho_j)^2 (L_j w_j, \rho_i L_i w_i). \quad (49)$$

En appliquant l'inégalité de Young, il s'en suit que sous l'hypothèse (47) \mathbf{L} est coercive, c.-à-d.

$$(\mathbf{L}\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geq \gamma \|\mathbf{w}\|_{\mathcal{H}}^2, \text{ pour un certain } \gamma > 0. \quad (50)$$

La conclusion est maintenant une conséquence du théorème de Lax-Milgram.

REMARQUE 9 L'hypothèse (47) est satisfaite si $\rho_i = \rho \forall i$. Dans ce cas il y a seulement une fonction $J_i = J_1 \forall i$. Il est possible de montrer (voir Díaz, Lions [52]) que les hypothèses sont optimales en un sens approprié.

REMARQUE 10 Il est facile de voir que, en fait, il y a une infinité de contrôles v menant à la contrôlabilité approchée.

6.3. L'action optimale du *leader*: une démonstration constructive

Étant donné $\delta > 0$, nous voulons trouver le meilleur contrôle du *leader* dans le sens

$$\inf_{v \in L^2(O \times (0, T))} \left\{ \frac{1}{2} \int_{O \times (0, T)} |v|^2 dx dt, \quad y(T, v) \in y^T + \delta B_{L^2(\Omega)} \right\},$$

avec B la boule unité.

THÉORÈME 3 i) Le minimum v est donné par $v = \varphi \chi$ à partir de la solution unique $\{y, p_1, \varphi, \psi_1\}$ du système d'optimalité

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay + \alpha_1 p_1 \chi_1 = v \chi, \\ -\frac{\partial p_1}{\partial t} + A^* p_1 = 0 \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A^* \varphi = 0, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + A \psi_1 = -\alpha_1 \varphi \chi_1 \\ \varphi(T) = f, \quad p_1(T) = \rho_1^2 (y(T; v, w_1) - y^T), \quad y(0) = 0, \quad \psi_1(0) = 0 \\ y = p_1 = \varphi = \psi_1 = 0 \text{ sur } \Sigma \end{array} \right.$$

la fonction f étant donnée par le problème de minimisation

$$I(f) = \frac{1}{2} \int_{O \times (0, T)} |\varphi|^2 dxdt + \delta \left\| \widehat{f} \right\|_{L^2(\Omega)} - \int_{\Omega} f y^T dx$$

ii) Le problème dual de minimisation a une solution unique.

DEMONSTRATION. i) Soit

$$F(v) = \frac{1}{2} \int_{O \times (0, T)} |v|^2 dxdt$$

et

$$G(f) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{if } f \in y^T + \delta B_{L^2(\Omega)} \\ +\infty & \text{otherwise on } L^2(\Omega) \end{array} \right\}$$

Alors, une formulation équivalente est

$$\inf_{v \in L^2(O \times (0, T))} (F(v) + G(Lv))$$

où $Lv = y(T : v)$

Par la dualité de Fenchel, Rockafellar (1969)

$$\inf_{v \in L^2(O \times (0, T))} (F(v) + G(Lv)) = - \inf_{f \in L^2(\Omega)} (F^*(L^* f) + G^*(-f))$$

où L^* est l'opérateur adjoint et F^* la fonction conjuguée

$$F^*(\varphi) = \sup_{\widehat{\varphi}} ((\varphi, \widehat{\varphi}) - F(\widehat{\varphi})).$$

Mais

$$F^*(\varphi) = \varphi, G^*(f) = \delta \left\| \widehat{f} \right\|_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} f y^T dx, \text{ et } L^* f = \varphi \chi$$

ce qui donne la conclusion i). La preuve de ii) vient du fait que $I(f)$ est strictement convexe, continue et coercive (par le *théorème de continuation unique*).

REMARQUE 11 f est caractérisé comme la solution unique de l'inégalité variationnelle

$$(y(T; f) - y^T, \widehat{f} - f) + \delta \left\| \widehat{f} \right\|_{L^2(\Omega)} - \delta \|f\|_{L^2(\Omega)} \geq 0, \forall \widehat{f} \in L^2(\Omega).$$

REMARQUE 12 Le résultat ci-dessus semble être vrai pour quelques équations non linéaires d'état données par

$$Ay = -Ly + f(y), \text{ où bien } Ay = -Ly + \operatorname{div} \mathbf{f}(y),$$

avec f (respectivement \mathbf{f}) sous linéaire à l'infini: c.-à-d..

$$|f(s)| \leq C_1 + C_2 |s|, \forall s \in \mathbb{R}, |s| > \overline{M}$$

(avec l'état analogue pour \mathbf{f}). Quelques méthodes différentes peuvent être appliquées: contrôlabilité par des arguments de linéarisation et de point fixe pour des équations d'états par Henry [69], Fabre, Puel, Zuazua [60]. Une autre possibilité est montrer la contrôlabilité au moyen d'un certain problème de contrôle optimal pénalisé comme, par exemple, le problème associé à la fonctionnelle

$$J_k(v) = \frac{1}{2} \|v\|_{L^2(O \times (0,T))}^2 + \frac{k}{2} \|y(T;v) - y^T\|_{L^2(\Omega)}$$

et le passage à la limite, à mesure que k croît jusqu'à l'infini (idée due à J. L. Lions [85]).

REMARQUE 13 Dans le cas des équations d'état non linéaires, mais avec un terme sur linéaire (par exemple $f(s) = \lambda |s|^{m-1} s$ avec $m > 1$) il peut apparaître un *phénomène d'obstruction*, impliquant une manque de contrôlabilité approchée pour des y^T généraux. Ceci a été montré par A. Bamberger (voir [69]) à l'aide d'une méthode d'énergie. Une autre démonstration peut être obtenue à l'aide de *sur et sous solutions universelles* sur l'extérieur des sous domaines de contrôle (voir Díaz ([41] et Díaz, Ramos ([53])). Ce genre de techniques est inspiré du travail pionnier de H. Brezis et E.H. Lieb ([18]) et s'applique à l'équation de Burger (voir Díaz [42]).

REMARQUE 14 Quelques expériences numériques relatives: contrôle pour EBM se trouvent dans Díaz, Ramos [54], [55]. En particulier, il est montré que le coût du contrôle diminue avec la complexité: une philosophie qui peut être montrée rigoureusement dans certains cas: Díaz, Lions [51]. Il est possible aussi d'introduire une *mesure de la contrôlabilité*, suivant les idées de Lions [90]. Ses arguments sont spécialement pertinents à l'heure de donner un sens mathématiques aux considérations sur l'intérêt de hiérarchiser les priorités faites dans la Section 4.

REMARQUE 15 La contrôlabilité peut être étudiée aussi dans le contexte des moyens temporaires (comme dans l'étude du climat). Une étude pour le cas d'un seul *joueur* est faite dans Lions [91].

La recherche du second auteur a été partiellement financée par le REN2003-0223-C03 de la DGISGPI (Spain) et la RTN HPRN-CT-2002-00274 de la UE.

Références

- [1] Académie des Sciences, *L'effet de serre et ses conséquences climatiques*. Rapport n° 25, 1990.

- [2] Académie des Sciences, *L'effet de serre*. Rapport n° 31, TECDOC, Lavoisier, Paris, 1994.
- [3] Académie des Sciences, *Biodiversité et environnement*, Rapport n° 33, TECDOC, Lavoisier Paris, 1995.
- [4] Académie des Sciences, La recherche scientifique et technique dans le domaine de l'énergie, Rapport commun n° 8 avec le CADAS, TECDOC Lavoisier, 1997.
- [5] Académie des Sciences, *Contamination des sols par les éléments en traces: les risques et leur gestion*, Rapport n° 42, TECDOC, Lavoisier, Paris, 1998.
- [6] Académie des Sciences, *Pollution atmosphérique due aux transports et santé publique*. Rapport n°12 en commun avec le CADAS, TECDOC, Lavoisier, Paris, 1999.
- [7] Académie des sciences, *Accès de tous à la connaissance, Préservation du cadre de vie, Amélioration de la santé, Trois enjeux*, Rapport à Monsieur le Président de la République, sous la direction de J. L. Lions, TECDOC Lavoisier, Paris, 2000.
- [8] Académie des Sciences, *L'énergie nucléaire civile dans le cadre temporel des changements climatiques*, TECDOC Lavoisier, 2001.
- [9] R. B. Alley, J. Marotzke, W. D. Nordhaus, J. T. Overpeck, D. M. Peteet, A. Pielke, R. T. Pierrehumbert, R. D. Rhines, T. F. Stocker, L. D. Talley, J. M. Wallace: Abrupt climate change, *Science* **299**, 2003, 2005.
- [10] L.J. Alvarez-Vazquez, A. Bermudez, A. Martinez, C. Rodriguez, M. E. Vazquez-Mendez, Application of the optimal control theory to the waste water elimination problem, *RACSAM*, **96**, 2002, 283-298.
- [11] H. Amann, Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces, *SIAM Rev.*, **18**, 1976, 620-709.
- [12] M. C. Amouretti, G. Comet, *Hommes et techniques de l'antiquité à la renaissance*, Armand Colin, 1993.
- [13] H. W. Arz, F. Lamy, J. Patzold, P. J. Muller, M. Prins, Mediterranean moisture source for an early-holocene humid period in the northern Red sea, *Science* **300**, 2003, 118.
- [14] F. Blasco, ed., *Tendances nouvelles en modélisation pour l'environnement*, Elsevier, Paris, 1997.
- [15] F. Braudel, *I Civilisation matérielle, économie et capitalisme: XV^{ème}- XVIII^{ème} siècle. Les structures du quotidien; II Les jeux de l'échange, III Le temps du monde*, Armand Colin, Paris, 1979.
- [16] H. Brezis, *Opérateurs Maximaux Monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [17] H. Brezis, J. I. Diaz (eds.) *Mathematics and Environment*, Special issue of the Rev. R. Acad. Cien. Serie A Matem, **96**, n° 3, 2003.
- [18] H. Brezis and E.H. Lieb, Long Range Atomic Potentials in Thomas-Fermi Theory, *Commun. Math. Phys.*, **65**, 1979, 234-246.
- [19] Buesseler K. O. , Boyd P. W. : Will ocean fertilization work?, *Science* **300**, 2003, 67.
- [20] M. I. Budyko, The effects of solar radiation variations on the climate of the Earth, *Tellus*, **21**, 1969, 611-619.

- [21] D. Cahan (ed.), *Hermann von Helmholtz and the foundations of nineteenth century science*, University of California Press, 1994.
- [22] K. Caldeira, A. K. Jain, M. J. Hoffert, Climate sensitivity uncertainty and the need for energy without CO₂ emission, *Science* **299**, 2003.
- [23] L. Cavalli-Sforza, *Gènes, peuples et langues*, Odile Jacob, Paris, 1996.
- [24] M. Choulli, An inverse problem for a semilinear parabolic equation, *Inverse Problems*, **10**, 1994, 1123-1132.
- [25] J. Clutton-Brock, *Horse power*. Natural history museum publications, 1992.
- [26] J. Cohen, *How many people can the earth support?* Norton, New York, 1995.
- [27] S. M. Colman, A fresh look at glacial floods, *Science*, **296** 2002, 1251.
- [28] Y. Coppens, P. Picq, *Aux origines de l'humanité*, Fayard, Paris, 2002.
- [29] R. Costanza, R. d'Arge , R. de Groot , S. Farber , M.Grasso, B.Hannon, K.Limburg, S.Naeem, R. V.O'Neill, J.Paruelo, R. G.Raskins , P. Sutton, M. Van de Belt and al :The value of the world's ecosystem services and natural capital, *Nature* **387**, 1997, 253-260.
- [30] G. C., Daily, T. Soderqvist, S.Aniyar, K.Arrow, P.Dasgupta , P. R. Ehrlich, C. Folke, AM.Jannson, B.O. Jannson, N. Kautsky, S. Levin, J. Lubchenco, K. G. Maler, D. Simpson, D. Starrett, D. Tilman, B. Walker:The value of Nature and the nature of value, *Science* **289**, 2000, 395-396.
- [31] M. Daumas, *Histoire générale des techniques*, Quadrige/Presses universitaires de France, 1964.
- [32] R. Dautray, *Les bases scientifiques de l'effet de serre: le piégeage du rayonnement*; conférence du 16 septembre 2002, Académie des Sciences, à paraître.
- [33] R. Dautray, Manuscrit, 2003, à paraître.
- [34] R. Dautray, J. I. Díaz. On the climate system and some of its mathematical models. In *Proceedings of the School on Atmospheric Sciences and Climate Dynamics*, Lisbon, July 12-16, 2004.
- [35] R. Dautray, J. I. Díaz. Lo infinitamente pequeño, lo infinitamente grande y lo infinitamente complejo: el medio ambiente. *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fis. Nat. (Esp)*, 2004.
- [36] R. Dautray, J. L. Lions, *Analyse mathématique et méthodes numériques pour les sciences et les techniques*, Masson, 1984 (3 volumes reliés, 8 volumes brochés) [6 volumes reliés, en anglais, edités par Springer-Verlag, en 6 volumes, puis 6 brochés en 2000].
- [37] A. S. Dennis, *Weather Modifications by Cloud Seeding*. Academic Press. New York, 1980.
- [38] J. I. Díaz, *El mundo de la ciencia y las matemáticas del mundo*, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, 1997.
- [39] J. I. Díaz, Clima et Matematica, *Bolletino della Unione Matematica Italiana* **8**, 2-A 1999, 95-105.
- [40] J. I. Díaz, Clima y Matemáticas, *Mundo Científico*, nº 108, enero 2000, 42-45.

- [41] J. I. Díaz, Sur la contrôlabilité approchée des inéquations variationnelles et d'autres problèmes paraboliques non linéaires. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **312**, Série I, 1991, 519–522.
- [42] J. I. Díaz, Obstruction and some approximate controllability results for the Burgers equation and related problems. In *Control of Partial Differential Equations and Applications* (Casas, E. ed.), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. **174**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1995, 63–76.
- [43] J. I. Díaz (ed.), *The Mathematics of Models in Climatology and Environment*, ASI NATO Global Change Series, n° 48, Springer-Verlag, Heidelberg, Allemagne. 1996.
- [44] J. I. Díaz, On the Mathematical treatment of Energy Balance Climate Models. En el libro *The Mathematics of Models in Climatology and Environment* (J.I. Díaz, ed) ASI NATO Global Change Series I, n°48, Springer-Verlag, Heidelberg, 1996, 217–252.
- [45] J. I. Díaz, Teoría astronómica de Milankovitz y modelos climáticos de gran escala temporal. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Nat. de Madrid*, **93**, 1999, 27–31.
- [46] J. I. Díaz, Modelos matemáticos en Climatología; la conjetura de von Neumann. In, *Les Mathématiques y les seus aplicacions*, Editorial de la UPV, Valencia, 2000, 67–98.
- [47] J. I. Díaz (ed.), *Ocean Circulation and Pollution Control. A Mathematical and Numerical Inquiry*, Lecture Notes, EMS Volume, Springer-Verlag 2003.
- [48] J. I. Díaz, Ch. Faghloumi, Analysis of a degenerate obstacle problem on a unbounded set arising in the environment, *Appl. Math. Optim* **45**, 2002, 251–257.
- [49] J.I. Díaz, J. L. Lions (eds.), Mathematics, Climate and environment. Research Notes in Applied Mathematics n° 27, Masson, Paris, 1993.
- [50] J.I. Díaz, J. L. Lions(eds.), Environment, Economics and their Mathematical Models. Research Notes in Applied Mathematics n° 35, Masson, Paris, 1994.
- [51] J. I. Díaz, J. L. Lions, On the approximate controllability for some explosive parabolic problems, International Series of Numerical Mathematics, Vol. 133, Birkhäuser Verlag, Basel, pp. 115–132, 1999.
- [52] J. I. Díaz, J. L. Lions, On the Approximate Controllability of Stackelberg-Nash Strategies. In, *Ocean Circulation and Pollution Control. A Mathematical and Numerical Inquiry*, (J. I. Díaz ed.). Lecture Notes, EMS Volume, Proceedings of the Diderot Video-conference Amsterdam-Madrid-Venice, Lecture-Notes, Springer Verlag 2003, Springer-Verlag 2003, 17–28.
- [53] J. I. Díaz, A. M. Ramos, Positive and negative approximate controllability results for semilinear parabolic equations, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Nat. de Madrid*, Tomo LXXXIX,11–30, 1995.
- [54] J. I. Díaz, A. M. Ramos, Numerical experiences regarding the localized control of nonlinear parabolic problems. In CD-Rom *Proceedings of the European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2000)*, Barcelona, 2000.
- [55] J. I. Díaz and A. M. Ramos, Numerical experiences regarding the distributed control of semilinear parabolic problems, *Computers and Mathematics with Applications*, 2005
- [56] G. Dumézil, *Mythes et dieux des indo-européens*. Flammarion, Paris, 1992.

- [57] J.C. Duplessy *et al.*, Oxygen isotope/salinity relationship in the northern Indian ocean; *Journal of Geophysical Research*, **106**, 2001, 4565-4574.
- [58] J. C. Duplessy *et al.*, Constraints on the ocean oxygen enrichment between the last glacial maximum and the olocène paléoceanographic implications, *Quaternary Sciences Review*, **21**, 2002, 315-330.
- [59] V. Ezratty, M. Le Merrer (editors), *Changements climatiques et maladies à vecteurs*, EDF, Paris, 2001.
- [60] C. Fabre, J. P. Puel, E. Zuazua, Approximate controllability of the semilinear heat equations, *Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sect. A.*, **125**, 1995, 31-61.
- [61] L. A. Fernández, E. Zuazua, Approximate Controllability of the Semilinear Heat Equation via Optimal Control. Preprint de la Universidad de Cantabria, 1996.
- [62] D. Gabay, J. L. Lions, Décisions stratégiques à moindres regrets, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **319**, Série I, 1994, 1049-1056.
- [63] M. Ghil, S. Childress, *Topics in Geophysical Fluid Dynamics: Atmospheric Dynamics, Dynamo Theory and Climate Dynamics*, Nueva York, Springer, 1987.
- [64] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [65] B. Gilles *et al.*, *Histoire des techniques; encyclopédie de la pléiade*, Gallimard, 1978.
- [66] N. P. Gillett, F. W. Zwiers, A. J. Weaver, P. A. Stott, Detection of human influence on sea-level pressure, *Nature*, **422**, 2003, 292- 294.
- [67] P. Harremoës *et al.*, *The Precautionary Principle in the 20th Century: Late Lessons from Warnings*, Earthscan, 2002.
- [68] A. Henderson-Sellers, K. McGuffie, *A Climate Modelling Primer*, John Wiley&Sons, Chichester, Gran Bretaña, 1987.
- [69] J. Henry, *Etude de la contrôlabilité de certains équations paraboliques*. Thèse d'Etat. Université de Paris VI, 1978.
- [70] K. J. Heywood *et al.*, High mixing rates in the abyssal southern ocean, *Nature*, **415**, 2002, 1011-1014.
- [71] J. Houghton, *Global warming: the complete briefing*, Lion Book, 1994.
- [72] J. T. Houghton *et al.*, *Climate change 2001; the scientific basis. Contribution of working group 1 to the third assessment. Report to the Intergovernmental Panel on Climate Change*; Cambridge University Press, 2002.
- [73] R. Kalman, Probability in the real world as a system tribute; *CWI Quarterly on Control and System Theory*, 1996.
- [74] R. Kalman, Randomness and probability; *Mathematica Japonica*, **41**, No 1, 1995.
- [75] J. T. Kiehl, Atmospheric general circulation modeling, En *Climate System Modeling*, K.E. Trenberth ed., Cambridge University Press, 1992, 319-370.
- [76] S. Knapp, Conservation: dynamic diversity, *Nature* **42**, 2003, 475.
- [77] F. X. LeDimet, J. Blum, Assimilation des données pour les fluides géophysiques, *Matapli*, **67**, 2002

- [78] F. X. Le Dimet, Y. Hussaini, D. Furbish, P. Ngnpieba, Errors and uncertainties in data assimilation. *CESPR*, Florida State University, 2003.
- [79] F. X. Le Dimet, O. Talagrand, Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: Theoretical aspects, *Tellus*, **38** A: 1986, 97-110.
- [80] F. X. Le Dimet, Yang Junking, Variational data assimilation in the transport of sediment in river, *Science in China (Series D)*, **41**, 1998, 473-485.
- [81] J. Lovelock, La energía nuclear es la única solución ecológica, *EL PAÍS*, 20 de julio 2004, 17.
- [82] J.-L. Lions, *Sur le contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Gauthier Villars, Paris, 1968.
- [83] J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier Villars, Paris, 1969.
- [84] J.-L. Lions, *El planeta Tierra. El papel de las Matemáticas y de los superordenadores*. Serie del Instituto de España **8**, Espasa-Calpe, Madrid, 1990.
- [85] J.-L. Lions, Exact controllability for distributed systems. Some trends and some problems. In *Applied and Industrial Mathematics*. (Sigler, R. ed.) Kluwer, 1991, 59-84.
- [86] J.-L. Lions, Why is earth environment so stable? Lecture at plenary session of the Pontifical Academy of Sciences on the emergence of complexity in mathematics, physics, chemistry and biology, Rome, 1992.
- [87] J.-L. Lions, *Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and Their Control*, Science Press and Gordon and Breach, 1981.
- [88] J.-L. Lions, Some Remarks on Stackelberg's Optimization, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **4**, No. 4, 1994, 477-487.
- [89] J.-L. Lions, Contrôle de Pareto de Systèmes distribués: Le cas d'évolution, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **t. 302**, Série I, 1986, 413-417.
- [90] J.-L. Lions, Measures de controllability, *Proceedings of the Georgian Academy of Sciences. Mathematiques*, **1**, 1993, 53-59.
- [91] J.-L. Lions, Quelques remarques sur la contrôlabilité en liason avec des questions d'environnement. In *Les grandes systèmes des sciences et de la technologie*. Eds. J. Horowitz et J.L. Lions, Masson, Paris, 1994.
- [92] J.-L. Lions, Le simulateur de la Terre, *Rev. R. Acad. Cien. Exact. Fis. Nat.*, **92**, 1998, 71-85.
- [93] J.-L. Lions, *Oeuvres choisies*, 3 volumes, EDP Sciences, Paris, 2003.
- [94] J.-L. Lions, Some Remarks on the Mathematical Modelling of Planet Earth System, *Atti dei Convegna Lincei*, Accademia Nazionale dei Lincei, **158**, 2000, 73-93.
- [95] J.-L. Lions, R. Temam, S. Wang, New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications, *Nonlinearity*, **5**, 1992, 237-288.
- [96] J.-L. Lions, R. Temam, S. Wang, On the Equations of the Large-scale Ocean, New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications, *Nonlinearity*, **5**, 1992, 1007-1053.

- [97] J.-L. Lions, R. Temam, S. Wang, Models for the coupled atmosphere and ocean, *Computational Mechanics Advances*, **1**, 1997
- [98] J.-L. Lions, R. Temam, S. Wang, Mathematical theory for the coupled atmosphere-ocean models (CAO III); *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1995.
- [99] J.-L. Lions, R. Temam, S. Wang, A simple global model for the general circulation of the atmosphere; *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **50**, 1997, 0707-0752.
- [100] J. R. McNeill, *Something new under the sun; an environmental history of the twentieth-century world*, Norton and Cy, 2000.
- [101] G. de Marsily, La gestion des eaux souterraines, *Société hydrotechnique de France* ; XXI^{èmes} journées de l'hydraulique, Sophia Antipolis, 29-31 janvier 1991.
- [102] G. de Marsily, Can we still hope to preserve uncontaminated groundwater resources for the next génération?, *International hydrology and water resources symposium*, Perth, 2-4 october 1991.
- [103] J. G. Mengel, D. A. Short, G. R. North, Seasonal snowline instability in an energy balance model. *Climate Dynamics*, **2**, 1988, 127-131.
- [104] S. Mizohata, Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A31*, **3**, 1958, 219-239.
- [105] P. de Montbrial, *Le système du monde*, PUF, Paris, 2002.
- [106] J. F. Nash, Noncooperative Games, *Ann. of Math.*, **54**, 1951, 286-295.
- [107] J. von Neumann, Can we survive Technology?, *Nature*, 1955. Aussi dans *John von Neumann: Collected Works*. Vol VI, Pergamon, 1966.
- [108] G. R. North, Introduction to simple climate model. In *Mathematics, climate and environment*, (J.I. Diaz, J.L. Lions, eds.), Masson, Paris, 1993, 139-159.
- [109] D. K. Newman, J. F. Banfield, Geomicrobiology: How molecular scale interactions underpin biochemical systems, *Science*, **296**, 2002, 1071.
- [110] C. Parés, A. Valle, eds. *Modelado de sistemas en Oceanografía, Climatología y Ciencias Medio-Ambientales: aspectos matemáticos y numéricos*, Universidad de Málaga, 1994.
- [111] O. Pironneau, Le contrôle optimal: applications et perspectives. In, *Actes de la journée du 9 avril 2002 à la mémoire de Pierre Faure et Jacques-Louis Lions*. Académie des Technologies, Paris, 2004, 23-42.
- [112] R. Purrington, *Physics in the nineteenth century*, Rutgers University Press, 1997.
- [113] D. S. Reay, Intensive farming, US style is not sustainable worldwide, *Nature*, 2002, 417.
- [114] W. E. Rees, Ecological footprints: a blot on the land, *Nature*, **421**, 2003, 898.
- [115] A. L. Reychenbach, E. Shock, Merging genomes with geochemistry in hydrothermal ecosystems, *Science* **296**, 2002, 1077.
- [116] J. C. Saut, B. Scheurer, Unique Continuation for Some Evolution Equations, *J. Differential Equations*, **66**, 1987, 118-139.
- [117] M. Schwartz, *Comment les vaches sont-elles devenues folles?*, Editions Odile Jacob, Paris, 2001.

- [118] W. D. Sellers, A global climatic model based on the energy balance of the earth-atmosphere system, *J. Appl. Meteorol.* **8**, 1969, 392-400.
- [119] H. von Stackelberg, *Marktform und Gleichgewicht*, Springer, Berlin, 1934.
- [120] R. Taton, *Histoire générale des sciences*. Tomes 1, 2, 3, PUF, Paris, 1964.
- [121] M. Tubiana, *Les chemins d'Esculape, histoire de la pensée médicale*, Flammarion, Paris, 1995
- [122] M. Tubiana, *L'éducation et la vie*, Odile Jacob, Paris, 2001.
- [123] B. Tissot, *Energie et environnement*, à paraître, 2004,
- [124] B. Tissot, Le développement durable: Une voie étroite entre les ressources énergétiques et le changement climatique, à paraître, 2004.
- [125] R. G. Thomson, A dam near Gibraltar, *American Geophysical Union*. 1997.
- [126] K. Trenberth, ed., *Climate system modelling*, Cambridge University Press, 1992.
- [127] R. T. Watson et al., *IPCC special report on land use, land use change and forestry*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [128] E. Wilson, *The diversity of life*, Penguin, 1994.
- [129] E. Wilson, *I am a naturalist*, Warner Books, 1995.
- [130] E. Wilson, *The future of life*, Alfred A. Knopf, 2002.
- [131] A. Zeghal, Un résultat d'existence pour un problème inverse parabolique quasi lineaire, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Ser I., 332, 2001, 909-912.