La elasticidad de Euler[1]

JESÚS ILDEFONSO DÍAZ
Real Academia de Ciencias y Universidad Complutense de Madrid

1. INTRODUCCIÓN

Pese a ser considerado como uno de los iconos de la matemática más pura, la celebración del tricentenario del nacimiento de Leonhard Euler (1707-1783) no podría ser completa sin dedicar una especial atención a uno de los temas que ocupó constantemente su curiosidad, inventiva y esfuerzos desde sus primeros años hasta el final de su vida: la elasticidad. Antes de entrar de lleno en esta exposición de marcado carácter histórico, me parece obligado hacer unas consideraciones generales sobre las muchas fuentes que hoy día están al acceso, de una manera o de otra, al estudioso de la obra de Euler.

En primer lugar podríamos aconsejar una visita a su biografía en la página web http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Euler.html en la que se podrá encontrar numerosos enlaces a otras informaciones complementarias. También es muy aconsejable acudir a la página web http://www.euler-2007.ch que se ha abierto con motivo de la conmemoración de su tri-centenario en los más diversos rincones del planeta.

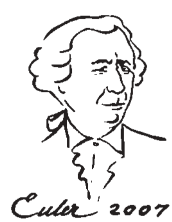


FIGURA 1. *Logotipo de la conmemoración del tricentenario de Euler.*

[1] Conferencia en el Instituto de España, Madrid, 23 de octubre de 2007.

Mención obligada es también el referirse a los numerosos volúmenes editados recogiendo su obra[2], [3].

Figura 2. *Opera Omnia de Euler en la Biblioteca de la universidad de Basilea.*

Pero siguiendo la sugerencia de Laplace: leed a Euler[4],..., nada mejor que acudir a los medios digitales[5] de los que disponemos en

[2] Una descripción detallada del empeño (del que ahora se cumple un siglo) de la edición de la obra de Euler puede encontrarse en el artículo de Andreas Kleinert y Martin Mattmüller «Leonhardi Euleri Opera Omnia: a centenary Project», *Newsletter of the European Mathematical Society,* September 2007.

[3] Con la ayuda del personal de la Biblioteca de la Facultad de Matemáticas de la UCM he podido comprobar que la obra completa editada de L. Euler parece estar sólo en esta biblioteca en España, si bien hay varios centros españoles que poseen un abundante número de volúmenes. Disponer de la obra completa me lleva a un sentimiento de agradecimiento a generaciones anteriores de profesores de mi Facultad que me constan que iniciaron esta colección casi al comienzo, hace ahora 100 años, de la edición de la colección. Su interés y esfuerzo (con unos costes económicos nada despreciables) dicen mucho del orden preferente que siempre se ha otorgado en nuestra Facultad a esta magna obra.

[4] En mi discurso de ingreso a la Real Academia de Ciencias aludí a como A. Dou y A. Liñán me habían aconsejado vivamente la lectura de Euler.

[5] En ese mismo espíritu, durante la conferencia ofrecí la posibilidad de encontrar el PDF del archivo ppt en la web http://www.mat.ucm.es/~jidiaz/Publicaciones/Divulgacion/

nuestros día para encontrar la obra (casi) completa de Euler *on line*. Tal meritoria empresa está al libre acceso, por medio de Internet, en la página web *The Euler Archive* (http://math.dartmouth.edu/~euler/) que fue concebida, y sigue creciendo, bajo la dirección de *Dominic Klyve y Lee Stemkoski del Dartmouth College (USA)*. Se beneficiaron de la posibilidad de poder hacer uso público de las publicaciones en revistas antiguas poseyendo una antigüedad superior o igual 200 años[6].

A mi juicio, merece la pena detenerse en detallar lo que el lector puede encontrar en esa página web.

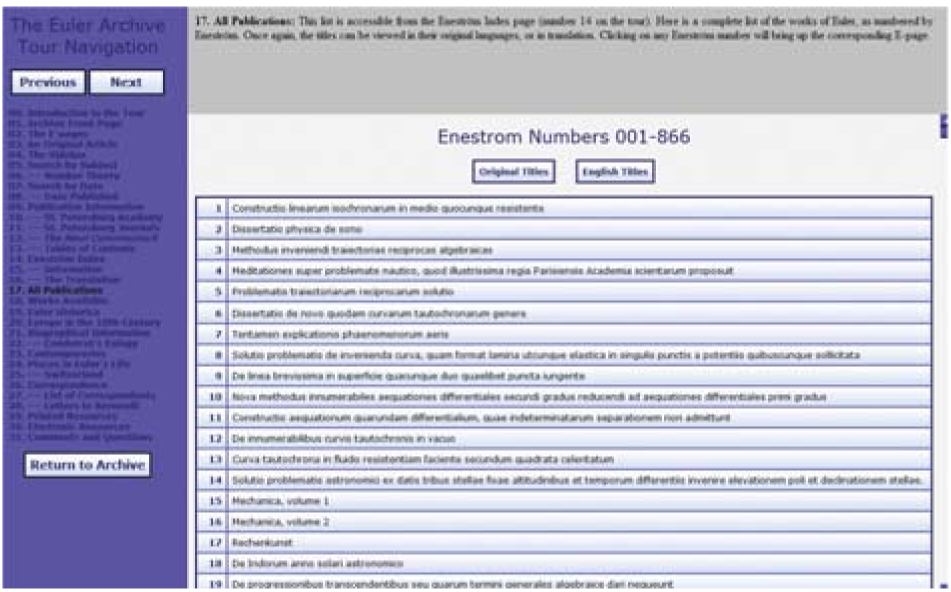


Figura 3. *Página de navegación de http://math.dartmouth.edu/~euler/ con la clasificación Enestrom de 866 trabajos de Euler.*

[6] Lo que, en particular, excluye la posibilidad de ofrecer copia escaneada de los volúmenes de la *Opera Omnia* (y los valiosos volúmenes con comentarios a la obra de Euler) como tal, que como se ha dicho, no llega a datar una centena de años.

Figura 4. *Página de navegación de http://math.dartmouth.edu/~euler/ con la reproducción de los trabajos originales de Euler.*

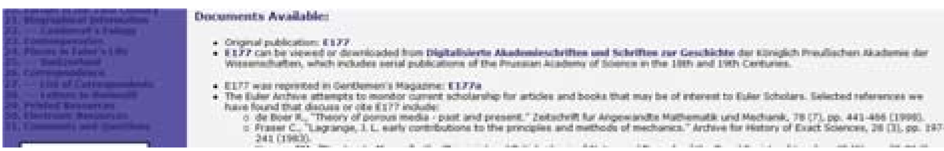


Figura 5. *Fragmento de la página de navegación de http://math.dartmouth.edu/~euler/*

Figura 6. *Página de navegación de http://math.dartmouth.edu/~euler/ con la reproducción de una primera página de un trabajo de Euler.*

En la preparación de esta conferencia, me he beneficiado en una gran medida[7] del estudio, digno de todo elogio de Clifford Ambrose Truesdell III (1919-2000), entre otras muchas cosas, Fundador de: Archive for Rational Mechanics and Analysis (1952), Archive for History of Exact Sciences (1960). Merece la pena la lectura del artículo A Guide to the C. Truesdell Papers, 1939-1989, que puede encontrarse en http://www.lib.utexas.edu/taro/utcah/00308/cah-00308.html.

Figura 7. *Clifford Ambrose Truesdell III (1919-2000).*

El plan del resto de esta conferencia es el siguiente: la sección más extensa se refiere a los trabajos de Euler sobre elasticidad de 1727 a 1750. La tercera sección será dedicada a la controversia sobre las pequeñas vibraciones planas de un resorte de grosor uniforme (1746-1783). Finalmente, en la cuarta sección nos referiremos a las investigaciones de Euler posteriores a su «Primeros principios de la Mecánica» (1752-1783).

2. TRABAJOS INICIALES DE EULER SOBRE ELASTICIDAD (DE 1727 A 1750)

Por extraño que parezca, entre 1691 y 1748, el estudio matemático de la vibración, deformación y elasticidad fue dominado (si no monopolizado)

[7] Sin embargo me he permitido la licencia de alterar el orden seguido por este autor en The Rational Mechanics of flexible or elastic bodies (1638-1788), en Leonhardi Euler: Opera Omnia II, vols. 10 & 11, Zurich, 1960. Además, también he consultado muchas otras referencias: entre ellas las preparatorias del trabajo J. I. Díaz and M. Sauvageot: *On the Euler best column: a singular non local quasilinear equation with a boundary blowing up flux condition. CD-Rom Actas XIX CEDYA / IX CMA*, Univ. Carlos III, Madrid 2005.

por los llamados «geómetras de Bassel» (en particular, la familia Bernoulli y Euler). Mencionaremos los estrechos contactos de Euler con diversos miembros de la familia Bernoulli. De hecho, otro posible título de esta charla podría haber sido «Euler sobre los hombros de los Bernoulli»[8].

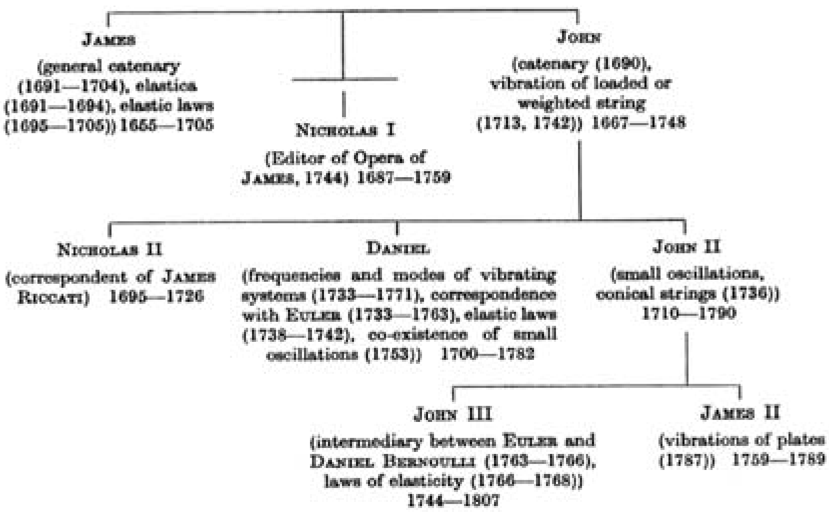


Figura 8. *Parte del árbol genealógico de la familia Bernoulli que tuvieron especial contacto con Euler según Truesdell.*

Acudiendo al *Mathematics Genealogy Project* http://www.genealogy. math.ndsu. nodak.edu/ uno puede encontrar allí lo siguiente:

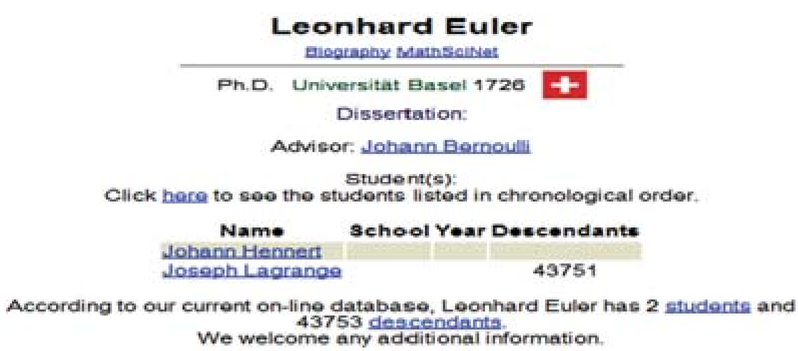
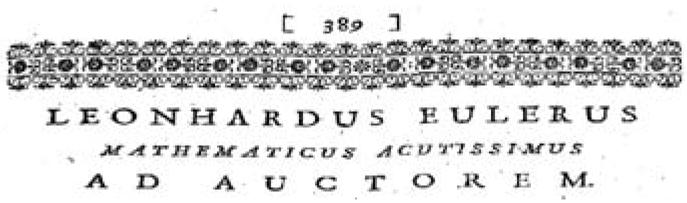


Figura 9.a *Los 43.753 «descendientes de Euler».*

[8] Apelando a la famosa frase invocada por Newton.

Las relaciones de Euler con su director de tesis fueron siempre excelentes y así se puede encontrar en la *Johann Bernoulli, Opera omnia 4*, una carta muy significativa de Euler a Johann B de 1742.


[389]

LEONHARDUS EULERUS

MATHEMATICUS ACUTISSIMUS

AD AUCTOREM.

Figura 9.b *Fragmento de la carta de Euler a Johann Bernoulli de 1742.*

Pero pasemos ya a ilustrar algunos de los logros de Euler en Elasticidad en este primer periodo (de 1727 a 1750).

2.1. Flexión estática. Vibración de campanas

2.1.a. Justificación de la ley de Euler-Bernoulli (James y Daniel). Su primer trabajo sobre elasticidad parece ser *On the oscillation of elastic rings*, Bassel, 1727: publicado 60 años después de su muerte. Aborda un problema muy complejo como es el de las oscilaciones de las campanas y otros cuerpos similares y que abordaría también en los últimos años de su vida.

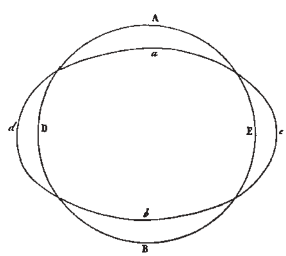


Figura 10. *Esquema de Euler para el estudio de la vibración de campanas.*

Retoma el cálculo de John Bernoulli sobre la frecuencia fundamental (pero se equivoca tal y como le señaló el propio John Bernoulli) pero *deduce rigurosamente* las ecuaciones de James Bernoulli a partir del principio de Hooke sobre la extensión de fibras. Nos referiremos más tarde a tales ecuaciones.

2.1.b. Introducción del módulo de extensión. En el trabajo citado analiza la extensión de los filamentos inicialmente curvados a los que aplica correctamente la ley de Hooke e introduce un coeficiente constitutivo del material y que más tarde sería denominado como módulo de Young (y denotado por E).

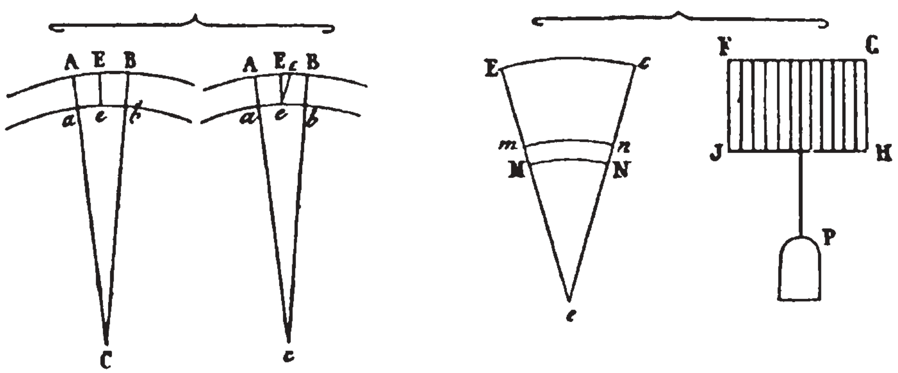


Figura 11. *Bandas elásticas sometidas a una deformación.*

Concluye que el momento obedece a la fórmula:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{B}(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}),\ \mathfrak{B} = \mathrm{EI}.$$

para bandas elásticas inicialmente curvadas (de radio inicial de curvatura R) y con un momento de inercia I, mejorando resultados anteriores de Leibniz, Varignon y James Bernoulli.

2.2. Unificación de la catenaria y la elástica

En su articulo *Methodus universalis determinandae curvaturae fili…* (S. Petesburgo, entregado en 1728, y publicado en 1732) aborda un problema que es fruto de su incipiente correspondencia con Daniel Bernoulli (que tan sólo contaba con 28 años frente a los 21 de

Euler 21). Daniel (que oficialmente poseía un nombramiento como doctor en Medicina) sugiere la necesidad de unificar el tratamiento matemático de la catenaria y la elástica. Desde sus comienzos quedarían claras su distintas habilidades e inquietudes: Daniel plantea interesantes problemas, avanza con el tratamiento matemático pero tarde o temprano lo abandona ante la aparición de dificultades técnicas, pasando a concentrarse en el diseño de experimentos (quizás sea el momento de resaltar que Daniel Bernoulli consiguió 10 premios de la Académie des Sciences de París como reconocimiento a la brillantez de las respuestas remitidas a esa Academia tras el enunciado del tema anual del premio en cuestión). Por su lado, y en contraste a lo dicho anteriormente sobre Daniel, Euler culmina las propuestas que comienza (inicialmente provenientes de otras personas o no), unifica intentos anteriores (intenta superar, especialmente, los trabajos de Taylor, Hermann y los Bernoulli), pero además, Euler clarifica la formulación y amplia su alcance extendiéndolo a posibles generalizaciones. Euler obtuvo 12 premios de la Académie des Sciences de París en reconocimiento a la resolución de los problemas propuestos por esa Academia.

En aquel trabajo, Euler, escribe el equilibrio de momentos en un punto arbitrario de una banda elástica

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{B}\frac{1}{\mathrm{r}}, \text{ con } \mathfrak{B} \text{ «rigidez a la flexión» o «elasticidad absoluta»,}$$

que constituye una formulación temprana de la ley de Bernoulli-Euler para el pandeo de una viga. Una aplicación global del equilibrio de los momentos respecto de un punto arbitrario de la viga le lleva a la ecuación

$$-P_y x + P_x y - \int_0^x Y dx + = -\mathfrak{B}\frac{1}{\mathrm{r}}, \text{ siendo } Y = \int_0^s F_y ds \text{ y } X = \int_0^s F_x ds,$$

donde el origen es el punto en el que se aplica la fuerza externa $\mathbf{P} = (P_x, P_y)$. Derivando dos veces, Euler encuentra la ecuación diferencial de la curvatura y luego la estudia en el caso de la catenaria, la parábola, la velaria y la linternaria.

2.3. Equilibrio de una banda elástica por el principio variacional de la energía almacenada

En una carta de Daniel a Euler de 24 de mayo de 1738 éste le afirmaba que: «la energía almacenada de la elástica hace que una función de la curvatura r sea un mínimo o máximo entre todas las deformaciones compatibles»

$$\int \frac{dr^3}{r^2 d\xi^2} = \text{máx. o mín.}$$

Euler preparó su solución a este problema en tan sólo unos meses (el 20 de julio) mandando a publicar más tarde (el 9 de septiembre de 1738) su trabajo *Solutio problematis cuisdam a celeb. Dan. Bernoullio propositi* a Comm. Acad. Sci. Petrop. *(aparecido en 1747).* Con él comienza el uso del Cálculo de Variaciones en Elasticidad (desarrollado también por Euler en su libro de 1744 al que me referiré más tarde).

Más tarde en una serie de cartas a Maupertuis (en los meses de mayo y junio de 1748) afirma: «La elasticidad sigue las mismas leyes variacionales de la acción de fuerzas ordinarias».

2.4. Determinación y clasificación de todas las posibles formas de una elástica rectilínea sometida a una fuerza y un par en sus extremos

Perfeccionando los trabajos de Jean y Daniel Bernoulli, Euler aborda[9] la forma de un cuerpo elástico unidireccional (denominado *elástica*) sometido a un peso y a un par de fuerzas en sus extremos que él formula, tras un cambio de variables, en términos del sistema

[9] Publicado en lo que Truesdell denomina Euler's Notebook EH4 (1740-1744).

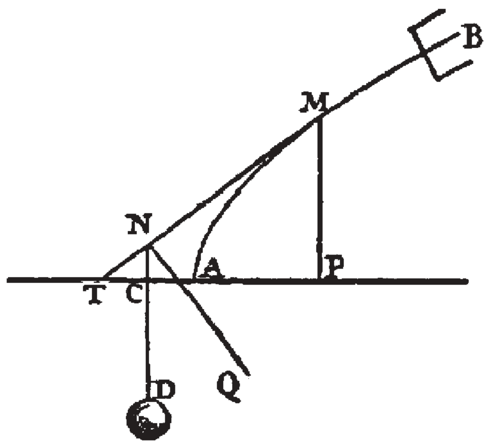


Figura 12. *Estudio de Euler de la elástica sometida a un peso y un par en su extremo.*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(a^2-c^2+x^2)}{\sqrt{(c^2-x^2)(2a^2-c^2+x^2)}},\ \frac{ds}{dx}=\frac{a^2}{\sqrt{(c^2-x^2)(2a^2-c^2+x^2)}}.$$

Son un caso particular de las llamadas *integrales elípticas* pero que Euler abordó mediante su integración por series de potencias, evitando el proceso de la linealización de las ecuaciones (lo que le podría llevar a perder de vista la diversidad de casos posibles). Analizando exhaustivamente todos los casos posibles (por ejemplo el caso límite $a=\infty$ lleva a la línea recta como configuración) Euler obtuvo 9 tipos distintos de *elásticas*. Un trabajo al que Truesdell califica de «golden analysis»[10].

Euler incluyó el tratamiento de la elástica como uno de los apéndices[11] de su libro *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* (Laussanne & Geneva 1744) sobre el Cálculo de Variaciones. En él podemos leer una declaración de principios en el que entre otras cosas nos habla de la concordancia entre los dos métodos (el variacional y el no variacional) que Euler aplica a la Elasticidad.

[10] Véase la obra citada de Truesdell, página 216.
[11] *Additamentum I de curvis elaticis.*

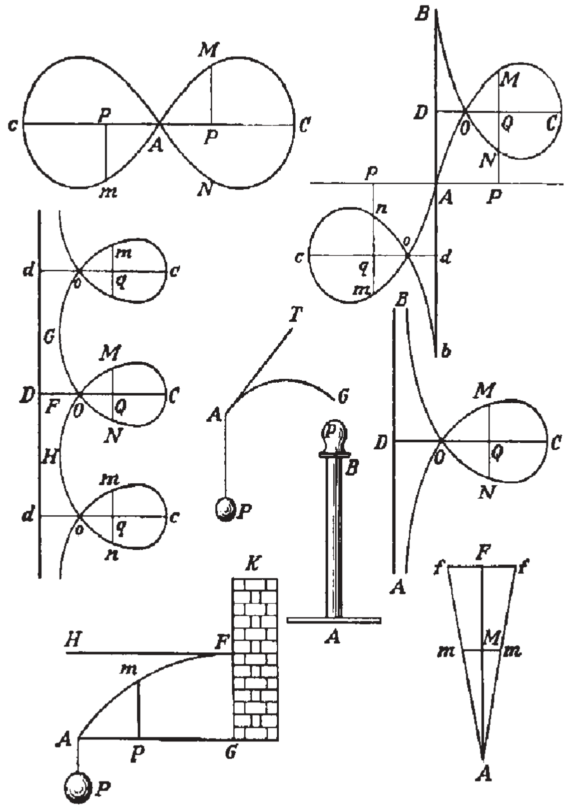


Figura 13. *Algunos de los 9 tipos de elástica.*

«Since the fabric of the universe is most perfect, and is the work of a most wise Creator, nothing whatsoever takes place in the universe in which some relation of maximum and minimum does not appear»… «There are such fine examples of this fact here and there that we scarcely need more to prove it; rather, what remains is but to find in each type of scientific question the quantity taking on the maximum or minimum value, a matter which seems to belong rather to natural science (philosophia) than to mathematics»… «Since then there are two ways of learning the effects of the nature, the one through the effective causes, usually called the direct method, the other through the final causes, the mathematician uses each with equal success»… «…it is to be shown that each method lays open a road to the solution; thence not only does the one greatly strengthen the other, but also we take the highest pleasure in this agreement».

2.5. Fórmula de pandeo (carga crítica) de una columna según Euler

La continuación de su estudio sobre la elástica le llevó a Euler a estudiar el pandeo (*buckling* en terminología inglesa) de una columna sometida a un peso en su extremo.

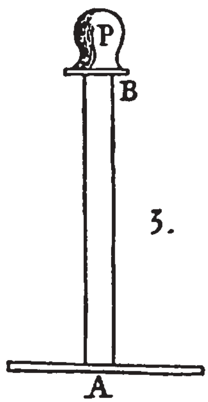


Figura 14. *Figura de Euler para el estudio del pandeo de una columna.*

Como corolario de su clasificación de los nueve tipos de *elástica* obtuvo la fórmula

$$P > \pi^2 \frac{\mathfrak{B}}{l^2}$$

(que luego sería conocida como la *Euler buckling fórmula*) y que arroja el máximo valor del peso que puede sustentar una columna sin romperse. A modo de ejemplo, Euler menciona[12] que una columna de madera dos veces más alta que otra «aguanta» sin romperse un peso cuatro veces mayor que la otra. El estudio de Euler es, una vez más, sistemático y agota todas las formas posibles en función de varios parámetros. Por ejemplo, el ángulo α que origina respecto de la vertical sobre la base recorre un amplio intervalo en función del peso.

[12] Sección 25 del Euler's Notebook EH4.

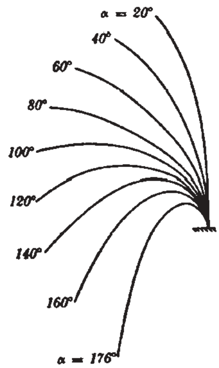


Figura 15. *Representación de los distintos valores del ángulo* α .

Un segundo tipo de problemas elásticos abordado por Euler en el mencionado periodo contrasta con todos los mencionados anteriormente por tratarse de problemas dinámicos (y, por tanto, no meramente estáticos como los anteriores). Es por ello que los englobaremos en un nuevo apartado.

2.6. Vibración

2.6.a. Cuerda discretizada con n masas iguales. Euler retoma los estudios precedentes de Brook Taylor (1685-1731), quien aplica[13], por primera vez, en 1713, el balance de momentos a un elemento infinitesimal de un medio continuo obteniendo la fórmula

$$\sigma \mathrm{A}_n = -F_n \mu \frac{T}{r}$$

siendo A_n la aceleración normal. Hoy sabemos que aplicándolo a los pequeños desplazamientos y pasando al límite se obtiene la ecuación de la cuerda vibrante

$$\sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

[13] *De motu nervi tensi*: Phil. Trans. London 28, Nº 337, (1713), 26-32.

Pero no disponía de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales. En todo caso, muy pronto, diversos autores buscaron configuraciones particulares (las llamadas *soluciones de variables separables*), $y(t, x) = f(t)g(x)$, y así Taylor obtuvo ya la primera frecuencia de vibración (estudiada ya por Galileo y Huygens).

$$\nu = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}.$$

Tras el trabajo de Taylor aparecería el de John Bernoulli de 1727, quien aplica la «conservación de fuerzas vivas» para obtener una ecuación en diferencias del problema discretizado, que le comunica en una carta a su hijo Daniel y que más tarde publicaría bajo un título que hacia referencia a esa carta[14].

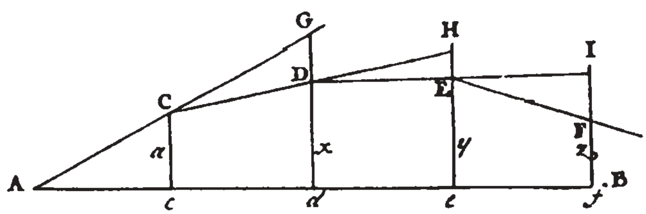


Figura 16. *Análisis de John Bernoulli de las vibraciones de una cuerda discretizada.*

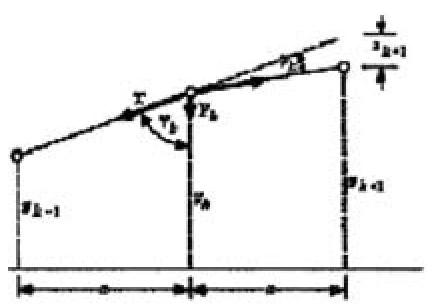


Figura 17. *Notación de John Bernoulli.*

[14] *Theoremata selecta, pro conservatione virium vivarum demostranda et experimentis confirmanda, excerpta ex episstolis datis ad filium Danielem,* 11.Oct&20 Dec. (stil.nov) 1727. Comm.acad. Petrop. 2 (1727), 200-2007 (aparecido en 1729).

Los primeros resultados de Euler los elaboraría para su libro de Música (*Tentatem novae theoriemusicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae*: publicado en 1739, manuscrito de 1731). Para él, la audición del sonido transmitido por el aire dependía de la velocidad de las partículas del aire que alcanzan gracias a la vibración de los puntos de la cuerda. Analizó el caso de una colección de cuerdas que producen el mismo sonido. Obtuvo numerosas propiedades que según él: «… será de gran uso en la construcción de instrumentos musicales». Se repetía la situación en la que los grandes científicos de la época se dedicaban también al estudio y fabricación de instrumentos musicales: Galileo,…, Marsenne, *Treatise on Instruments*, 1633, etc.

Vendría después un importante trabajo[15] de Daniel Bernoulli de 1733 en el que analizaba los modos de vibración de cuerdas vibrantes, señalando la similitud existente con el caso de cadenas colgantes por un extremo y libres en el otro.

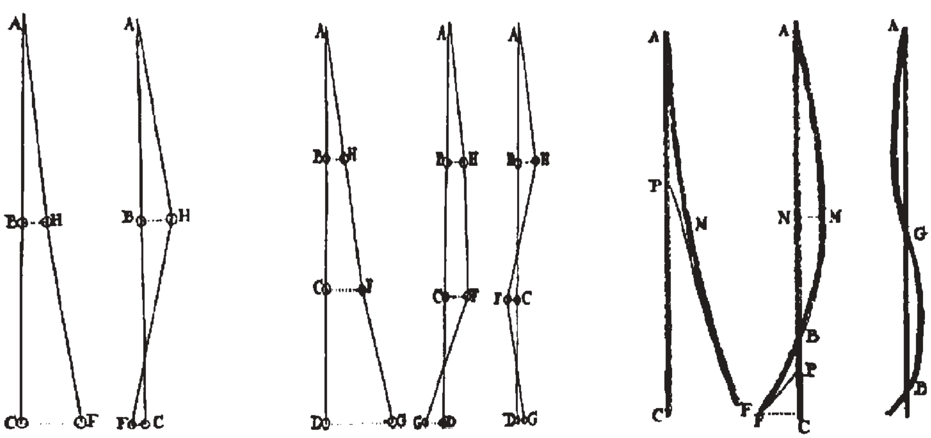


Figura 18. *Modos de vibración de una cuerda discretizada en dos y tres puntos y de una cadena suspendida de un punto.*

Curiosamente, su estudio hace aparecer, por primera vez, la que muchos años más tarde sería conocida como *la función de Bessel* [en honor de F. W. Bessel (1784-1846)].

[15] *Theoremata de oscillationibus corporum filo flexili connexorum et catenae verticuliter suspensae*, Comm. Adad.Sci. Petrop. (1732-1733), 108-122 (aparecido en 1740).

Daniel utiliza el balance de fuerzas (era un gran admirador de Newton) pero no lo formula en términos de aceleraciones. Analiza las frecuencias múltiples (2 o 3, dependiendo del número de masas de la partición). Incluye también algunas disquisiciones sobre movimientos libres y movimientos con ligaduras.

En un trabajo[16] presentado en 1735 Euler obtiene los resultados de Daniel Bernoulli más elegantemente utilizando (por primera) vez los llamados «polinomios de Laguerre» (en honor de E. Laguerre (1834-1886)) como soluciones de la ecuación

$$xy'' + (1-x)y' + py = 0.$$

Analiza también el caso genérico de n frecuencias (caso de n masas) pero no insiste en ello: le falta aún un mejor modelo.

Comparando estos dos trabajos de estos autores excepcionales se aprecia que Daniel parece «más fino» en fenomenología mientras que Euler aparece como «más fino» en análisis matemático.

Más tarde, Euler analiza las vibraciones de un medio horizontal en: *On the propagation of pulses through an elastic medium* 1747, 1750 (oscilaciones longitudinales de masas discretas).

Figura 19. *Discretización de un medio elástico horizontal unidimensional.*

Obtiene la ecuación discretizada

$$M\ddot{x}_k = K(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}) \quad \text{k=1,2,...,n,}$$

y busca la solución de la forma

$$x_k = \mathfrak{A}_k \cos 2\sqrt{\frac{K}{M}}pt, \ \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_{n+1} = 0.$$

[16] *De oscillationibus fili flexilis quotcunque ponduscullis onusti*, Comm. Adad.sci. Petrop. (1736), 30-47 (aparecido en 1741).

Prueba con p = $sen\Phi$ y muestra que

$$p = sen(\frac{k\pi / 2}{n+1}),$$

lo que le lleva al cálculo de frecuencias

$$\nu_k = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{K}{M}} sen(\frac{k\pi / 2}{n+1}), \quad k = 1,2,...,n.$$

Obtiene la solución general (suponiendo siempre velocidad inicial nula) por suma de las vibraciones asociadas a cada frecuencia, con lo que hace aparecer, por primera vez en la literatura, *el principio de superposición* para ecuaciones lineales homogéneas.

2.6.b. Cálculos de Daniel Bernoulli y Euler sobre los modos simples y frecuencias propias de oscilaciones transversales de una barra (1734-1735). En un trabajo de 1733 Daniel Bernoulli había estudiado la forma de una viga horizontal

$$K\frac{d^4y}{dx^4} = y. \tag{1}$$

En su carta de 1735, Euler le contesta que él ya había encontrado tal ecuación como caso particular de la relación más general

$$K\frac{d^2y}{dx^2} = \int_0^x dx \int_0^x y dx + \alpha \int_0^y x dy,$$

integrándola por series (pues la formula exponencial no la introduciría hasta cuatro años más tarde) obteniendo la fórmula que luego se leería como

$$y = \mathfrak{A}\left(\left[\cos\frac{x}{K} + \cosh\frac{x}{K}\right] - \frac{1}{b}\left[sen\frac{x}{K} + senh\frac{x}{K}\right]\right),$$

donde b viene determinado por la condición y=0 cuando x=l.

Poco más tarde, en su trabajo *De minimis oscillationibus corporum tam rigidorum quam flexibilium methodus nova et facilis* (1735), Euler analiza una ecuación muy general (no sólo para la estática sino para todo tipo de oscilaciones) de la forma

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathrm{r}} = \mathfrak{B}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g}{\alpha}\int_0^x dx \int_0^x \sigma y dx$$

lo que conduce a

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{K}}\sqrt{\frac{\mathfrak{B}}{\sigma}}.$$

Años más tarde utilizaría esos cálculos para llegar a la ecuación en derivadas parciales (en lo que sigue EDP) hiperbólica de cuarto orden

$$\frac{1}{c^4}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0.$$

2.7. Solución general de Euler de problemas de vibración lineales (1739)

En su artículo, *De novo genere oscillationum*, Comm. Acad. Sci. Petrop. **11**, (1739), 128-149 (aparecido en 1750), Euler se ocupa, tras Beeckman y Galileo pero por primera vez de manera teórica en la literatura, del problema de la resonancia con respecto a una fuente en vibración con una frecuencia crítica, que él formula en los siguientes términos

$$M\ddot{x} + Kx = Fsen\omega_d t \text{ con } \omega_d = n\omega \text{ y } \omega = \sqrt{\mathrm{K/M}}.$$

También en 1739 Euler se ocupa del problema de la *integración* de ecuaciones diferenciales lineales (que hasta entonces únicamente se abordaba mediante desarrollo en serie) y en una *Carta a John Bernouilli* le habla de un método nuevo, relacionado con el que conocemos como *método del anulador*, que consiste en probar funciones de la forma

$$y = Ce^{px} \text{ con } p = \alpha + i\beta, \text{ e.d. } e^{px} = e^{\alpha x}(C\cos\beta x + Dsen\beta x),$$

como soluciones de la ecuación lineal con coeficietes constantes

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \frac{d^k y}{dx^k} = 0, \text{ con } A_k \text{ constantes,}$$

supuesto que p se toma como raíz del que él denomina *polinomio característico*

$$\sum_{k=0}^{n} A_k p^k = 0.$$

Pone como ejemplo la ecuación (1) obteniendo la fómula

$$y = Ce^{\frac{x}{K}} + De^{-\frac{x}{K}} + Esen\frac{x}{K} + F\cos\frac{x}{K}.$$

En 1740, John Bernouilli le contesta que él tambien había hecho algunos cálculos similares para ciertas ecuaciones concretas y que él no aceptaba el caso en el que las raices de tal polinomio no eran números reales. La correspondencia de Euler con él (de 16 de abril, 20 de junio, 31 de agosto y 18 de octubre) puede ser entendida como las fechas en las que se forja una de las herramientas que caracteriza a la matemática de todos los tiempos posteriores: *el análisis complejo.* Euler no formalizaría su publicación hasta su artículo *De integratione aequationum differentialium altiorum graduum* Mis. Berol. **7**, 193-242 *(1743).* En todo caso, su trabajo aún no es completo y, por ejemplo, no considera el caso de raíces múltiples. Se trata de un trabajo muy meritorio pues presenta, por primera vez en la literatura, la noción de *solución general de una ecuación diferencial ordinaria* (en lo que sigue EDO) *lineal.*

2.8. La primera ecuación diferencial del movimiento: tratamientos de John Bernoulli y D'Alembert de la cuerda colgante (1742-1743)

Tras unos estudios preliminares de su hijo Daniel, el estudio del movimiento de un sólido rígido (una varilla) sujeto por un hilo inextensible y sin masa fue abordado por el veterano John Bernoulli en su trabajo *De pendulis multifilibus,* Opera omnia*,* **4**, 313-331, 1743. Supone que el hilo está en movimiento circular por lo que aparece la fuerza centrípeta que mantiene en extensión al hilo. Se trata, una vez más, de un trabajo muy elogiable, no sólo por la fecha temprana de su elaboración, sino por que lo realizó teniendo 76 años, unos años antes de su muerte (acaecida cuando contaba 81 años). Por curioso que parezca, se trata de uno de los primeros trabajos en los que se sigue la *Segunda Ley de Newton* para encontrar el movimiento de un cuerpo flexible (en esas fechas la vía más utilizada era la de establecer el balance de los momentos angulares). Las fuerzas (centrípetas) las supuso de la forma

$$F_k = M_k y_k \omega^2, \text{ con } \omega^2 \text{ constante,}$$

lo que originaba unos ángulos en función de la tensión

$$F_k = T_k sen\varphi_k - T_{k-1} sen\varphi_{k-1} \text{ y } T_k \cos\varphi_k = M_k g + T_{k-1}\cos\varphi_{k-1}.$$

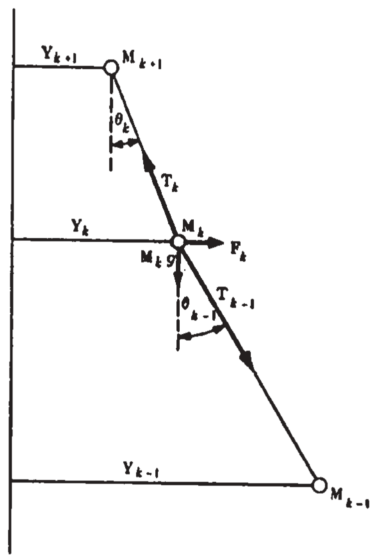


Figura 20. *Estudio de John Bernoulli de una cuerda en rotación.*

Sustituyendo los ángulos en función de los desplazamientos de las partículas discretas asociadas obtiene la ecuación discretizada

$$\frac{M_k}{g} y_k \omega^2 = M_k \frac{y_k - y_{k+1}}{a_k} + \sum_{q=1}^{k-1} M_q \left(\frac{y_q - y_{q+1}}{a_q} + \frac{y_{q-1} - y_q}{a_{q-1}}\right).$$

(escribiendo la expresión de la fuerza en términos de la segunda ley de Newton se llega a un sistema acoplado ecuaciones ordinarias de segundo orden en t). Irrumpe entonces en esos estudios el joven D'Alembert quien en 1743 había publicado su *Tratado de Dinámica (*a la edad de 24 años). El llamado *Principio de d'Alembert* no conduce a nuevas fórmulas sino que reinterpreta el balance de fuerzas añadiendo las «fuerzas de inercia»

$$\sum M(\mathbf{a}-\mathbf{a}_{\mathbf{f}})=\mathbf{0},$$
$$\sum \mathbf{r}\times M(\mathbf{a}-\mathbf{a}_{\mathbf{f}})=\mathbf{0}.$$

Lo aplica al péndulo doble. No hay ecuaciones pero lo aplica para hallar las del péndulo doble y obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales asociadas.

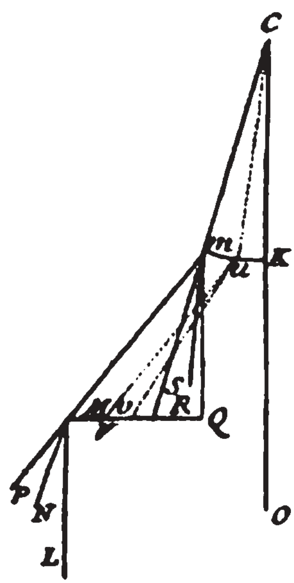


Figura 21. *Estudio de D'Alembert del péndulo doble.*

Pese a su originalidad, su escritura es algo imprecisa y poco cuidadosa con referencias previas. En el caso de un péndulo múltiple, utiliza el cálculo de Daniel Bernoulli sobre aceleraciones discretas y propone (en función de la longitud de arco *s*)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial y}{\partial s} - (l - s)\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}.$$

Se puede decir que es la *primera ecuación en derivadas parciales de la historia* pero el hecho de que una de las variables sea la longitud de arco *s* no la hacía muy útil para su resolución matemática.

2.9. Oscilaciones generales (no necesariamente pequeñas) de una cuerda cargada

En 1744, Euler analiza los casos de una cuerda cargada y de un conjunto de barras acopladas obteniendo las ecuaciones de sus oscilaciones generales (no necesariamente pequeñas). En *De motum corporum flexibilium* (1744, aparecido en 1751), inspirado en John Bernoulli, por primera vez adopta las ecuaciones de Newton (y no el balance del momento angular) como punto de partida.

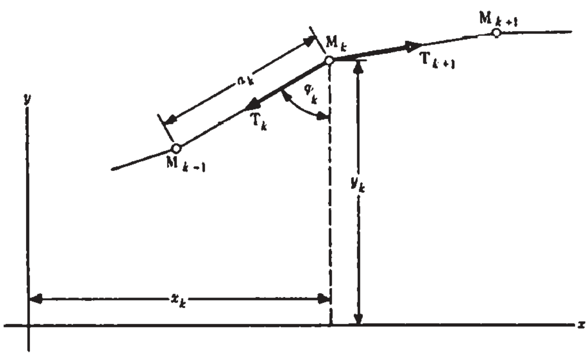


Figura 22. *Grandes oscilaciones de una cuerda discretizada.*

$$\begin{aligned}
&M_k \ddot{x}_k = T_{k+1} sen\varphi_{k+1} - T_k sen\varphi_k \\
&M_k \ddot{y}_k = T_{k+1} \cos\varphi_{k+1} - T_k \cos\varphi_k \\
&k = 0,1,\ldots,n.
\end{aligned}$$

Aplica la conservación de la energía (cinética pues no supone gravedad) obteniendo

$$\sum_{k=0}^{n} M_k(\dot{x}_k \ddot{x}_k + \dot{y}_k \ddot{y}_k) = 0$$

y pasa al límite correctamente (con s como variable), obteniendo el sistema de EDPs

$$\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}}{\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}} = \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial \Sigma^2}}{\frac{\partial^2 V}{\partial \Sigma^2}}, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \Sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \Sigma^2}\right)^2 = \left(\frac{ds}{d\Sigma^2}\right),$$

siendo

$$U = \Sigma x_0 + \int_0^s d\Sigma \int_0^s sen\varphi ds,$$
$$V = \Sigma y_0 + \int_0^s d\Sigma \int_0^s \cos\varphi ds$$

Aquí !(s), que representa la masa entre 0 y s, puede ser considerada como *una coordenada Lagrangiana* (pero introducida antes que Lagrange). Desgraciadamente, no se da cuenta de que esas EDPs implican ya la llamada ecuación de ondas de D'Alembert en el caso particular en el que la oscilación es pequeña. En ese trabajo menciona explícitamente lo que él cree que ha de ser el papel de las matemáticas en su articulación con otras ramas de la Ciencia y así escribe:

> «Therefore the solution of this mechanical problem is reduced to an analytical problem: this must be agreed»

2.10. Un problema de n-cuerpos

En el trabajo de Euler: *On the propagation of pulses through an elastic medium* 1747, 1750, se considera, por primera vez, las ecuaciones de las oscilaciones longitudinales de masas discretas).

Figura 22. *Oscilaciones horizontales de un sistema elástico de partículas.*

Muestra que el sistema se modeliza por las ecuaciones

$$M\ddot{x}_k = K(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}) \text{ k=1,2,...,n.}$$

Para ello, procede a una fácil adaptación de sus argumentos correspondientes al caso en el que las vibraciones son transversales.

2.11. Primeros principios de la Mecánica según Euler (1750)

En su trabajo fundamental *Découverte d'un nouveau principe de mécanique, Berlin 1750* (aparecido en1752) Euler cambia la esencia de la Mecánica: hicieron falta más de 60 años para que las ideas de Newton fuesen formuladas con precisión en términos de tres sencillas ecuaciones:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F_x,\ M\frac{d^2y}{dt^2} = F_y,\ M\frac{d^2z}{dt^2} = F_z.$$

Utiliza coordenadas cartesianas (a diferencia de Newton y otros) y deduce de ellas las ecuaciones del momento angular, expresión de la energía cinética, etc. Elimina numerosas hipótesis mecánicas de problemas concretos anteriores y transfiere el estudio de la modelización de cada problema al de su resolución conectando así la Mecánica con el Análisis. En ese trabajo comenta también que en el caso de un medio continuo se ha de escribir dM y dF para denotar a los elementos infinitesimales de masa y de fuerza por unidad de volumen. Más tarde aplicará esta versión cuantificada de las leyes de Newtion al estudio de sólidos rígidos y de fluidos, pero también aprovecha sus muchos estudios de fuerzas, realizados en trabajos anteriores, reformulando muchos de ellos ahora en términos de EDPs. Así es como obtiene la ecuación de las oscilaciones transversales de una barra elástica (1734-1735)

$$\frac{1}{c^4}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0.$$

Reformula también las oscilaciones (no necesariamente pequeñas) de una cuerda, en su trabajo de (1744), obteniendo

$$\sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}(T \frac{\partial y}{\partial s}),\ \sigma \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}(T \frac{\partial x}{\partial s}),\ \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1.$$

3. CONTROVERSIA SOBRE LAS PEQUEÑAS VIBRACIONES PLANAS DE UN RESORTE DE GROSOR UNIFORME (1746-1783)

3.1. Aunque Taylor ya había realizado (en 1713) el estudio previo para llegar a la EDP correspondiente, no llegaba a entender (ni tampoco sus contemporáneos) el problema mecánico: pensaban que sólo existía una sola frecuencia (la fundamental).

3.2. John Bernoulli llega (en 1727) hasta 6 masas unidas y obtiene 6 frecuencias. Ignora el caso de n>6.

3.3. Aparece la Memoria de Daniel Bernoulli sobre la composición de modos simples (1753) (ya había calculado, en 1737, las frecuencias para n masas), motivado por las publicaciones de D'Alembert y Euler. Muestra la *superposición* de dos modos simples y escribe: «La mejor prueba de que las ondulaciones del aire no interfieren unas con otras es que en un concierto uno escucha todas las partes distintivamente». Lo atribuye a una propiedad física más que a un resultado matemático de este tipo concreto de EDO (las ecuaciones lineales).

3.4. D'Alembert formula, en 1751, la correcta EDP de la cuerda vibrante y su solución formal. Dos importantes trabajos previos fueron Recherches sur la courbe que form une corde tendue mise en vibration, Berlin (publicado en 1747) y su «Suite..» (de 1749). La ecuación obtenida tiene ya la expresión que permanecería hasta nuestros días:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad c^2 = \frac{T}{\sigma}\cdot$$

Parte del análisis de Taylor de 1713 y utiliza, por primera vez en su caso, la 2.ª Ley de Newton en un medio continuo (no utiliza el principio que lleva su nombre: Principio de D'Alembert). Muestra la importante fórmula

$$y = \Phi(ct + x) + \Psi(ct - x),$$

que según él: «incluye infinitas curvas». Los extremos, supuestamente fijos (en x=0 y x=l) obligan a una serie de propiedades de compatibilidad sobre Φ y Ψ. Esto hace que la función deseada tenga una *prolongación par* fuera del intervalo (0, l).

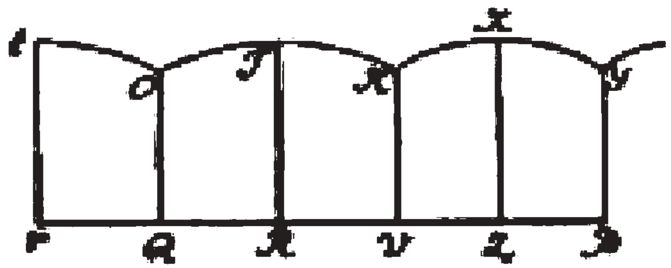


Figura 23. *Prolongación según D'Alembert.*

Esto le lleva a afirmar: «La velocidad inicial debe ser impar y su desarrollo en serie de potencias de *x* solo puede tener potencias pares». En su «Suite...», de 1749, busca soluciones separables

$$\Phi(ct + x) + \Psi(ct - x) = f(t)g(x),$$

obteniendo que necesariamente

$$\frac{1}{c^2}\frac{f''}{f} = \frac{g''}{g} = A,$$

lo que le permite identificar f y g. Se trata de la primera vez en la que se obtiene una solución de una EDP por el método de separación de variables. «El dato inicial ha de ser una función par en x=0 y x=l: en otro caso el problema no puede ser resuelto, al menos por mi método». Para él, toda función ha de tener una «ecuación» (expresión analítica). Las funciones discontinuas, derivables a trozos, etc., no son «funciones mecánicas» (según Leibniz).

3.5. En 1748 Euler escribe una memoria sobre soluciones dadas por funciones generales (no necesariamente regulares). Se trata de: De vibratione chordarum exercitatio, *Nova acta erud.* 1749, Berlin (presentada, en francés, en 1748). Señala similitudes con D'Alembert (1747) aunque este último afirmaría sobre el trabajo de Euler que tan sólo ofrecía: «un método similar pero más largo». Considera datos iniciales «continuos» arbitrarios (no necesitan ecuaciones de definición, con curvatura continua a trozos) con lo que abre una nueva parcela del Análisis. Muestra una periodicidad (universal) en t (continuando el trabajo de Taylor 1713) que admite otras periodicidades menores según sean los datos iniciales

$$v_k = kv_1, \ \text{k=2,3,...}$$

Obtiene, por primera vez en la historia, una fórmula para la solución general de la EDP, expresada como

$$y = \sum a_k sen \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi ct}{l},$$

pero no especifica si la suma es finita o infinita.

3.6. En una segunda memoria, Euler analiza, en 1754, la importancia capital de la ecuación en derivadas parciales. Contestando a dos memorias de Daniel Bernoulli sobre la composición de modos simples de 1753 (y también a un trabajo anterior de D'Alembert), Euler publica *Remarques sur les memoires précédens de M. Bernoulli* (Berlin 1753: aparecida en 1755). Introduce la noción de operador diferencial, que según indica, es … «d'une très grande utilité dans quantité de problemes mécaniques et hydrodynamiques». Es curioso observar que en su texto, la ecuación de la cuerda vibrante aparece escrita con la siguiente notación:

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right).$$

Euler suscita explícitamente la cuestión de si «toda función puede ser representada por una serie trigonométrica infinita». Afirma que la causante de la superposición no es la Mecánica, sino la linealidad de la EDP.

En esa época aparece la primera memoria de Lagrange (1759) en la que ofrece una solución explícita de la cuerda cargada y sugiere un (fallido) paso al límite. Le sigue así un periodo de polémicas varias (1760-1767) en el que aparecen las investigaciones de Euler sobre la propagación y reflexión de ondas (1764-1765). Muestra la velocidad finita de propagación y propone el, más tarde denominado, *método de imágenes*.

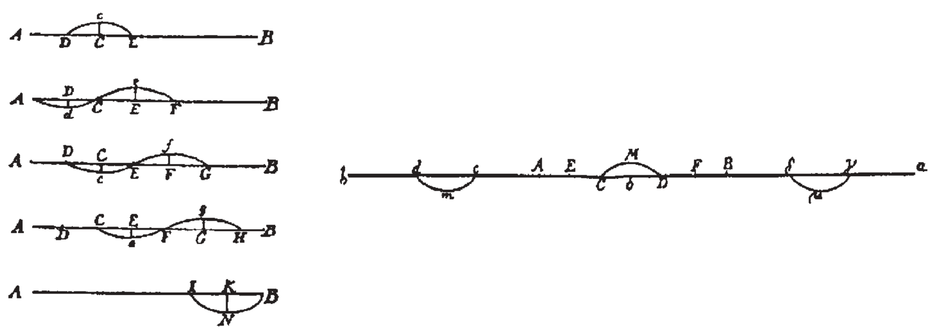


Figura 24. *Estudio de propagación de señales según Euler.*

Se produjeron diferentes polémicas, hasta el 1783, que cabe calificar de muy fructíferas pues afectaban a lo que luego serían los fundamentos del Análisis Matemático como es la noción más general de función.

4. INVESTIGACIONES DE EULER POSTERIORES A SUS «PRIMEROS PRINCIPIOS DE LA MECÁNICA» (1752-1788)

4.1. La cuerda vibrante no homogénea

Entre 1752y 1765 Euler produce los primeros resultados sobre la cuerda no homogénea. Estudió los modos simples en ciertos casos concretos. Conviene recordar que Daniel Bernoulli ya había considerado, en 1732, la cuerda de sección variable y había mostrado que en ese caso c^2=Tσ(x). A ese trabajo le siguieron otros de Euler (1759) y de Lagrange (1760) en los que se buscaba la solución en la forma

$$y = \sum_k U_k(x)[\Phi^k(ct+x) + \Psi^k(ct-x)].$$

En1762 Euler analiza el siguiente problema inverso: hallar la forma de la sección variable para la que las frecuencias puedan ser medidas. Esto le llevó a encontrar soluciones no periódicas. Consideró el caso de

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{(1+\frac{x}{\alpha})^4},$$

y encontró la adecuada generalización de la fórmula de D'Alembert. Euler considera también el caso de sección discontinua (dos materiales distintos pegados). En ese caso aparecen, de manera natural, datos iniciales generando triángulos (y por tanto no regulares en todos sus puntos).

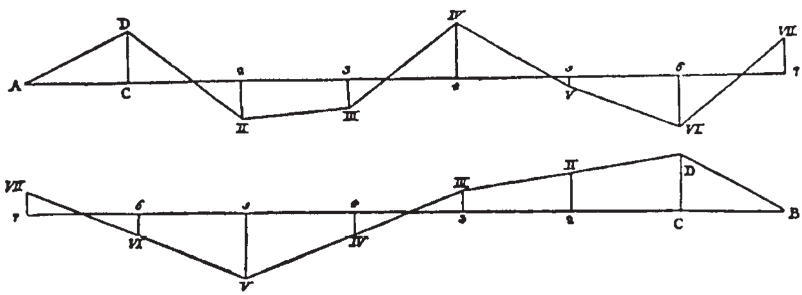


Figura 25. *Estudio de la vibración con sección discontinua según Euler.*

Se puede decir que Euler encuentra así la primera solución general de una EDP de la historia.

4.2. «Segunda polémica», errores y otros casos concretos (1770-1788)

Una serie de trabajos sobre la cuerda de sección variable por parte de D'Alembert 1770, Euler 1772 (cometió un error que era inconsistente con sus propios resultados de 1762) y Daniel Bernoulli 1774, generaron un segundo periodo de polémicas que fue poco fructífero, en contraste a la «primera polémica»: fue de escasa trascendencia posterior, les «encadenó» a dedicar fuerzas y tiempo a un problema no muy relevante y aparecieron muy escasos resultados matemáticos contundentes.

4.3. Vibraciones de membranas y láminas

El precedente de este tipo de resultados se puede situar en el trabajo de Euler de 1774 en el que analiza las vibraciones planas de una cuerda pesada suspendida de uno de sus extremos, lo que le lleva a considerar la ecuación

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{\sigma}\int_0^x \sigma dx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

que puede ser considerada como la primera ecuación integrodiferencial estudiada en la historia. El importante caso de cuerdas de sección constante conduce a la ecuación

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial y}{\partial x}) = 0.$$

Eso le llevó a proponer un nuevo método para resolver ecuaciones trascendentes de la forma

$$J_0(2\sqrt{\frac{l}{\alpha}}) = 0,$$

donde la función

$$y = KJ_0(2\sqrt{\frac{x}{\alpha}}),$$

es la, más tarde, denominada como función de Bessel. Euler retoma el tema en 1781: utiliza cambios de variable en integrales de su libro *Institutiones calculi integralis* 1769 (de más de 400 páginas).

Euler analizó también las vibraciones planas de una varilla recta o curvada en los años 1760 y 1774. Una motivación para ello fue su trabajo, de 1727, sobre vibraciones de campanas, mencionada en la subsección 2.1.a. Desgraciadamente produjo una teoría fallida (un error de signo fue detectado por Sophie Germain en 1821 y más tarde sería aireado en el famoso libro de Love de 1927, lo que contribuyó a un cierto desprestigio de Euler durante una época). Más tarde, llegarían los trabajos definitivos de Euler sobre 6 tipos de vibraciones transversales de varillas rectas (1772-1774) y su verificación experimental por Jordan Ricatti (1782) y Chladni (1787).

En 1759, Euler desarrolla la teoría sobre la membrana vibrante, de gran interés en Acústica: de hecho su título es muy revelador «Sobre la vibración de tambores». Se trata del primer éxito de una teoría matemática en dimensión superior a uno. La ecuación pasa a ser

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}=0,\quad c^2=\frac{T}{\sigma}\cdot$$

Euler analiza también el caso de un tambor circular y muestra que la ecuación pasa a ser

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}\cdot$$

Se trata de la primera vez en la que aparece el cambio de variable a coordenadas polares. Buscando soluciones de la forma obtiene por primera vez la que luego sería denominada como ecuación de Bessel

$$u''+\frac{1}{r}u'+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\beta^2}{r^2}\right)u=0,$$

pero no llega a hacer un estudio espectral, ni de las curvas nodales. Se podría achacar una cierta «falta de atención en el problema» (quizá motivado por la aparición de la «segunda polémica»).

Aparece la conjetura de Euler sobre los tonos de campanas (similares a los de tambores circulares) y más tarde llegarían los experimentos de 1787 de E.F.F. Chladni (1756-1827) sobre vibraciones de láminas libres que niegan esas conjeturas.

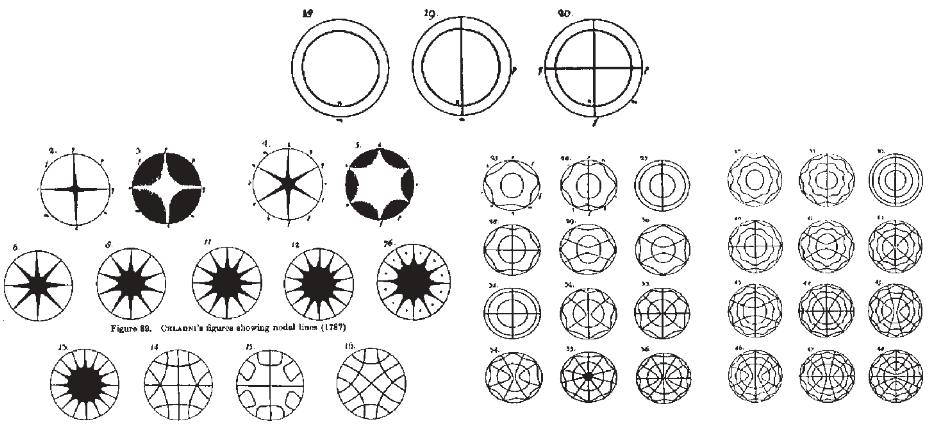


Figura 26. *Experimentos de 1787 de E.F.F. Chladni.*

4.4. Estudios de Euler (1764) sobre modelos discretos (época final)

Utiliza sólo los primeros principios de la Mecánica para considerar problemas de al menos 3 cuerpos con acoplamientos elásticos. Plantea, por primera vez, una teoría de la «torsión» (adelantándose así a los experimentos de Ch.A. Coulomb (1736-1806) de 1773).

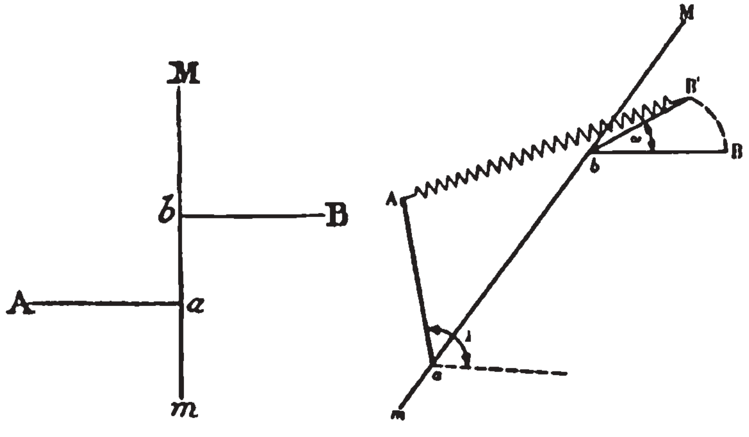


Figura 27. *Modelos discretos de acoplamiento estudiados por Euler en 1764.*

4.5. Flexión estática plana y pandeo de varillas rectas

En 1757 Euler realiza el cálculo sobre el pandeo por carga de columnas de sección no constante marcando así el punto de arranque de trabajos posteriores de diferentes autores: distinción de diferentes tipos de pandeos por Daniel y John Bernoulli (1766), dos memorias de Lagrange (1770, 1773), etc. El famoso cálculo de Euler, que profundiza el antes mencionado sobre la altura a la que la columna vertical cargada se pandea se produjo en los años 1776 y 1778. Son obras maestras en las que Euler, ya mayor de 70 años, sigue dejando su impronta sin perder su distinción de infatigable calculador.

4.6. Estática y dinámica de curvas oblicuas

La teoría de Euler de la elástica oblicua (1774-1775) fue desarrollada por motivaciones basadas en aspectos musicales. *Euler* mejoró entonces el estudio variacional, de 1761, de Lagrange para el movimiento de curvas flexibles. En esas obras, Euler muestra un dominio asombroso del álgebra vectorial y de la geometría diferencial que aún estaban por desarrollar: por ejemplo, en esos trabajos aparece por primera vez el vector binormal y el plano osculador de una curva en 3 dimensiones. De hecho, su «ultimo trabajo» (en vida), de 1782, titulado *Accuratior evolutio formularum pro filorum flexibilium aequilibrio et motu inventarum,* trata sobre estos temas.

4.7. Leyes generales de la Elasticidad

Curiosamente, pese a que sus trabajos fundamentales en Mecánica de Fluidos arrancan incluso antes de 1750, no sería hasta los trabajos de Euler de 1771 y 1774 cuando él introdujo la *fuerza de cizallamiento* y con ella la derivación de las ecuaciones generales del equilibrio de una curva deformable.

Se adelantó así al trabajo de Coulomb, de 1773, en el que aparece también el esfuerzo de cizallamiento interior. En los años 1774 y 1776, Euler propuso la definición formal del módulo de extensión y encontró las leyes de escala finales sobre las frecuencias y cargas de pandeo de varillas rectas.

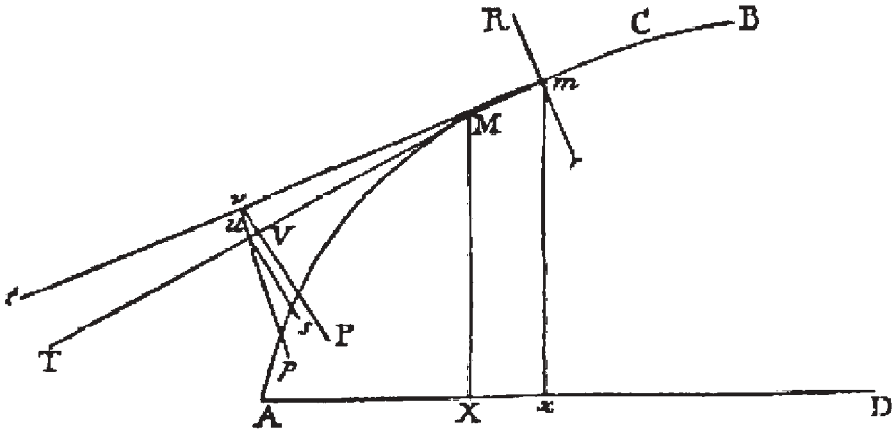


Figura 28. *Fuerza de cizallamiento en elasticidad según Euler (1771).*

A modo de conclusión, Leonhard Euler (1707-1783) fue uno de los más distinguidos matemáticos de la historia en el que confluyen grandes valores científicos y humanos: visión interdisciplinar, curiosidad y capacidad de trabajo inagotables, conciliador entre sus contemporáneos, superación de adversidades y «elasticidad» para adaptarse a temas diversos. Por todo ello, fue y seguirá siendo, *un ejemplo para generaciones presentes y futuras.*