Estabilización de las soluciones de un modelo climático estocástico no lineal: convergencia hacia el atractor

J.I. DÍAZ*, J.A. LANGA† AND J. VALERO‡

Abstract

En este trabajo probamos la existencia de un atractor aleatorio global para el sistema dinámico aleatorio multivaluado asociado a una ecuación parabólica estocástica no lineal asociada a un modelo climático con incertidumbres y con un co-albedo discontínuo.

También probamos la convergencia (en cierto sentido) de los atractores globales (dependendientes de un parámetro $\varepsilon > 0$ que mide la amplitud del ruido), cuando $\varepsilon \to 0$, al atractor determinista correspodiente a $\varepsilon = 0$.

Palabras clave: modelos climáticos con incertidumbres, ecuaciones estocásticas en derivadas parciales, atractor aleatorio.

Mathematics Subject Classification (2000): 35B40, 35B41, 35K55, 35K57, 37L55.

1 Introducción

En este artículo estudiamos el comportamiento asintótico, para tiempos grandes, de una ecuación estocástica en derivadas parciales, propuesta inicialmente por North y Cahalan [19] (a partir de un modelo previo determinista propuesto por Budyko [5]), que modeliza la presencia de ciertas incertidumbres dadas por adecuados términos no deterministas (como aparece, por ejemplo, al modelizar la presencia de ciclones que pueden ser tratados como una componente de variación rápida cuando se representan como un ruido blanco) en el contexto de un modelo climático de balance de energía.

*Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, Plaza de las Ciencias, 3, 28040, Madrid, Spain, e-mail: diaz.racefyn@insde.es

†*Corresponding author.* Dpto. Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla, Apdo. de Correos 1160, 41080-Sevilla, Spain, e-mail langa@us.es

‡Universidad Miguel Hernández, Centro de Investigación Operativa, Avda. de la Universidad, s/n, 03202 Elche, Alicante, Spain, e-mail: jvalero@umh.es

El problema en consideración (tras algunas simplificaciones) se puede enunciar en los siguientes términos:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + Bu \in QS(x)\beta(u) + h(x) + \varepsilon\phi \dfrac{dW_t}{dt}, \quad (x,t) \in (-1,1) \times \mathbb{R}^+, \\ u_x(-1,t) = u_x(1,t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in (-1,1), \end{cases} \tag{1}$$

donde B, Q, ε son constantes positivas, $\phi \in H^2(-1,1)$ con $\phi_x(-1) = \phi_x(1) = 0$, $S, h \in L^\infty(-1,1)$, $u_0 \in L^2(-1,1)$, y β es un grafo maximal monótono de $\mathbb{R}^2$. Además, es acotado, es decir, que existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq z \leq M$, para todo $z \in \beta(s)$, $s \in \mathbb{R}$. Supondremos también que

$$0 < S_0 \leq S(x) \leq S_1, \text{ p.c.t. } x \in (-1,1). \tag{2}$$

Aquí W_t, $t \in \mathbb{R}$, es un proceso real de Wiener con el espacio de probablidad habitual $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (en la Sección 2.2 se da una definición de este espacio).

Como en el caso determinista (ver, por ejemplo, [10], [12] y [3]), la variable $u(x,t,\omega)$ representa la temperatura media en la superficie de la Tierra, Q es la constante solar, obtenida como la media (durante un año sobre la superficie de la Tierra) del flujo de radiación solar, y la función $S(x)$ se determina por la distribución de la radiación solar en la parte superior de la atmósfera. En periodos de un año o más $S(x)$ satisface la condición (2), mientras que en periodos más pequeños $S_0 = 0$. El término β representa la función de coalbedo, que toma valores entre 0 y 1, y depende del tipo de superficie terreste y, en particular, de su propia temperatura. Se calcula como el cociente entre la energía solar absorbida y la energía solar incidente en un punto. Finalmente, $Bu - h(x)$ es la media de la cantidad de energía irradiada al espacio. Este término es la linealización (alrededor de una temperatura dada promediada) de un término no lineal más general correspondiente a la ley de Stefan-Boltzmann.

Notemos que, dada la discontinuidada de β, no es razonable esperar unicidad de soluciones del problema de Cauchy (1). Por ello, trabajaremos con el sistema dinámico aleatorio multivaluado (SDAM) asociado a sus soluciones. Nuestro principal resultado estudia el comportamiento asintótico de las soluciones de este SDAM cuando $t \to +\infty$, y, en particular, la existencia del atractor aleatorio $\mathcal{A}_\varepsilon$. Además, continuando con la investigación iniciada en [9], probamos la convergencia (en cierto sentido) de los atractores $\mathcal{A}_\varepsilon$, cuando $\varepsilon \to 0$, al atractor del caso determinista ($\varepsilon = 0$).

Notemos además que incluso en el caso determinista ($\varepsilon = 0$) la estructura del atractor global puede ser muy complicada (ver, e.g., [14] o [13]).

Las pruebas de los resultados enunciados en este trabajo se pueden encontrar en [11].

2 Comportamiento asintótico de las soluciones

2.1 Sistemas dinámicos aleatorios

Sea (X, d_X) un espacio métrico completo y separable y sea $\mathcal{B}(X)$ la σ-algebra de Borel. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\theta_t : \Omega \to \Omega$ un grupo de transformaciones en Ω que conserva la medida y tal que la aplicación $(t, \omega) \mapsto \theta_t \omega$ es medible y satisfasce

$$\theta_{t+s} = \theta_t \circ \theta_s = \theta_s \circ \theta_t, \qquad \theta_0 = Id.$$

El parámetro t toma valores en $\mathbb{R}$, donde consideramos la σ-algebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Denotamos por $P(X)$ $(C(X))$ el conjunto de subconjuntos no vacíos (no vacíos y cerrados) de X.

Nota 2.1 *A lo largo del artículo que una propiedad se cumpla para todo $\omega \in \Omega$ significa que es cierta en un conjunto de medida completa e invariante con respecto a θ_t.*

Definición 2.2 *La función multivaluada $G : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times X \to C(X)$ es un sistema dinámico aleatorio multivaluado (SDAM) si es medible y dado $x \in X$ la aplicación*

$$(t, \omega, y) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \times X \mapsto dist(x, G(t, \omega, y)) \tag{3}$$

es medible, donde $dist(x, A) = \inf_{a \in A} d_X(x, a)$, para $A \subset X$, y satisface:

1. $G(0, \omega, \cdot) = Id$ *en* X;
2. $G(t+s, \omega, x) = G(t, \theta_s \omega, G(s, \omega) x)$ *(propiedad de cociclo),* $\forall\, t, s \in \mathbb{R}^+, x \in X,\ \omega \in \Omega$.

La propiedad (3) es equivalente a decir que para todo abierto O la imagen inversa $\{(t, \omega, y) : G(t, \omega, y) \cap O \neq \varnothing\}$ es medible [15, Proposition 2.1.4].

A continuación introduciremos el concepto de atractor aleatorio [8] al caso de un sistema dinámico aleatorio multivaluado. La teoría general de atractores aleatorios para SDAM se ha estudiado por ejemplo en [6, 7].

Definición 2.3 *Un conjunto aleatorio D es una aplicación medible $D : \Omega \to C(X)$.*

Un conjunto cerrado aleatorio $D(\omega)$ es negativamente (resp. strictamente) invariante para el SDMA G si

$$D(\theta_t \omega) \subset G(t, \omega, D(\omega)) \ (resp.\ D(\theta_t \omega) = G(t, \omega, D(\omega))), \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}^+,\ \omega \in \Omega.$$

Definición 2.4 *Un conjunto cerrado aleatorio $\omega \mapsto \mathcal{A}(\omega)$ es un atractor global aleatorio para el SDMA G si:*

i) $G(t,\omega)\mathcal{A}(\omega) \supseteq \mathcal{A}(\theta_t\omega)$, *para todo* $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$ *(es decir, es negativamente invariante);*

ii) *para todo acotado* $D \subset X$,

$$\lim_{t\to+\infty} dist(G(t,\theta_{-t}\omega,D),\mathcal{A}(\omega)) = 0;$$

iii) $\mathcal{A}(\omega)$ *es compacto para todo* $\omega \in \Omega$.

2.2 Existencia de atractores aleatorios

Sea H un espacio de Hilbert separable con la norma $\|\cdot\|$ y el producto escalar $(\cdot,\cdot)$. Denotamos un ϵ-entorno de A por $\mathcal{O}_\epsilon(A) = \{y \in H : dist(y,A) < \epsilon\}$.

La aplicación multivaluada $F : H \to P(H)$ es *semicontinua superiormente* si dado $x \in H$ y un entorno de $F(x)$, $\mathcal{O}(F(x))$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x-y\| < \delta$, entonces $F(y) \subset \mathcal{O}(F(x))$. $G(t,\omega,\cdot)$ es ϵ-*semicontinua superiormente* si en la definición de semicontinuidad superior reemplazamos el entorno $\mathcal{O}$ por un ϵ-entorno $\mathcal{O}_\epsilon$. Es evidente que una aplicación semicontinua superiormente es ϵ-semicontinua superiormente. La afirmación inversa es cierta si F tiene valores compactos [2, p.45].

En [16] se prueba la existencia de un atractor aleatorio para la siguiente inclusión de evolución:

$$\begin{cases} du(t) \in (-\partial\varphi(u(t)) + F(u(t)))dt + \varepsilon\phi\dfrac{dW_t}{dt}, \\ u(x,0) = u_0, \end{cases} \tag{4}$$

donde $\partial\varphi$ es la subdiferencial de la función propia, convexa y semicontinua inferiormente $\varphi : H \to (-\infty,+\infty]$. Consideraremos las siguientes condiciones sobre F y φ:

(F1) $F : H \to C_v(H)$, donde $C_v(H)$ es el conjunto de subconjuntos no vacíos, acotados, cerrados y convexos de H.

(F2) Existen $D_1, D_2 \geq 0$ tales que $||y|| \leq D_1 + D_2||v||$, para todo $y \in F(v)$, $v \in H$.

(F3) F es ϵ-semicontinua superiormente en H.

(F4) Existen $\delta > 0$ y $M > 0$ tales que

$$(y,u) \leq -\delta||u||^2 + M,$$

para todo $u \in D(A)$ y $y \in F(u)$.

(F5) Los conjuntos de nivel $M_R = \{u \in D(\varphi) : \|u\| \leq R, \varphi(u) \leq R\}$ son compactos en H para todo $R > 0$.

En [16] se prueban varios resultados de existencia y continuidad de atractores aleatorios, pero usando en lugar de (F3) la condición más fuerte de F semicontinua superiormente. Nosotros reescribiremos nuestro modelo (1) en la forma abstracta (4). Como en este caso concreto no podemos obtener la semicontinuidad superior de F, necesitamos mejorar los resultados de [16] para el caso de cuando se cumplen las condiciones (F1)-(F5).

Definimos $f : (-1,1) \times \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ de la siguiente manera:

$$f(x,r) = QS(x)\beta(r) - Br, \text{ para c.t.p. } x \in (-1,1),\, r \in \mathbb{R}.$$

A partir de ahora supondremos que $H = L^2(-1,1)$. Definimos el operador multivaluado $F : H \to 2^H$ como sigue:

$$F(u) = \{y + h : y \in H,\ y(x) \in f(x,u(x)), \text{ para c.t.p. } x \in (-1,1)\}.$$

Si definimos la función

$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |\nabla u|^2\, dx, \text{ si } u \in H^1(-1,1), \\ +\infty, \text{ en otro caso,} \end{cases}$$

entonces es bien conocido [4] que φ es propia, convexa y semicontinua inferiormente. Además $\partial\varphi = -\Delta$ con dominio $D(\partial\varphi) = \left\{u \in H^2(-1,1) : u_x(-1) = u_x(1) = 0\right\}$. Por otro lado, $D(\varphi) = \{u \in H : \varphi(u) < +\infty\} = H^1(-1,1)$. Notemos también que $\overline{D(\varphi)} = \overline{D(\partial\varphi)} = H$ y que $A = -\partial\varphi$ es un operador m-disipativo [4].

Proposición 2.5 *La función F satisface (F1)-(F4), supuesto que φ satisface (F5).*

Por tanto, podemos considerar (1) en la forma abstracta (4).

Ahora podemos considerar el espacio de probabilidad de Wiener $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definido por

$$\Omega = \{\omega = w(\cdot) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : w(0) = 0\},$$

y equipado con la $\sigma-$algebra de Borel $\mathcal{F}$, la medida de Wiener $\mathbb{P}$, y la topología usual de convergencia uniforme en acotados de $\mathbb{R}$. Sea $\zeta(t) = \phi w(t)$. Cada $\omega \in \Omega$ genera una función $\zeta(\cdot) = \phi w(\cdot) \in C(\mathbb{R}, H)$ tal que $\zeta(0) = 0$.

Para cada $\omega \in \Omega$ efectuamos el cambio de variable $v(t) = u(t) - \varepsilon\zeta(t)$. Como consecuencia de resultados bien conocidos (ver, e.g. [1]), la inclusión (4) se transforma formalmente en

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} \in Av(t) + F(v(t) + \varepsilon\zeta(t)) + \varepsilon A\zeta(t), \\ v(0) = v_0 = u_0. \end{cases} \tag{5}$$

Ahora mostraremos que el problema (5) tiene al menos una solución en un cierto sentido. Definimos la función $\widetilde{F} : [0,T] \times \Omega \times H \to 2^H$ mediante $\widetilde{F}(t,\omega,u) = F(u + \varepsilon\zeta(t)) + \varepsilon A\zeta(t)$.

Definición 2.6 *El proceso $v : \Omega \times [0,T] \to H$ es una solución fuerte de (5) si para cada $\omega \in \Omega$:*

1. $v(\omega, \cdot) \in C([0,T], H)$;

2. $v(\omega,\cdot)$ *es absolutamente continua en cada compacto de $(0,T)$ y diferenciable en casi todo punto de $(0,T)$;*

3. $v(\omega,\cdot)$ *satisface*

$$\frac{dv}{dt} = Av(t) + f(t), \text{ para c.t.p. } t \in (0,T), v(0) = v_0, \tag{6}$$

donde $f \cdot \in L^1(0,T;H)$ y $f(t) \in \widetilde{F}(t,\omega,v(\omega,t))$ para c.t.p. $t \in (0,T)$ en H.

Mostremos que $\widetilde{F}$ posee buenas propiedades. Primero, es claro que tiene crecimiento sublineal. Efectivamente, usando (F2) tenemos

$$\|y\| \le D_1 + D_2\|u\| + D_2\varepsilon\|\phi\||w(t)| + \varepsilon\|A\phi\||w(t)| \le \widetilde{D}_1 + D_2\|u\|, \tag{7}$$

para todo $y \in \widetilde{F}(t,\omega,u)$ y $t \in [0,T]$, donde $\widetilde{D}_1$ depende de ω y T. Además, se deduce de (F1) y (F3) que $\widetilde{F}(t,\omega,u) \in C_v(H)$ y que $u \to \widetilde{F}(t,\omega,u)$ es ϵ-semicontinua superiormente. Finalmente, se puede mostrar que para todo $u \in H$, $\omega \in \Omega$, la función $t \mapsto \widetilde{F}(t,\omega,u)$ posee un selector medible.

Usando resultados generales bien conocidos (ver, e.g., [21] o [20]) no es difícil mostrar la existencia de al menos una solución fuerte para cada condición inicial en H. Además, concatenando soluciones se puede comprobar que cada solución es extendible a una global, es decir, definida para todo $t \ge 0$.

Sea $\mathcal{D}(v_0,\omega)$ el conjunto de todas las soluciones fuertes de (5) (que están definidas para todo $t \ge 0$). Entonces podemos definir la aplicacióm multivaluada $G : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times H \to P(H)$ mediante

$$G(t,\omega,v_0) = \{v(t) + \varepsilon\zeta(t) : v(\omega,\cdot) \in \mathcal{D}(v_0,\omega)\}.$$

Se puede probar de forma similar a [6, Proposition 4] que G satisface la propiedad de cociclo.

Supongamos que $\theta_s : \Omega \to \Omega$ está definida por $\theta_s\omega = w(s+\cdot) - w(s) \in \Omega$. Entonces la función $\widetilde{\zeta}$ correspondiente a $\theta_s\omega$ viene dada por $\widetilde{\zeta}(\tau) = \zeta(s+\tau) - \zeta(s) = \phi(w(s+\tau) - w(s))$.

Ahora podemos enunciar el resultado principal de este trabajo.

Teorema 2.7 *El sistema dinámico aleatorio multivaluado G asociado a (1) posee un atractor global aleatorio $\mathcal{A}_\varepsilon$.*

Por otro lado, podemos probar también la semicontinuidad superior, cuando $\varepsilon \to 0$, del atractor aleatorio con respecto al atractor de la inclusión determinista obtenida para $\varepsilon = 0$.

Denotaremos por G_ε el sistema dinámico aleatorio multivaluado asociado a (1) para cada $\varepsilon > 0$. Sea G_0 el semiflujo multivaluado determinista asociado a (1) para $\varepsilon = 0$, que posee un atractor global compacto (esta última afirmación se deduce de la Proposición 2.5 usando los resultados en [18, Theorem 2.3] o [17, Theorem 6.33]).

Teorema 2.8 *Tenemos que*

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} dist(\mathcal{A}_\varepsilon(\omega), \mathcal{A}) = 0, \quad \textit{para todo } \omega \in \Omega,$$

donde $\mathcal{A}$ es el atractor global determinista asociado a (1) con $\varepsilon = 0$.

3 Agradecimientos

El trabajo del investigador J.I. Díaz ha sido parcialmente financiado por los proyectos MTM2008-06208 de la DGISGPI del Ministerio de Ciencia e Innovaciónde y CCG07-UCM/ESP-2787 de la DGUIC de la CAM y la UCM.

El trabajo de los investigadores José. A. Langa y José Valero ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España, proyecto MTM2008-00088, y la Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa (Junta de Andalucia), proyecto P07-FQM-02468.

Además, José Valero contó también con la financiación parcial de la Consejería de Cultura y Educación (Comunidad Autónoma de Murcia), proyecto 08667/PI/08.

References

[1] L. Arnold, *Random Dynamical Systems*, Springer Monographs in Mathematics, Berlín, 1998.

[2] J.P. Aubin, A. Cellina, *Differential Inclusions*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[3] R. Bermejo, J. Carpio, J.I. Díaz, L. Tello, *Mathematical and numerical analysis of a nonlinear diffusive climate energy balance model*, Mathematical and Computer Modelling, **49** (2009), 1180-1210.

[4] H. Brezis, *Monotonicity methods in Hilbert spaces and some application to nonlinear partial differential equations,* en "Contributions to nonlinear functional analysis (editor E. Zarantonello)", Academic Press, New York, 1971, 101-156.

[5] M.I. Budyko, *The efects of solar radiation variations on the climate of the Earth*, Tellus, **21** (1969), 611-619.

[6] T. Caraballo, J.A. Langa, J. Valero, *Global attractors for multivalued random dynamical systems*, Nonlinear Anal., **48** (2002), 805-829.

[7] T. Caraballo, J.A. Langa, J. Valero, *Addendum to "Global attractors for multivalued random dynamical systems",* Nonlinear Anal., **61** (2005), 277-279.

[8] H. Crauel, F. Flandoli, *Attractors for random dynamical systems*, Prob. Theory Related Fields, **100** (1994), 365-393.

[9] G. Díaz, J.I. Díaz, *On a stochastic parabolic PDE arising in Climatology*, Rev. R. Acad. Cien.Serie A Matem., **96** (1)(2002), 123-128.

[10] J. I. Díaz, *Mathematical analysis of some diffusive energy balance climate models,* en "Mathematics, Climate and Environment (editores J.I. Díaz y J.L. Lions)2, Masson, Paris, 1993, 28–56.

[11] J.I. Díaz, J.A. Langa, J. Valero, On the asymptotic behaviour of solutions of a stochastic energy balance climate model, *Physica D*, **238** (2009), 880-887.

[12] J.I. Díaz, L. Tello, *A nonlinear parabolic problem on a Riemannian manifold without boundary arising in Climatology*, Collect. Math., **50** (1999), 19-51.

[13] J.I. Díaz, L. Tello, *Infinitely many stationary solutions for a simple climate model via a shooting method*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **25** (2002), 327-334.

[14] G. Hetzer, *The number of stationary solutions for a one-dimensional Budyko-type climate model*, Nonlinear Anal. Real World Appl.*,* **2** (2001), 259–272.

[15] S. Hu, N.S. Papageorgiou, *Handbook of multivalued analysis, Vol. I*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[16] A.V. Kapustyan, *A random attractor of a stochastically perturbed evolution inclusion*, Differential Equations, **40** (2004), 1383-1388.

[17] A.V. Kapustyan, V.S. Melnik, J. Valero, V.V. Yasinsky, *Global attractors of multi-valued evolution equations without uniqueness*, Naukova Dumka, Kiev, 2008.

[18] A.V. Kapustyan, J. Valero, *Attractors of multivalued semiflows generated by differential inclusions and their approximations*, Abstract Applied Anal.*,* **5** (2000), 33-46*.*

[19] G.R. North, R.F. Cahalan, *Predictability in a solvable stochastic climate model*, J. Atmos. Sci., **38** (1982), 504-513.

[20] A.A. Tolstonogov, Y.I. Umansky, *On solutions of evolution inclusions. 2*, Sibirsk. Mat. Zh., **33** (4)(1992), 163-173.

[21] I.I. Vrabie, *Compactness Methods for Nonlinear Equations*, Pitman Longman, London, 1987.