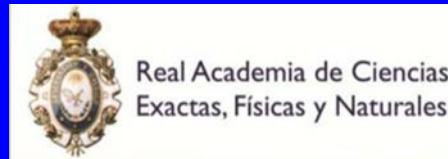


Ciencia básica que sustenta algunos modelos climáticos

J.I. Díaz



12 de mayo de 2023

1. Introducción.

El año 2022-2023 fue declarado por la Unesco como *el año internacional de las Ciencias Básicas para el Desarrollo Sostenible (IYBSSD 2022)*.

https://www.iybssd2022.org/es/inicio/#pll_switcher

Desarrollo sostenible y ciencias básicas



La **Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible** es el ambicioso programa establecido por todos los Estados miembros de la ONU para garantizar un desarrollo equilibrado, sostenible e inclusivo del planeta. **Las ciencias básicas**, basadas en la curiosidad, tienen una contribución esencial que hacer a la aplicación de esta agenda. Proporcionan los medios para afrontar retos vitales como el acceso a los alimentos, la energía, la salud y las comunicaciones para todos. Nos permiten comprender el impacto de los más de 8.000 millones de personas actuales en el planeta y actuar para limitarlo y, a veces, incluso reducirlo. **Las ciencias básicas** son a la vez la base de los grandes avances tecnológicos que estimulan la innovación, esenciales para la formación de los futuros profesionales e indispensables para el desarrollo de poblaciones capaces de participar en las decisiones que afectan a su futuro. **El Año Internacional de las Ciencias Básicas para el Desarrollo Sostenible**, proclamado por la Asamblea General de las Naciones Unidas, es una oportunidad única para convencer a todos los interesados de que una comprensión básica de la naturaleza conducirá a una acción más eficaz en beneficio de todos.



Real Academia de Ciencias
Exactas, Físicas y Naturales

SEMANA DE LA CIENCIA
Y LA TECNOLOGÍA EN EL CSIC
2022



Jornada de debate

El lugar de la ciencia básica en la investigación y en el desarrollo sostenible

14 de noviembre de 2022

9:30 - 14:00 h

Sede de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas
y Naturales de España (Madrid)

Acceso libre hasta completar aforo

Retransmisión online



Más info

Organizan: Instituto de Ciencias Matemáticas (CSIC-UAM-UCM-UC3M) y
Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España



9:30. Inauguración

Eloísa del Pino Matute, presidenta CSIC.

Federico Morán, presidente Fundación Madri+d.

Jesús María Sanz Serna, presidente Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (RAC)

10:00. Mesa redonda "Ciencias básicas: el pilar de un desarrollo sostenible".

Miguel Delibes de Castro (CSIC y RAC).

Ana María Díez Pascual (Universidad de Alcalá de Henares).

David Ríos (ICMAT-RAC)

Ana Rodríguez López (CSIC).

Modera: Patricia Fernández de Lis (El País)

11:45. Mesa redonda "Financiación de la ciencia básica: un marco europeo hacia los ODS".

Luis Sanz (CSIC).

Paola Bovolenta (CSIC y ERC)

Marta Soler (Universidad de Barcelona y directora de CREA)

13:00. Cierre. José María Martell, vicepresidente de Investigación Científica y Técnica del CSIC

<https://www.youtube.com/watch?v=yGLiKpqS5Vs>

3h 44m

Enfoque de esta conferencia: señalar el papel fundamental que juegan ciertos **principios básicos que, a modo de las cerchas de un puente, sustentan la construcción de importantes modelos climáticos.**



Al igual que esas cerchas son retiradas una vez construido el puente, las contribuciones de las ciencias básicas parecen no estar presentes al observar esos modelos. Sin embargo, su papel es absolutamente fundamental. Esto ocurre en multitud de modelos de las ciencias experimentales y de las ciencias sociales.

En este caso, lo ilustraremos mediante unos **modelos matemáticos de gran simplicidad que ofrecen la posibilidad de obtener algunos diagnósticos sobre el Cambio Global Climático a muy largas escalas de tiempo.**

Exposición con un fin muy peculiar: contraste con otras exposiciones (Collège de France 1997, Chiba (Japón) 1999, ... , *Ciencia para Todos* (Segovia, 2021); *Cambio Climático* (Residencia de Estudiantes 2022),...

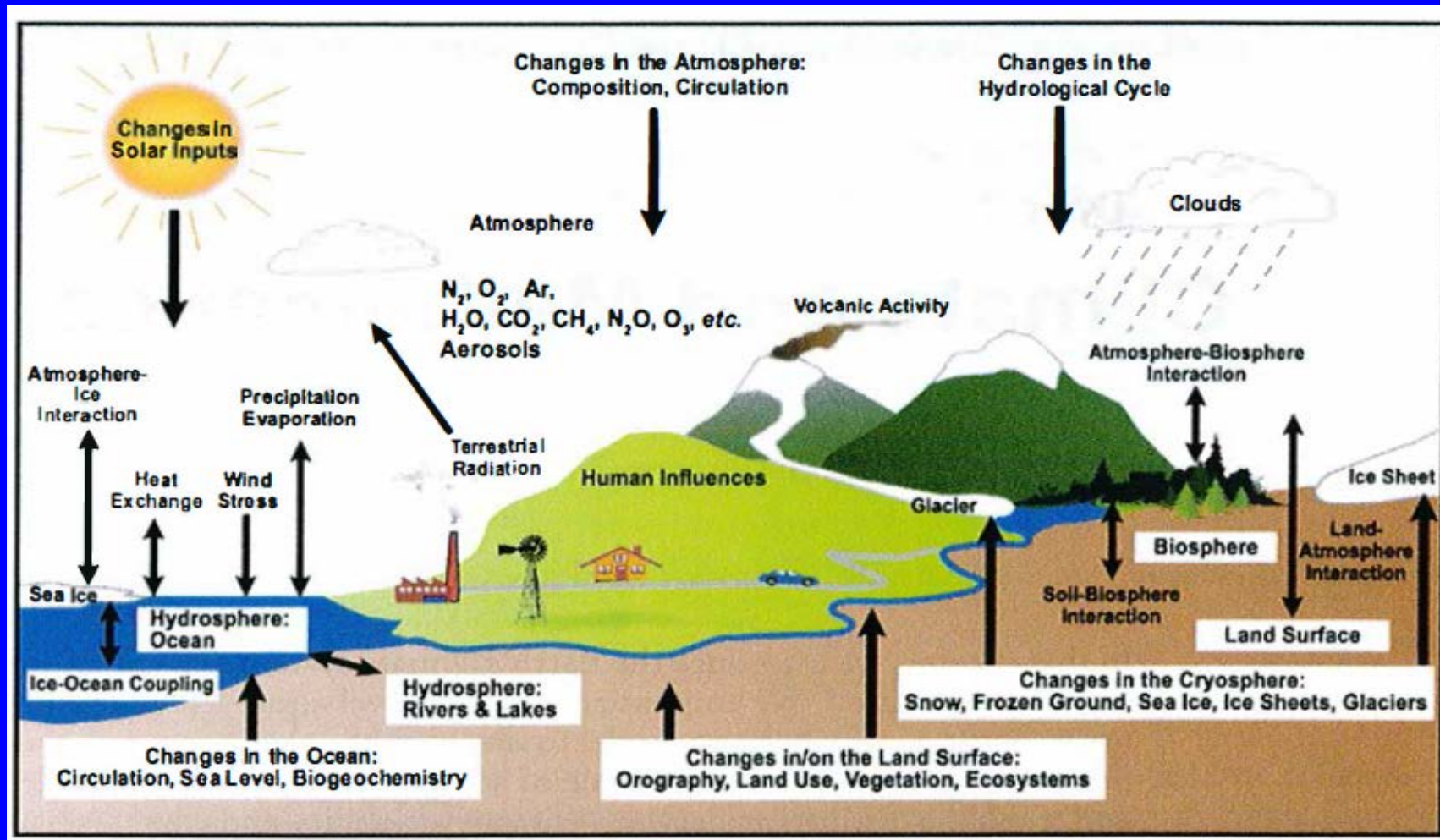
Plan:

2. Modelos climáticos de balance de energía: contraste con modelos de meteorología.
3. Ley de Stefan-Boltzman y Ley de Planck: unificación en las ciencias básicas.
4. Comentarios finales: multiplicidad de climas estacionarios en modelos de balance de energía.

2. Modelos de la climatología en contraste a modelos de la meteorología.

El problema real = sistema climático

Componentes externos e internos



Modelos globales / locales.

Modelos globales de Balance de Energía.

Clima: *Estado promediado de la atmósfera observado como tiempo meteorológico sobre un periodo finito de tiempo a lo largo de los años (S.H. Schneider, 1992)*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\tau |B(x)|} \int_{t-\tau}^{t+\tau} \int_{B(x)} T(y,s) dy ds$$

Predicción del *tiempo*
meteorológico

Pronóstico

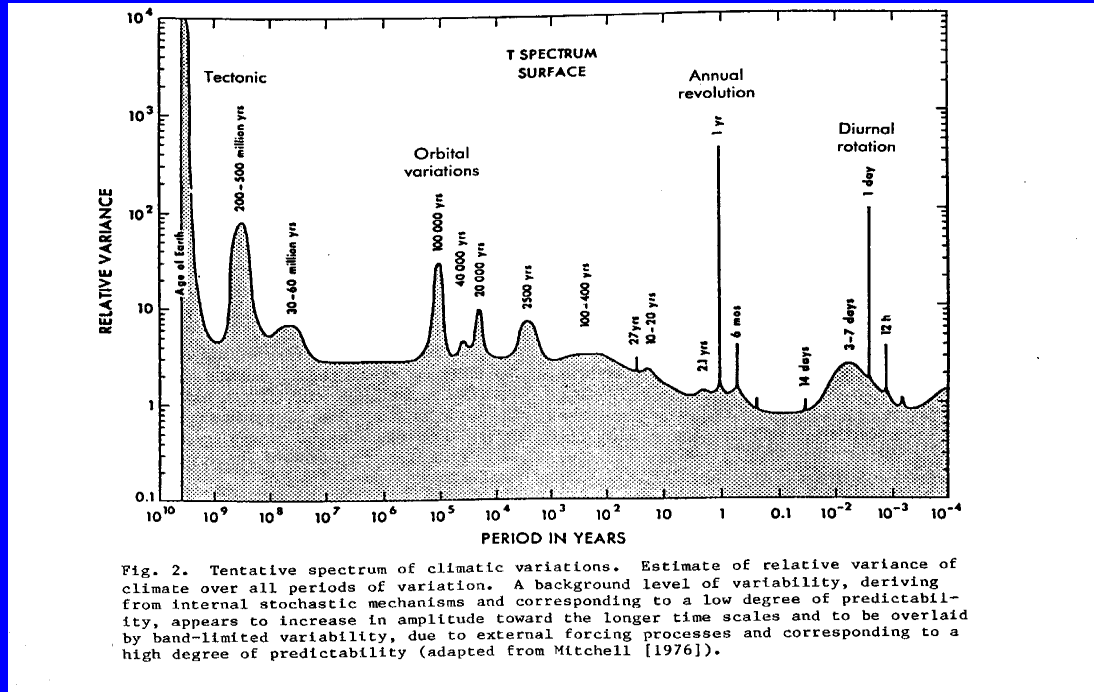
Modelos muy complejos
Métodos computacionales
Escala de tiempo cortas: horas,...

Modelos climáticos

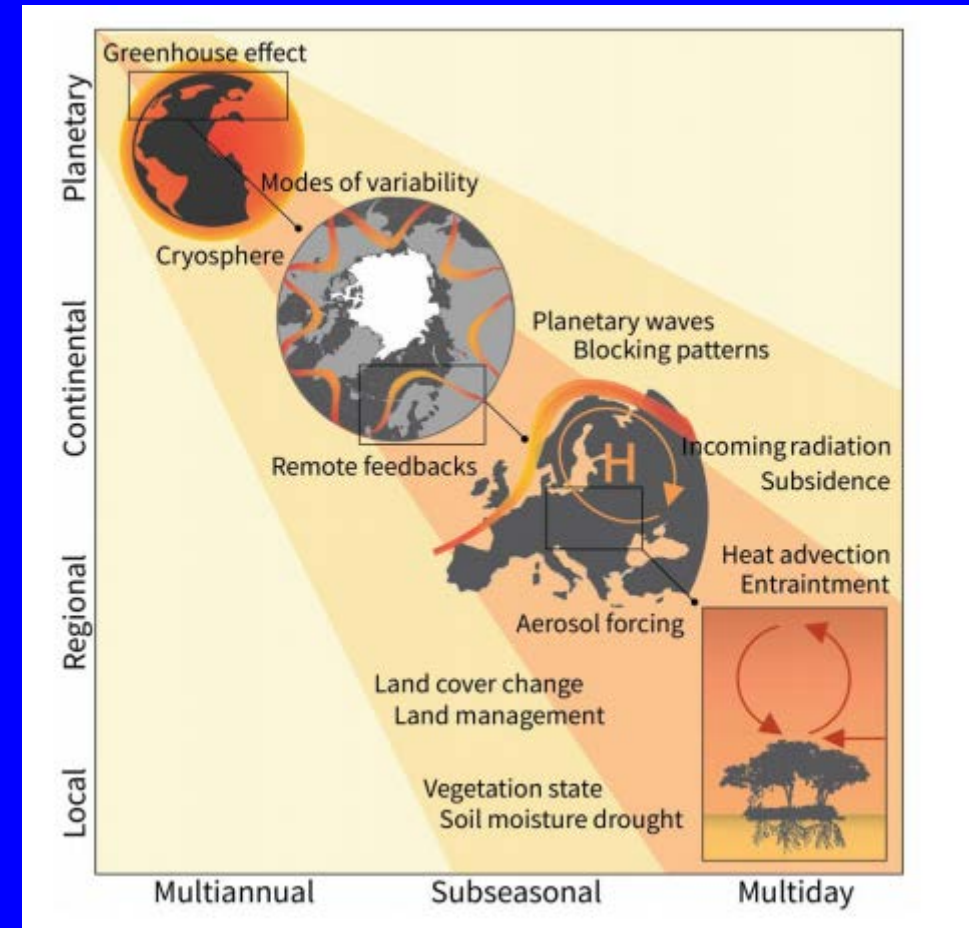
Diagnóstico

Modelos simplificados
Escala estacional o
anuales

Escalas temporales y espaciales: Jerarquía de Modelos Climatología / Meteorología

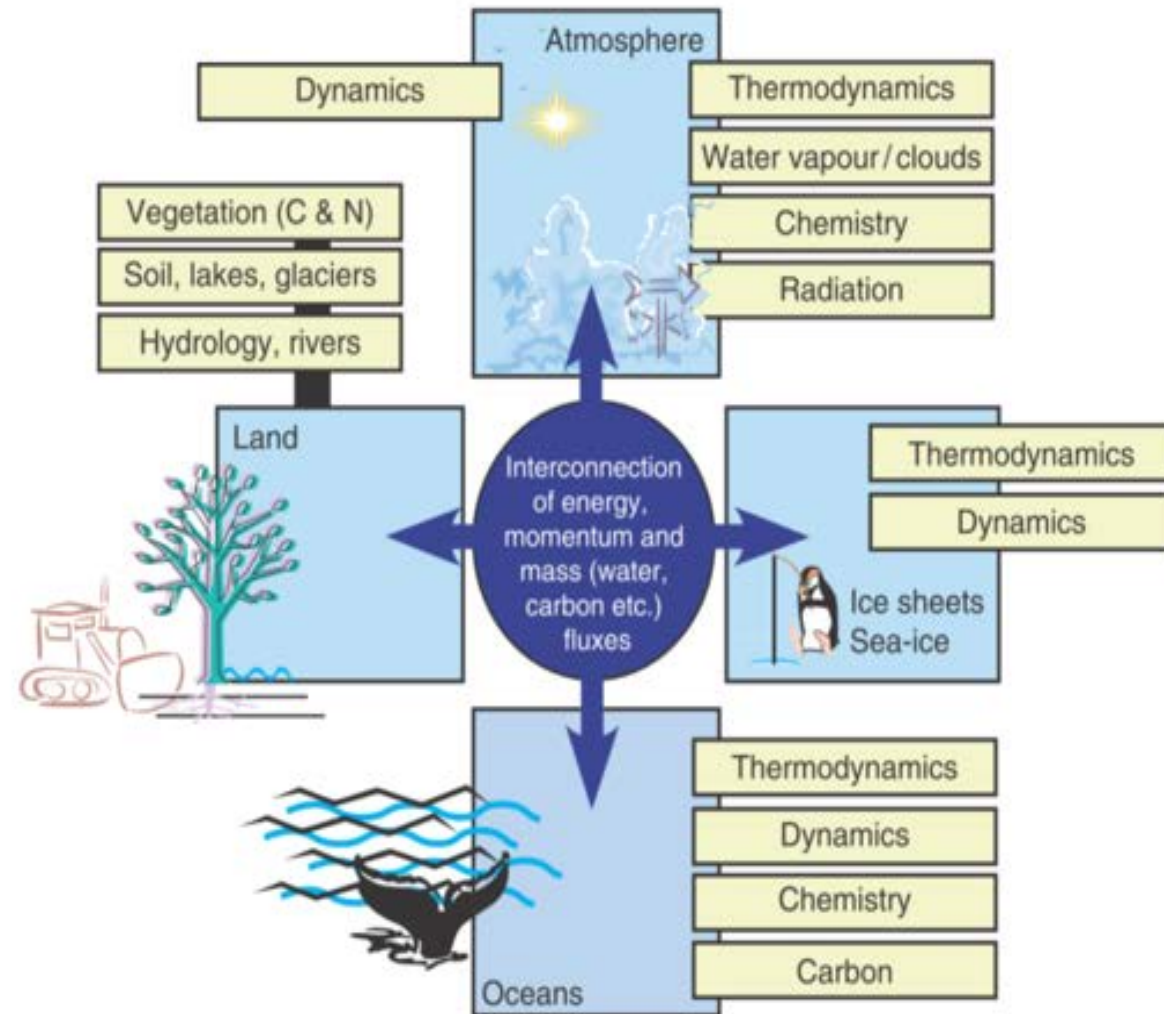


Espectro de variaciones climáticas



“Ecuaciones primitivas” de la atmósfera y del océano

Modelo de Circulación General (GCM)



Ecuaciones “primitivas” de la atmósfera (y del océano)

$$\frac{Du}{Dt} + 2f \times u + \frac{1}{\rho} \nabla p + g = \nu \nabla^2 u,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0,$$

$$C \frac{DT}{Dt} - \frac{RT}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \kappa_h \nabla^2 T + S_h + LP,$$

$$\frac{Dq}{Dt} = \kappa_q \nabla^2 q + S_q - P,$$

$$p = \rho RT.$$

Campo de velocidades

Distribución de masa

Balance de energía: temperatura

(Meyer, Joule, Rankine, Clausius,
Helmholtz, Lord Kelvin, Gibbs, ...)

Humedad y salinidad

Ley de estado: presión

Acoplamiento con otras ecuaciones, casquetes polares, interfaces atmósfera/océanos,

Primera demostración de que están bien planteadas matemáticamente (localmente en el tiempo)

J.L. Lions, R. Temam, S. Wang, Mathematical theory for the coupled atmosphere-ocean models.
J. Math. Pures Appl., (1995).

Corto tiempo de predicción del modelo GCM

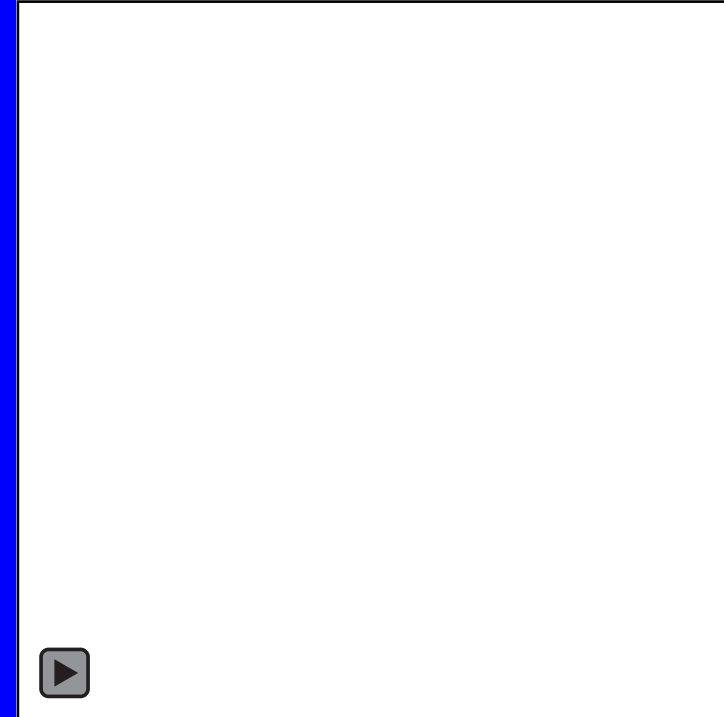
(menos de “diez días” para el GCM, casi 30 para modelos zonales)



Edward Lorenz
(1917-2008)

$$\begin{aligned}\frac{dX(t)}{dt} &= \sigma Y(t) - \sigma X(t) \\ \frac{dY(t)}{dt} &= \rho X(t) - Y(t) - X(t)Z(t) \\ \frac{dZ(t)}{dt} &= X(t)Y(t) - \beta Z(t)\end{aligned}$$

- En 1961 simplificó (tres términos frente a infinitos términos) las ecuaciones primitivas de la atmósfera.
- Falta de **dependencia continua** respecto de datos iniciales.
- **Teoría del Caos Matemático** (Poincaré; péndulo doble), **efecto mariposa, dimensión fractal del atractor, ...**



¿Término responsable de la gran dificultad: en Navier-Stokes?

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_h) \mathbf{u} + w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \mathbf{f} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla_h p + \mathbf{D}_u + \mathbf{F}_u$$

De las ecuaciones linealizadas de Stokes y Osen (que se explican en el grado de Matemáticas) a uno de los 8 *Problemas del milenio*: Fundación Clay (2000: un millón de dólares).

Contraste: modelos simplificados de clima

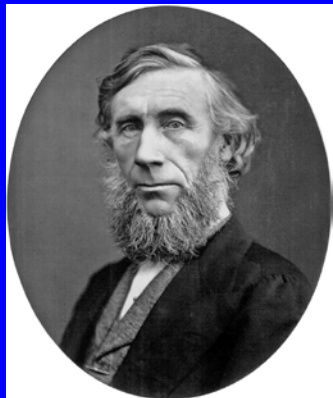


Joseph Fourier
(1768-1830)

Encontró que la atmósfera de la Tierra mantenía al planeta más caliente de lo que sería en el caso de estar rodeado del vacío, e hizo los primeros cálculos del efecto del calentamiento. Propuso, en 1824, una primera idea del “efecto invernadero” sin detallar su propuesta.

Cuestionó que las actividades humanas pudieran influenciar en el clima, aunque principalmente se centró en los cambios del uso del suelo

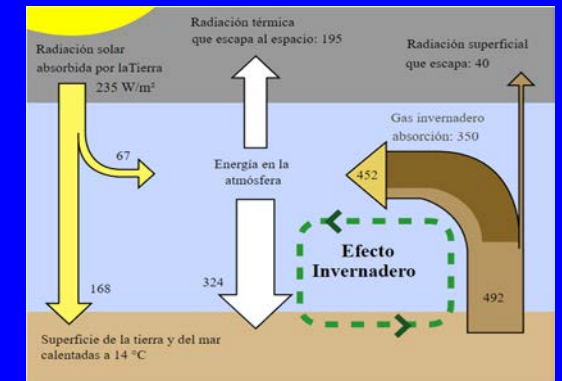
(1827) *El establecimiento y el progreso de las sociedades humanas, la acción de las fuerzas naturales, pueden cambiar notablemente y dentro de grandes regiones, el estado de la superficie del suelo, la distribución de las aguas y los grandes movimientos del aire. Dichos efectos son capaces de hacer variar el calor medio a lo largo de varios siglos ...*



John Tyndall
(1820 - 1893)

En 1859 John Tyndall descubrió que moléculas de gases como el dióxido de carbono, el metano y el vapor de agua bloquean la “radiación infrarroja”, lo que no sucede con el oxígeno y el nitrógeno.

Se considera habitualmente a Tyndall como el descubridor del “mecanismo de absorción” de los gases en la atmósfera que conocemos actualmente como **efecto invernadero**

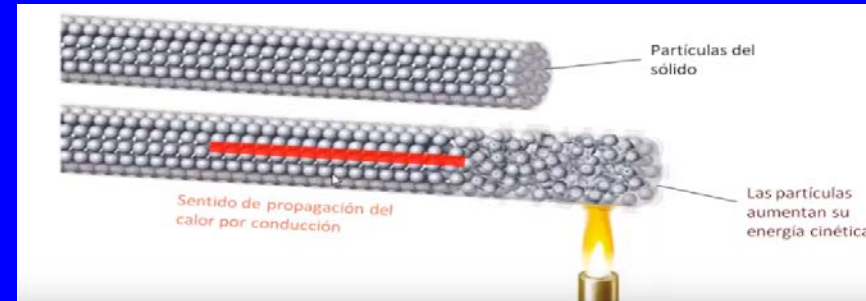


Antes de seguir, debemos recordar los elementos de la transmisión de calor por radiación, la noción de cuerpo negro y la ley de Stefan-Boltzman (a la que me referiré con detalle mas adelante).

Propagación del calor. Energía de Radiación: ondas electromagnéticas

Tres tipos diferentes de “conducción” del calor:

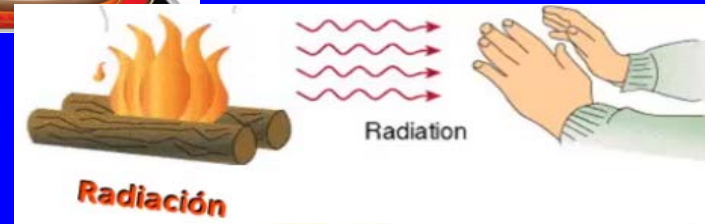
Propagación del calor en sólidos: **conducción**



Propagación del calor en medios continuos: **convección**



Propagación del calor por ondas electromagnéticas: **radiación**



Fundamental en Astrofísica, Física Atómica (difusión de neutrones), ...

Pese a la omnipresencia de este tipo de transferencia del calor, su representación matemática no suele ser abordada en los programas de grado no específicos (Matemáticas, Física de otras especialidades, etc), en contraste con la transferencia de calor por difusión en sólidos o por transporte en fluidos.

Radiación solar



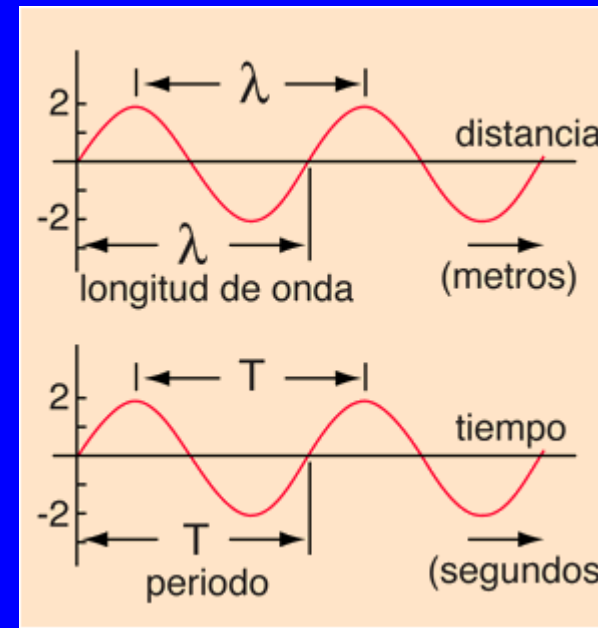
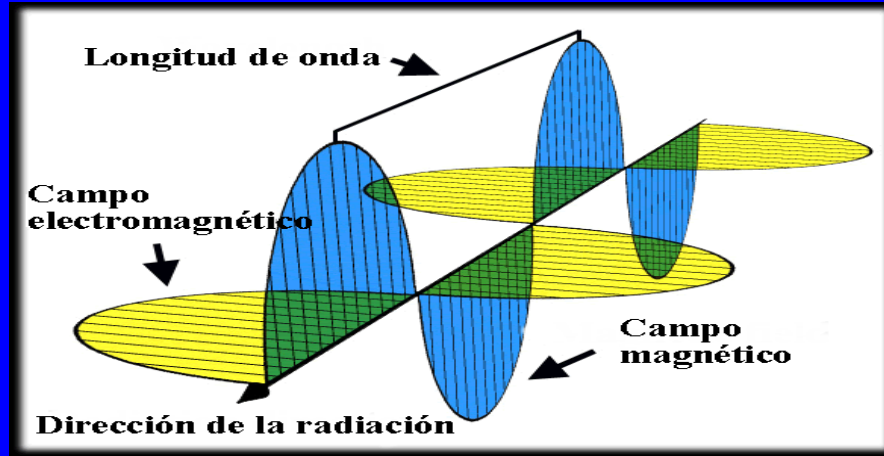
Permite que el calor se transmita a través del vacío

Todos los cuerpos emiten y absorben radiación

En general a mayor temperatura se emite más energía radiante y mayor es la sensación de calor

Transferencia radiativa de calor

Ondas electromagnéticas (1862, J. C. Maxwell (1831-1879)): longitud de onda.



$$f=1/T$$

$$v = f \lambda$$

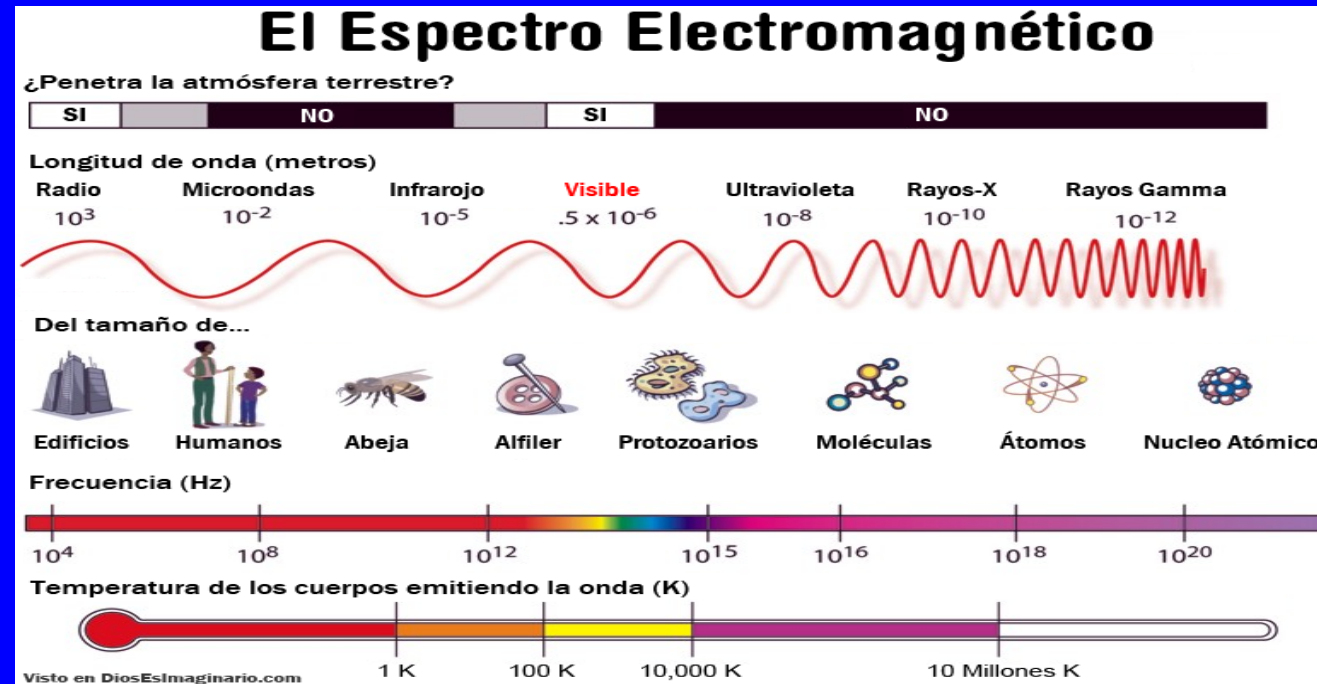
velocidad de propagación de la luz en el vacío $v=c$.

En otros medios $v < c$ (refracción)

Las ondas transportan energía.

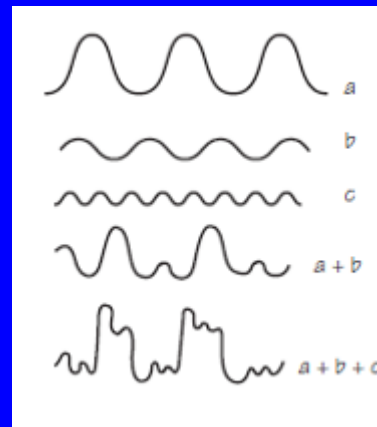
La radiación es la transferencia de calor por emisión de ondas electromagnéticas, que transportan energía hacia fuera del objeto emisor.

Para temperaturas moderadas, la radiación está en la región del infrarrojo del espectro electromagnético.



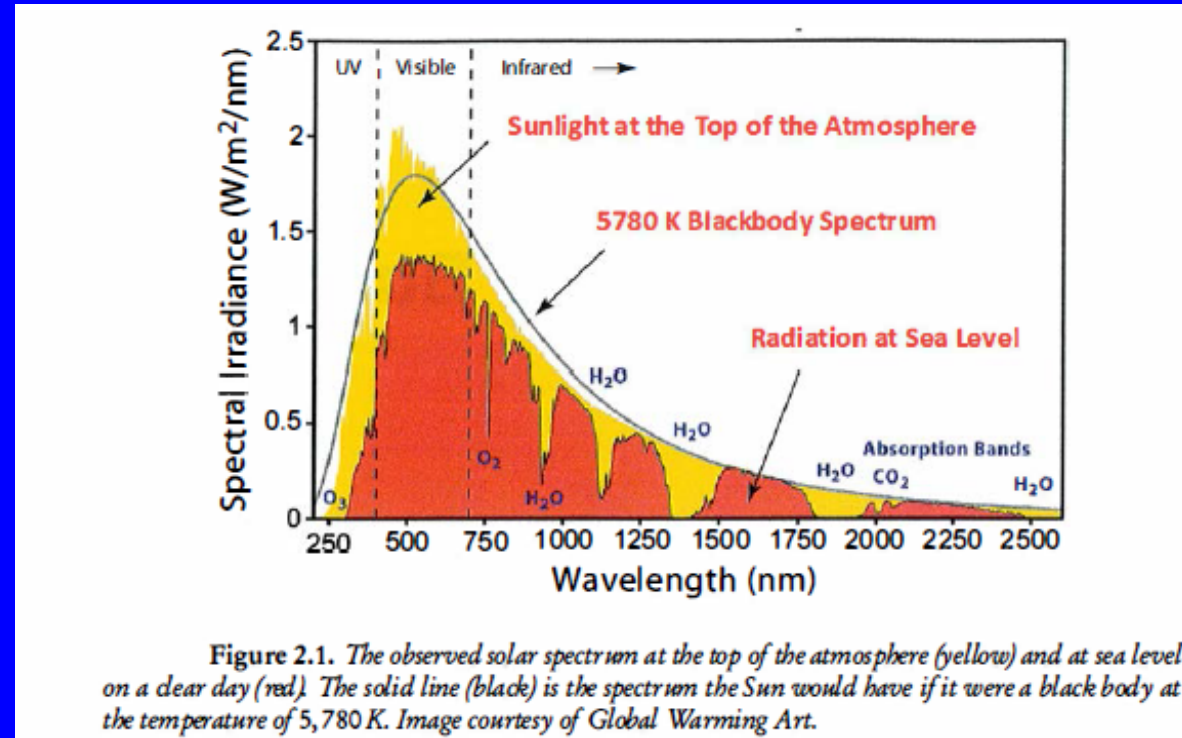
$$t(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - 273,15$$

Suma (superposición) de ondas
Análisis de Fourier,...



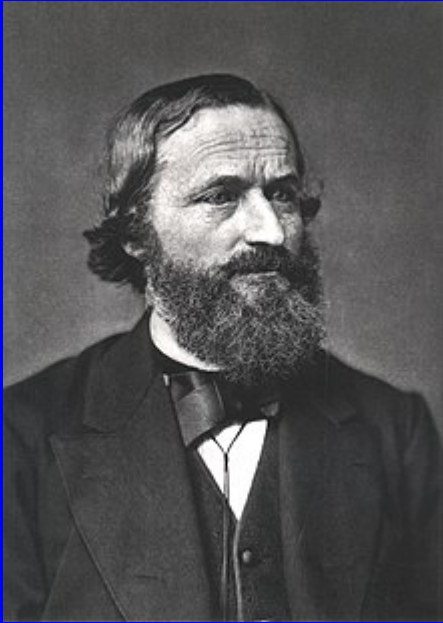
Parte de la energía se elimina por absorción en la fotosfera solar, pero una buena parte del espectro de energía solar llega a la atmósfera de la Tierra (similar a la de un “cuerpo negro ideal”) a una temperatura de 5.780 K.

La diferente absorción por los gases de la atmósfera da al espectro solar (sobre la superficie de la Tierra) unos perfiles irregulares.



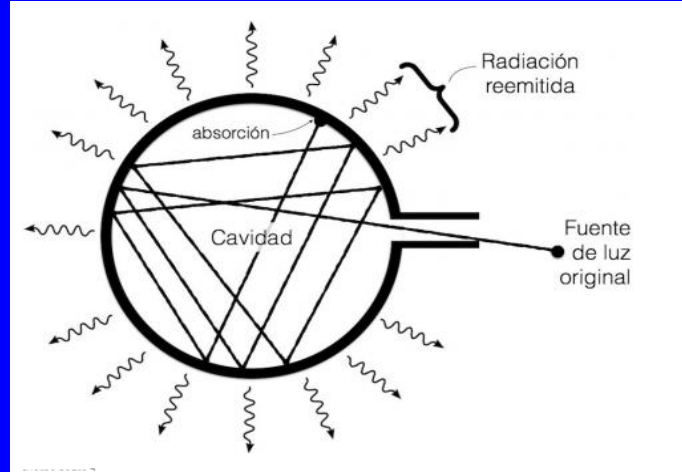
Representación *tras* la “Ley de Planck”, ¡¡ desde 1900 !!.

Antes de Maxwell (1862)



G. R. Kirchhoff (1824-1887)

Cuerpo negro ideal



Cavidad que admite la entrada de luz por un único orificio de entrada, pero no deja salir nada de esta luz original. Emite radiación a través de su superficie.

La "Radiación de cuerpo negro" o "radiación de cavidad" se refiere a un objeto o sistema que **absorbe toda la radiación incidente sobre él, y re-irradia energía que es característica solamente de este sistema radiante**, no dependiendo del tipo de radiación que incide sobre ella. La energía radiada puede considerarse que está producido por ondas estacionarias, o modos resonantes de la cavidad que está irradiando.

1859: Tres leyes empíricas (emisión de luz por objetos incandescentes):

1. Un objeto sólido caliente produce luz en un espectro continuo.
2. Un gas tenue produce luz con líneas espectrales en longitudes de onda discretas que dependen de la composición química del gas.
3. Un objeto sólido a alta temperatura rodeado de un gas tenue a temperaturas inferiores produce luz en un espectro continuo con huecos en longitudes de onda discretas cuyas posiciones dependen de la composición química del gas.

En 1861, Kirchhoff estudió el espectro del Sol, identificando los elementos químicos de la atmósfera solar

Kirchhoff: uno de los padres de la Espectroscopía



1879, **Ley de Stefan** (1835-1893) basándose en las mediciones experimentales realizadas por el físico irlandés John Tyndall (1820 - 1893)

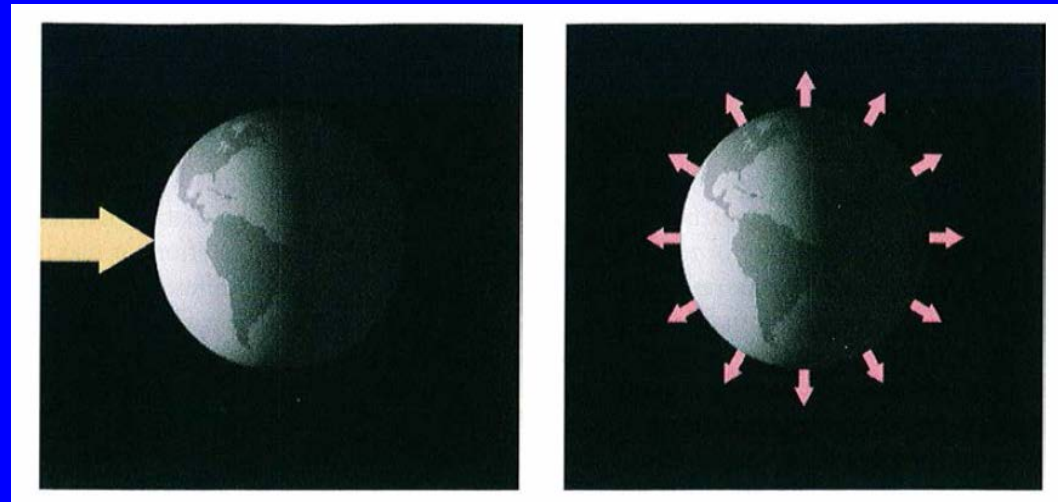


Joseph Stefan (1835-1893)

$$E = \sigma \cdot T_e^4$$

Más tarde (en 1884) obtenida por técnicas de **Mecánica Estadística** por su alumno L. E. Boltzmann y después por Max Planck (en 1900), como veremos más adelante.

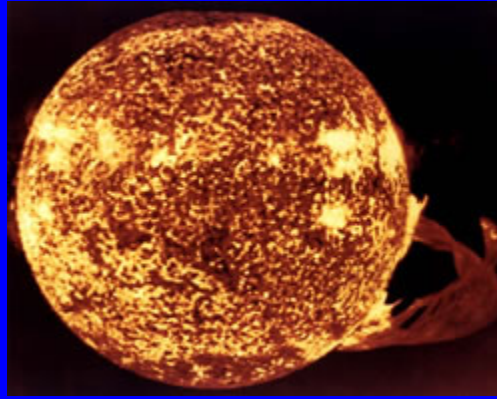
Balance energético radiativo.



Energía radiante solar *entrante*
(radiación de onda corta)

Energía radiante saliente
(radiación de onda larga).

La energía solar que incide anualmente sobre toda la superficie terrestre supone unas **diez mil veces la demanda de energía de la población mundial (7.700 millones de personas)**.



En el interior del Sol, los núcleos atómicos de Hidrógeno se fusionan bajo una presión enorme, dando lugar a núcleos atómicos de Helio. Parte de la masa atómica se transforma en **energía térmica** que provoca temperaturas de **millones de grados en el interior**. **La temperatura de la superficie del Sol es de aproximadamente 6.000 °C.**

El Sol funciona como un **reactor de fusión**. Cada segundo se convierten 700 millones de toneladas de Hidrógeno en cenizas de Helio. En el proceso se liberan 5 millones de toneladas de energía pura; por lo cual el Sol cada vez se vuelve más ligero. Desde hace **5.000 millones de años**.

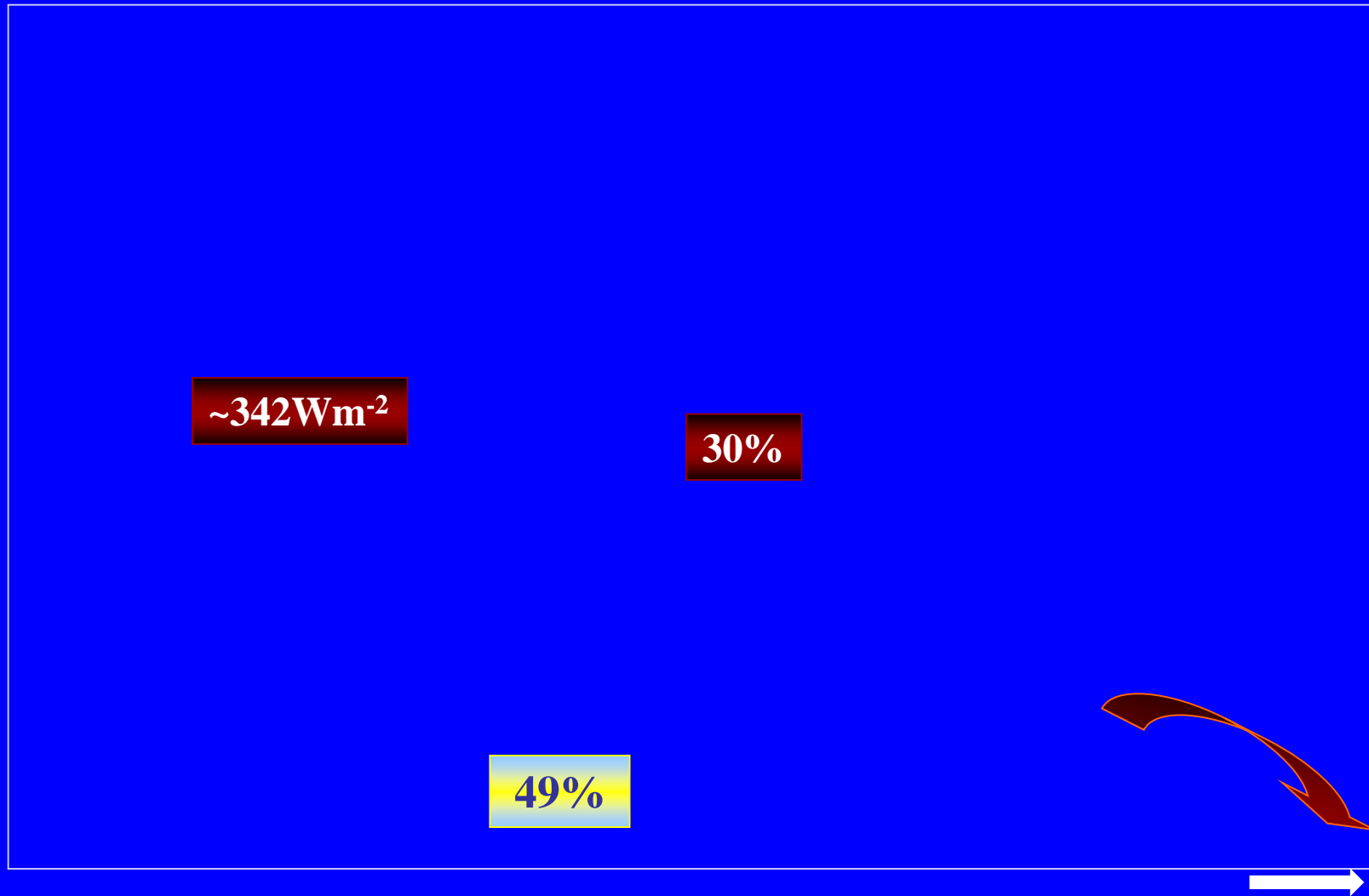
El Sol, a 150 millones de Km, emite con una potencia (*Constante Solar*) de 1360 w/m².



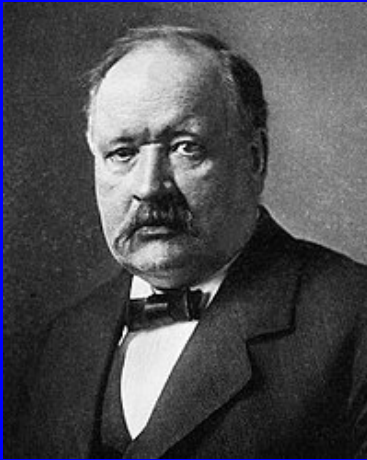
Earth
Radiation
Budget
Satellite

Radiación solar

El sistema climático de la Tierra recibe su energía del Sol en forma de *radiación electromagnética, que se origina en el Sol.*

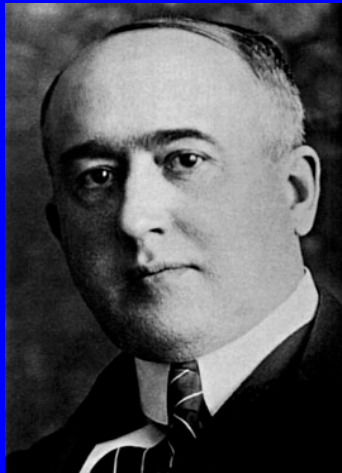


Primeros modelos climáticos



Svante Arrhenius
(1859 - 1927)

1896 cálculo del efecto de la duplicación del dióxido de carbono atmosférico: incremento de la temperatura 5-6 grados Celsius.



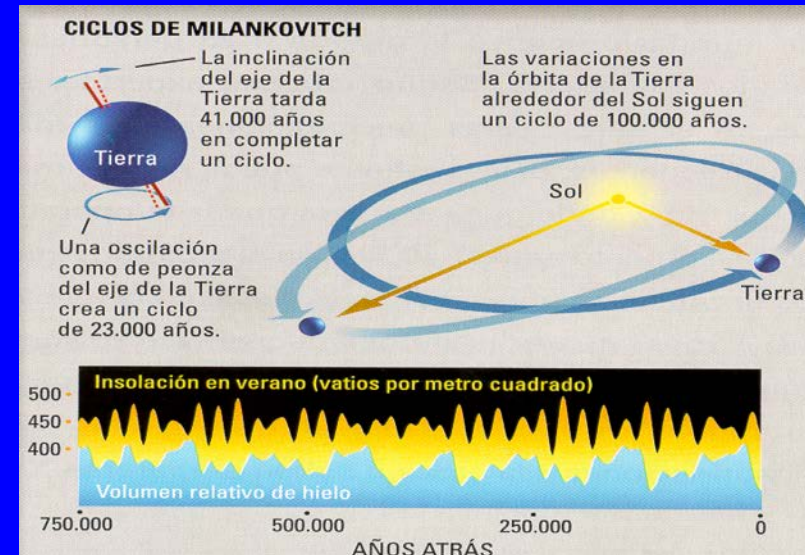
Milutin Milankovitch
(1879-1958)

Teoría matemática de los fenómenos térmicos producidos por la radiación solar (1920)

Teoría de las Glaciaciones

En 1837 Agassiz fue el primero en proponer científicamente que la Tierra había sido objeto de una glaciación pasada

- *irradiación solar en distintas latitudes a lo largo de las estaciones,
- *cálculo de tablas de gran precisión.
- *evolución del *clima matemático*



Modelos climáticos de Balance de Energía Radiativo (con difusión espacial)

Propuestos, independientemente, **en 1969**, por:

W. D. Sellers



(1928-2014)

M. I. Budyko



(1920–2001)

Validación tras más de 50 años:

Z. Hausfather, H.F. Drake, T. Abbott and G. A. Schmidt

Evaluating the Performance of Past Climate Model Projections, Geophysical Research Letters · December 2019.

De los progresos **individuales** en la investigación del clima a **informes corales** de infinidad de investigadores:



Organización intergubernamental de las Naciones Unidas, 1988.
Sede en Ginebra (Suiza).

- Working Group I – The Physical Science Basis
- Working Group II– Impacts, Adaptation, and Vulnerability
- Working Group III– Mitigation of Climate Change

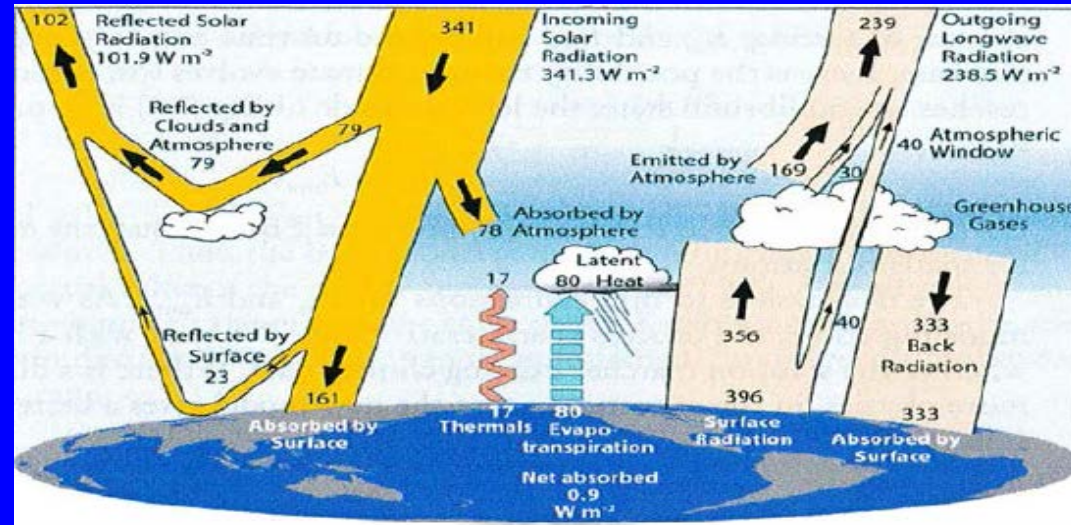
Representa el consenso de la comunidad científica internacional sobre el Cambio Climático.

6 Informes
(el último en Marzo de 2023)

https://www.ipcc.ch/report/ar6/syr/downloads/press/IPCC_AR6_SYR_PressRelease_es.pdf

El Premio Nobel de la Paz de 2007 fue otorgado, a partes iguales, entre el IPCC y Al Gore. "Miles de científicos y funcionarios de más de cien países han colaborado para conocer con mayor certeza la escala del calentamiento", declaró el Comité Nobel.

Balance de energía radiativa



R_a

Albedo

R_e

Efecto invernadero

D

Difusión superficial

Una primera obtención: promedios en la ecuación de la energía de las ecuaciones primitivas: **Jerarquía de modelos**

$$\xi = \xi(t, z, \lambda, \phi)$$

$$\bar{\xi} = \frac{1}{2\tau} \int_{t-\tau}^{t+\tau} \xi(s, z, \lambda, \phi) ds$$

$$[\xi] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(t, z, \lambda, \phi) d\lambda$$

$$\hat{\xi} = \frac{1}{z_0} \int_0^{z_0} \xi(t, z, \lambda, \phi) dz$$

$$\langle \xi \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \xi(t, z, \lambda, \phi) \cos \phi d\lambda d\phi$$

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = R_a - R_e + D$$

En el proceso de promedios, a las “ecuaciones primitivas” hay que añadir el acoplamiento temperatura / radiación / convección

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}} T \right) - k \Delta_{\vec{x}} T + \int_0^\infty \int_{S^2} a(i_b - i) d\vec{\omega} d\nu = F(\vec{x}, t) \quad (\vec{x}, t) \in Q$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial i}{\partial t} + \vec{\omega} \cdot \nabla_{\vec{x}} i + a \cdot (i - i_b) = L(i) \quad (\nu, \vec{x}, \omega, t) \in \Sigma$$

$$i_b(\nu, T) = \frac{2hn^2\nu^3}{c^2 \left(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 \right)}$$

Ley de Planck
(en frecuencias)

$$L(i) = \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{S^2} [\phi(\vec{\omega}^*, \vec{\omega}) i(\vec{\omega}^*) - \phi(\vec{\omega}, \vec{\omega}^*) i(\vec{\omega})] d\vec{\omega}^*$$

Función de fase de dispersión

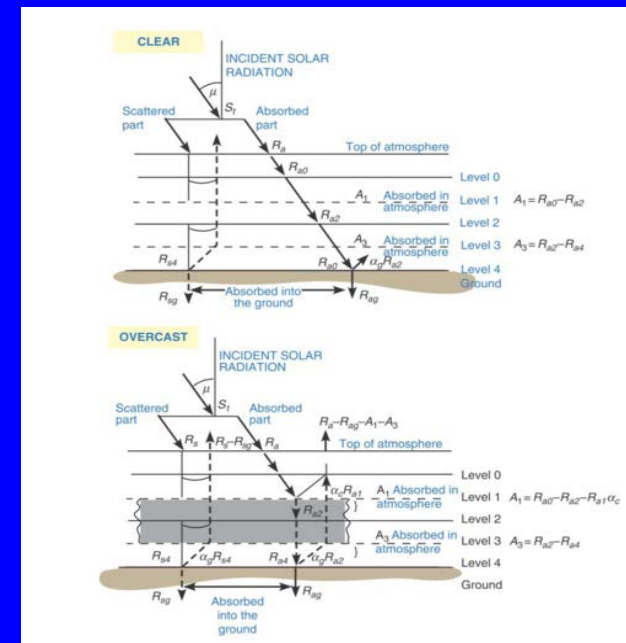
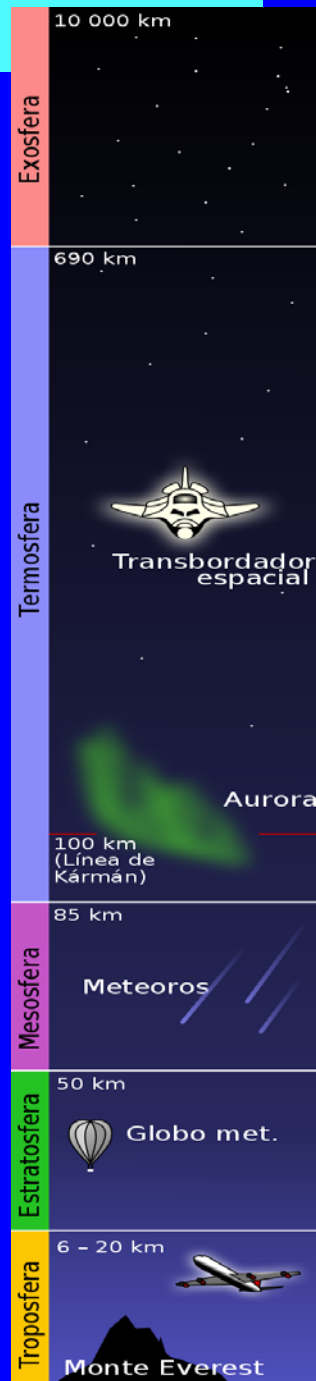
B. Mercier, Application of Accretive Operators Theory to the Radiative Transfer Equations, *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 1987.

$$\int_{S^2} \phi(\omega^*, \omega) d\omega = 4\pi \quad \forall \omega^* \in S^2$$

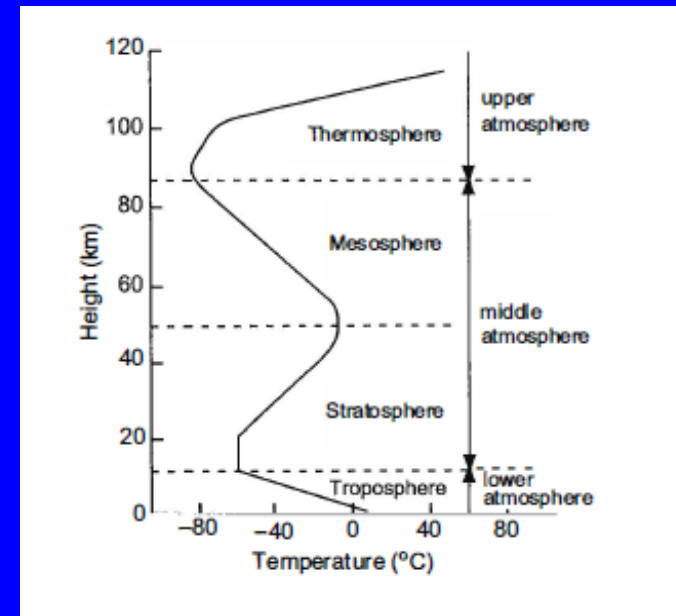
Radiación intermedia muy compleja



Capas de la atmósfera

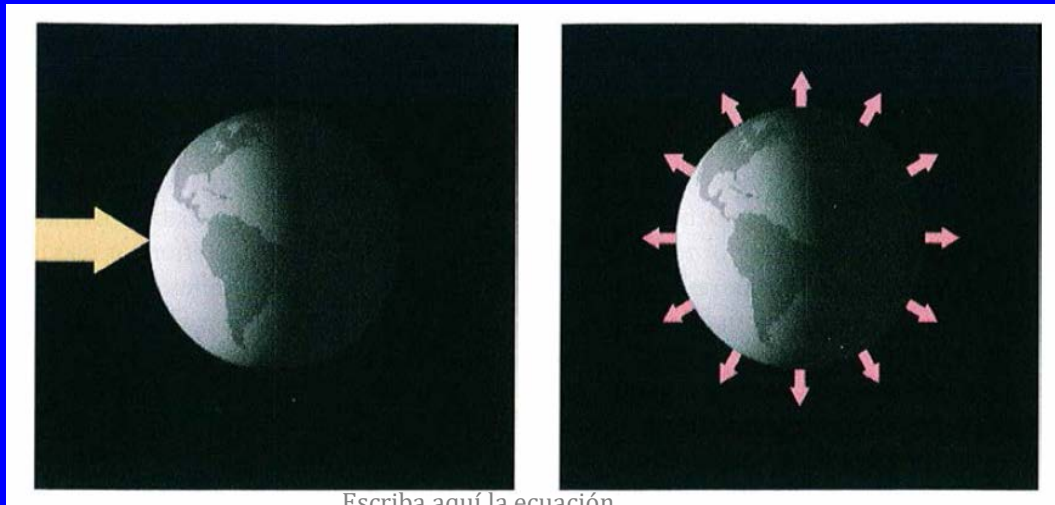
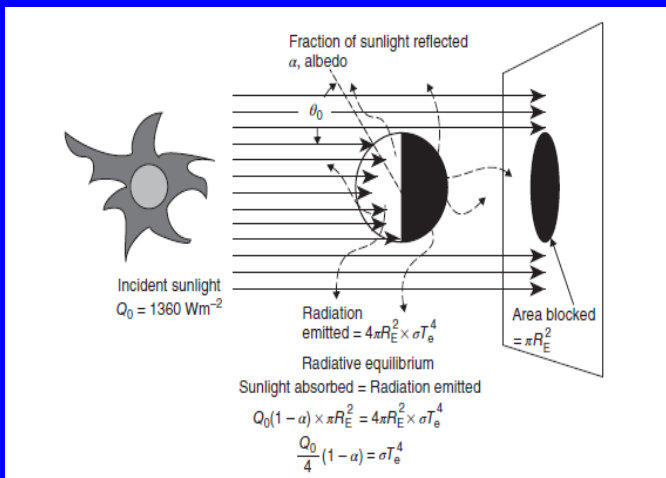


!! Promedios simplificadores !!



Modelos de balance radiativo en altura (otro enfoque diferente)

Modelo cero-dimensional. Constante solar y co-albedo. Gases de efecto invernadero.



Escriba aquí la ecuación.

energía radiante solar *entrante*
(radiación de onda corta)

radiación saliente
(radiación de onda larga).

$$C \frac{dT}{dt} = R_a - R_e$$

Joseph Stefan (1835-1893)

Leyes constitutivas (o de estado)

$$C \frac{dT}{dt} = Q\beta - \sigma T^4$$



C capacidad calorífica promediada
Q Constante Solar, $\beta = (1 - \alpha)$ co-albedo

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$$

L. E. Boltzmann (1844-1906)

Un sencillo cálculo sin el efecto invernadero

En el equilibrio, cuando $t \rightarrow +\infty$

$$0 = Q\beta - \sigma T^4$$

Que da como solución estacionaria, al suponer $\beta = 0.70$ y $S_0 = 1.368 \text{ Wm}^{-2}$ (e. d. $Q = 342 \text{ Wm}^{-2}$)

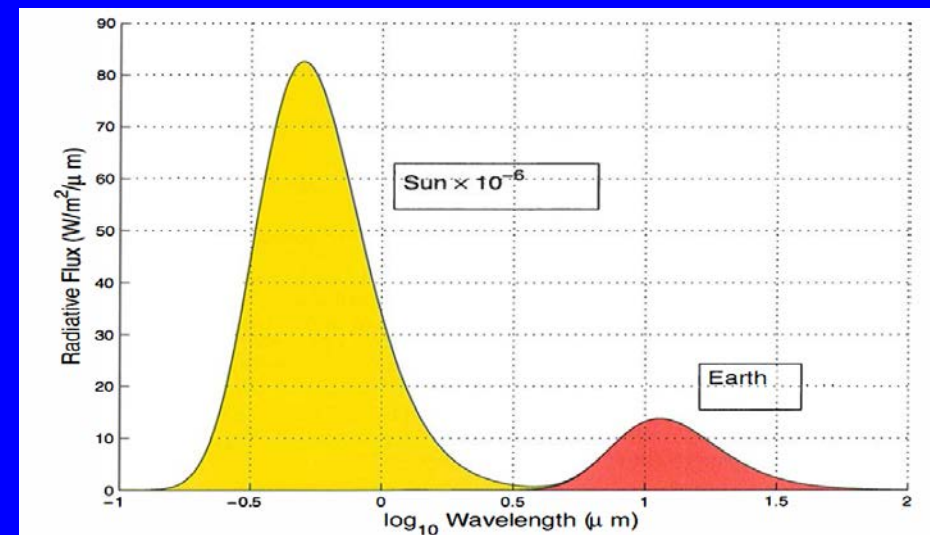
$$T = 254,8 \text{ °K} = -18,35 \text{ °C} \quad \text{????}$$

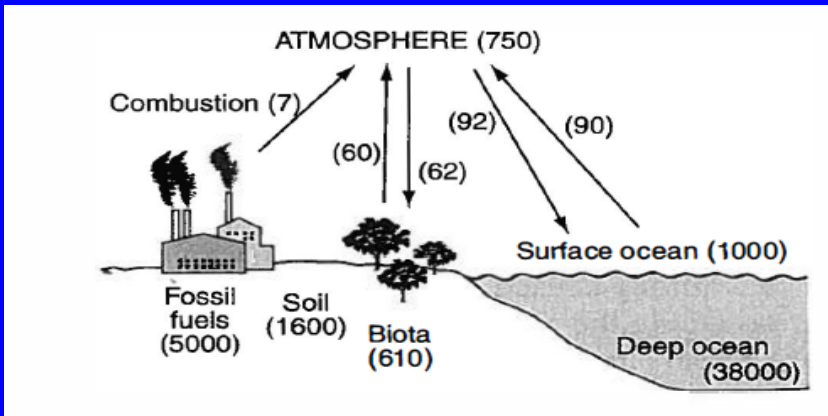
El valor real de la temperatura de la superficie es $287,7 \text{ °K}$ ($=14,55 \text{ °C}$).

Una buena parte de la diferencia puede atribuirse al **efecto invernadero** de la atmósfera de la Tierra: el efecto de gases como dióxido de carbono (CO_2), vapor de agua y metano, y aerosoles (gotas de agua, polvo partículas, etc.).

Modificación del cálculo con efecto invernadero

Dado que el Sol y la Tierra tienen temperaturas de emisión que difieren en un orden de magnitud, sus espectros electromagnéticos apenas se superponen





Debido a sus propiedades químicas, los gases de efecto invernadero aumentan la **opacidad de la atmósfera** en el infrarrojo (longitud de onda larga),

$$0 = Q\beta - \epsilon\sigma T^4$$

despejando se obtiene la **temperatura de equilibrio**

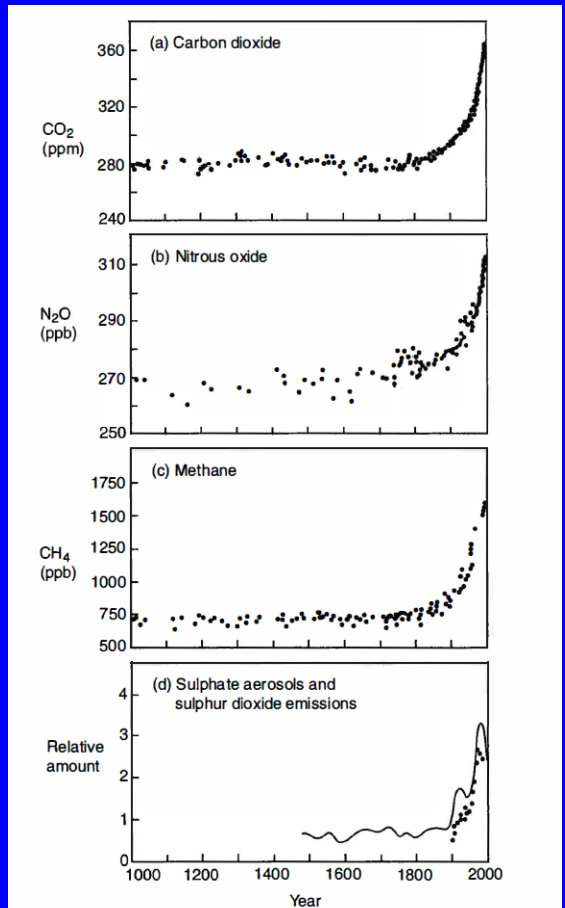
Los principales elementos del **Ciclo del carbono**, en unidades de gigatoneladas de carbono por año GtC/año y flujos. El océano y los seres vivos (biota) eliminan el carbono de la atmósfera, pero no lo suficientemente rápido como para superar la producción por procesos de combustión naturales y antropogénicos.

$$T^* = \left(\frac{\beta Q}{\epsilon\sigma} \right)^{1/4}$$

Dando los valores de antes y haciendo $\epsilon=0,62$ se obtiene el valor promediado actual **14,55 °C**.

El efecto invernadero corresponde a una reducción de la radiación terrestre del **38%**

Ppb=partes por mil millones(=10⁹)

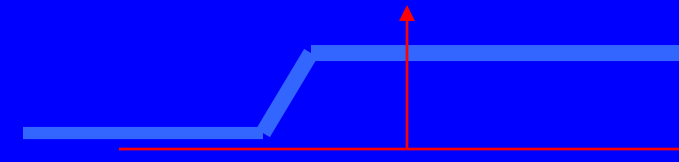
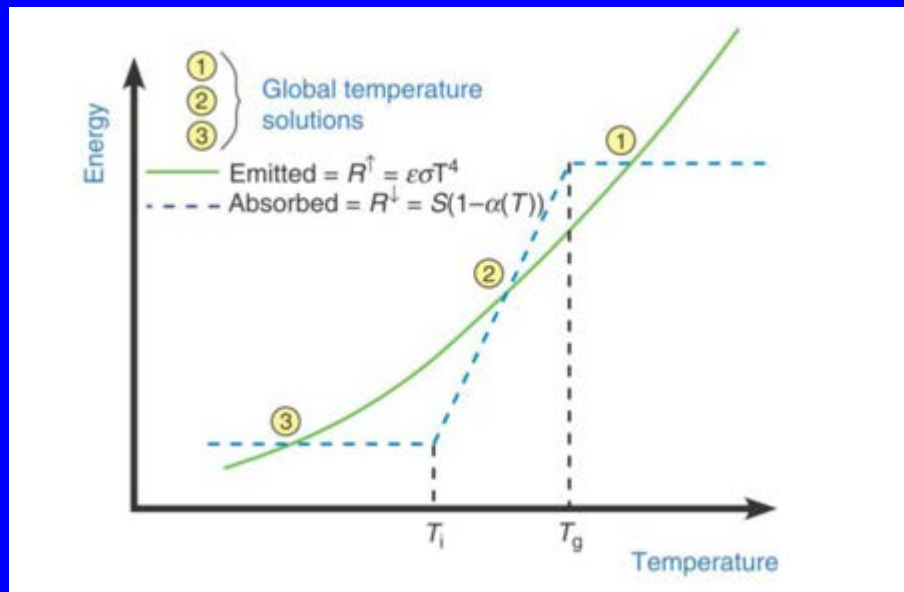


Caso más realista: albedo no constante. Múltiples equilibrios.

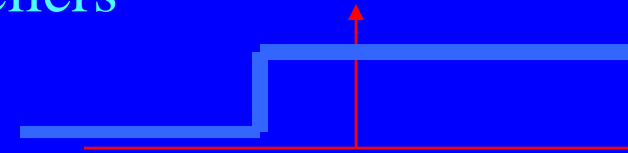
$$\beta(u) = (1 - a(u)) \text{ coalbedo}$$

$$\beta(u) = \begin{cases} 0.38 & \text{si } u \ll -10 \\ 0.71 & \text{si } u \gg -10 \end{cases}$$

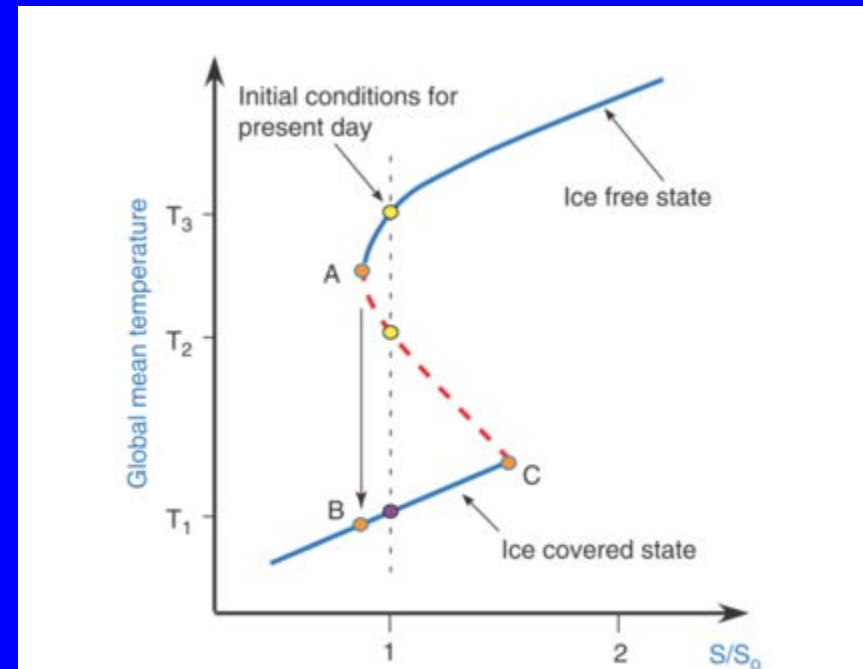
Casos de tres soluciones de equilibrio en función de la constante solar



Sellers

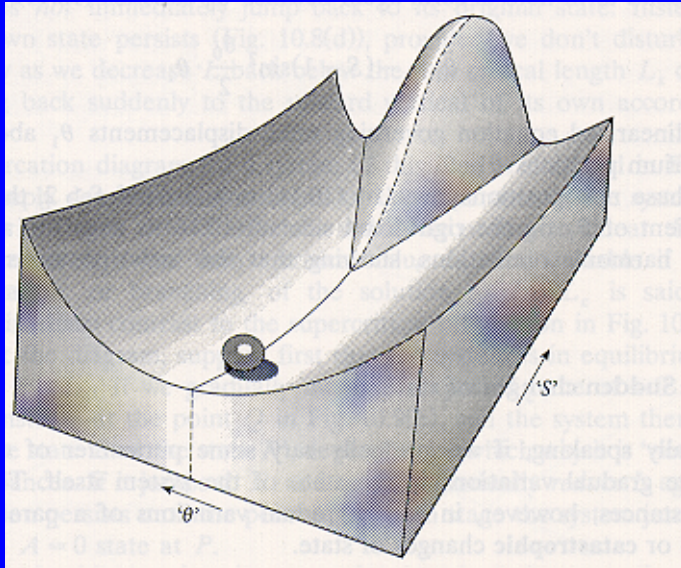


Budyko $u = -10^\circ$

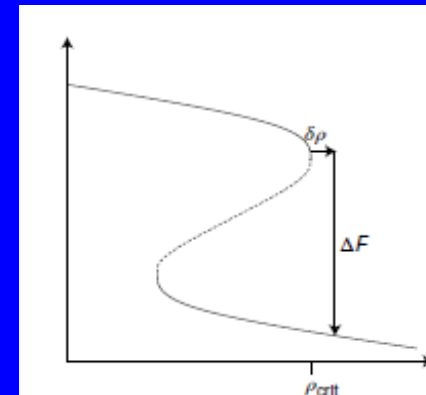
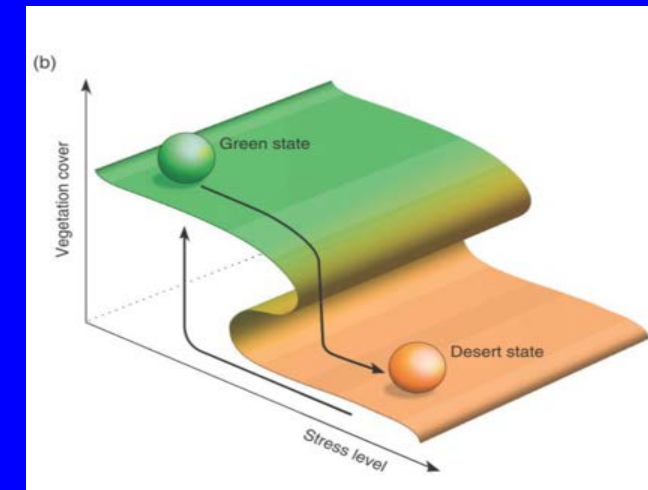
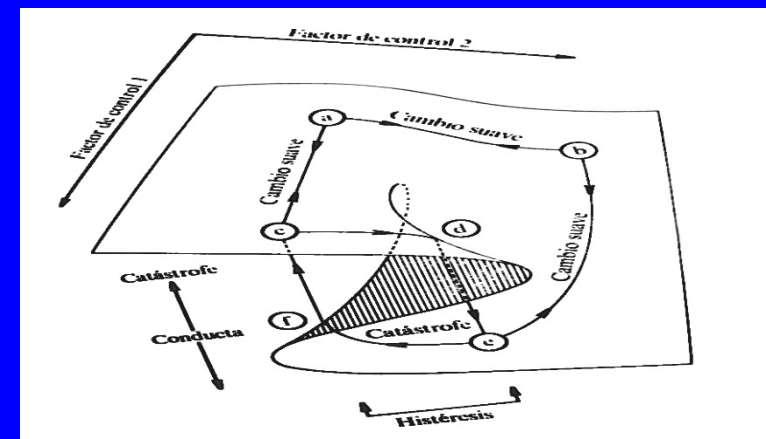
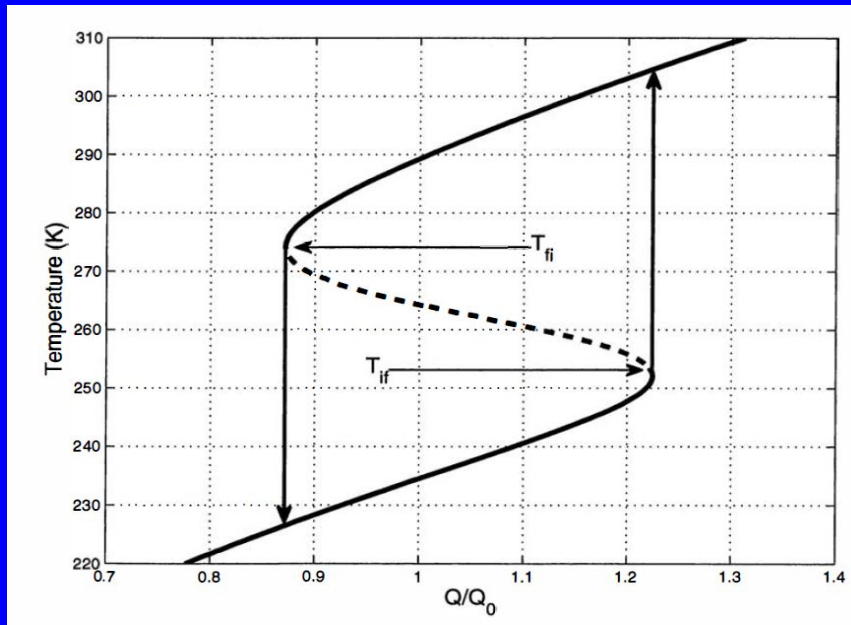


Tipping points T. Lenton (2016)

Teoría de catástrofes: René Thom (1923-2002)



Histéresis



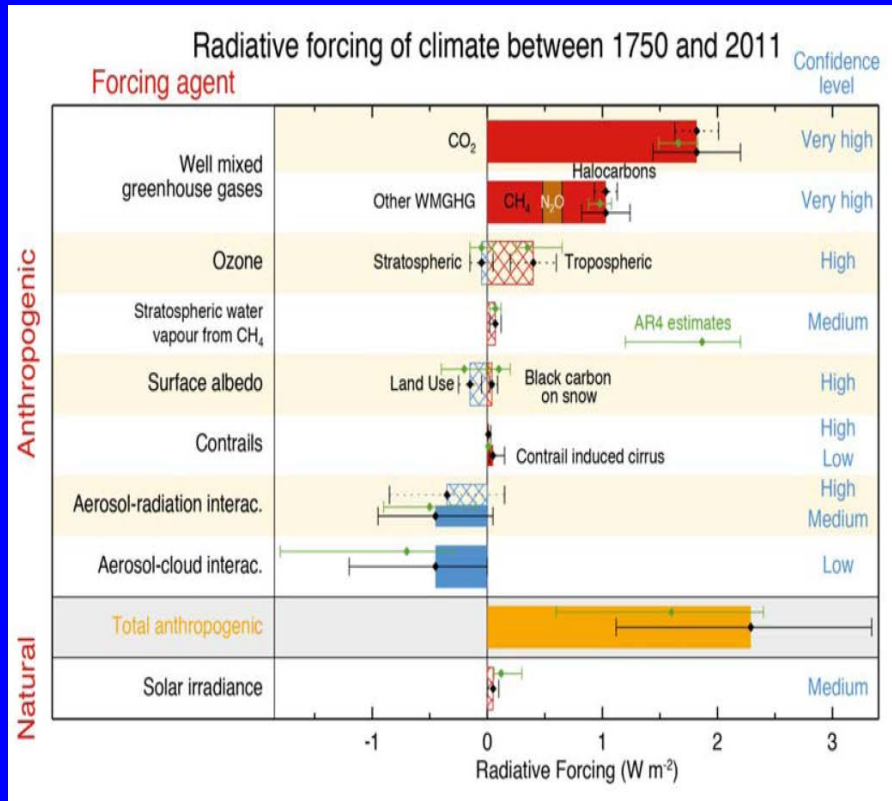
Bifurcación respecto la emisividad en el efecto invernadero

Cambio climático:

Los cambios en el sistema climático se deben alteraciones del equilibrio radiativo.

Causas potenciales:

1. Variaciones en la radiación solar entrante
2. Variaciones en la radiación solar reflejada
3. Cambios en la radiación terrestre fuera de la atmósfera (por ejemplo, CO₂, CH₄, N₂O, H₂O_v)



El balance radiativo total es **positivo** y ha llevado a una absorción de energía por parte del sistema climático.

La mayor contribución: **el incremento de [CO₂] desde 1750**

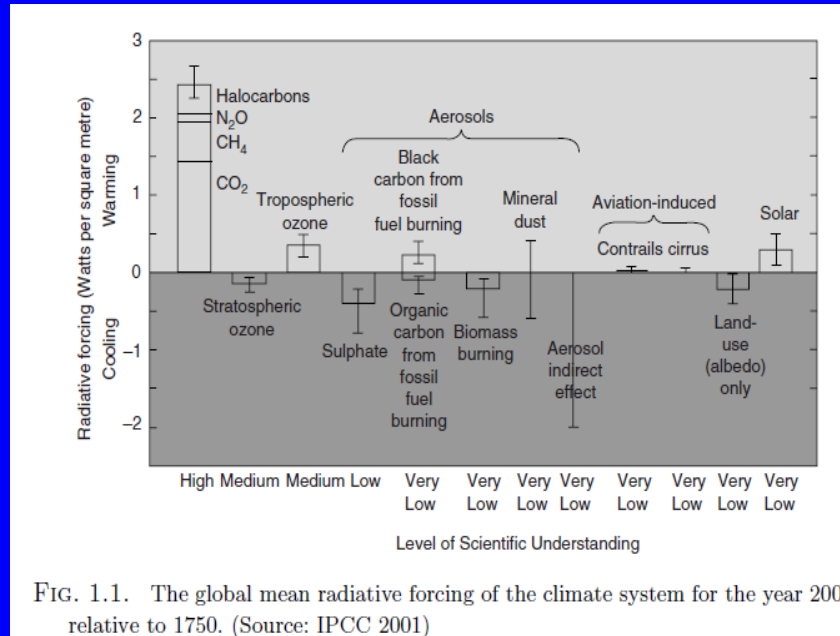


FIG. 1.1. The global mean radiative forcing of the climate system for the year 2000, relative to 1750. (Source: IPCC 2001)



3. Ley de Stefan-Boltzman: unificación en las ciencias básicas.



Joseph Stefan
(1835-1893)

La ley fue deducida empíricamente, **en 1879**, por el físico esloveno-austriaco Joseph Stefan (1835-1893), basándose en las mediciones experimentales realizadas por John Tyndall (1820 - 1893).

En 1884 se descubre la derivación teórica de la ley de Stefan a partir del trabajo desarrollado en Mecánica Estadística y Termodinámica por su estudiante Ludwig Boltzmann. Desde entonces Ley de Stefan-Boltzmann.

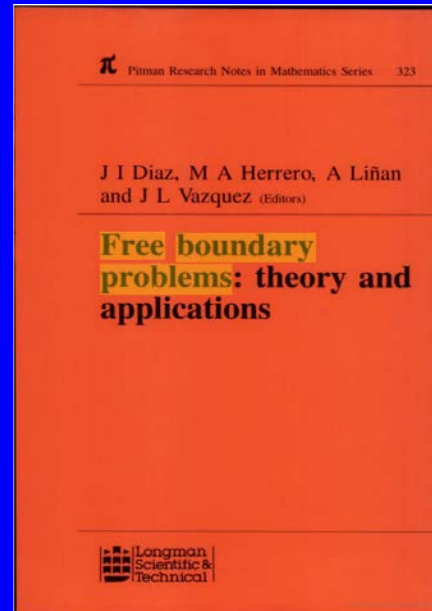


L. E. Boltzmann
(1844-1906)

Con su ley, Stefan determinó la temperatura de la superficie del Sol y calculó un valor de 5430 K. Este fue el primer valor razonable para la temperatura del Sol.

Como veremos, la Ley de Stefan-Boltzman se puede concluir a partir de la **Ley de Planck (de 1900)** para la radiación de un cuerpo negro (**Unificación de leyes básicas**).

En matemáticas, el llamado **Problema de Stefan** (nada que ver con su Ley) corresponde a una familia de problemas de *frontera libre* (ante cambios de fase) . El problema fue analizado por primera vez por Lamé y Clapeyron en 1831. Stefan abordó el problema, en 1890, analizando la velocidad con la que crece el espesor de una capa de hielo sobre el agua.



Universitat de Barcelona
Xavier Ros-Oton

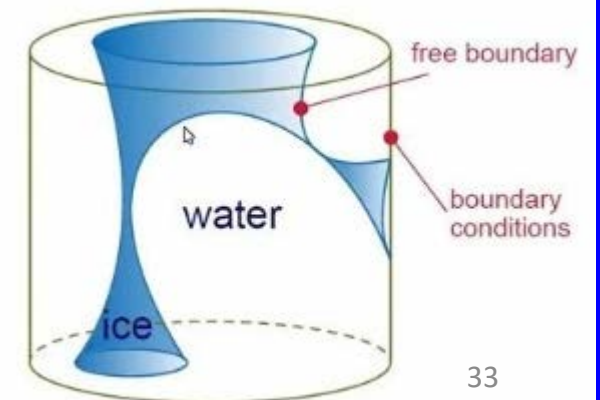
THE ABEL PRIZE LAUREATE 2023

Luis Caffarelli



Free boundary regularity in the Stefan problem

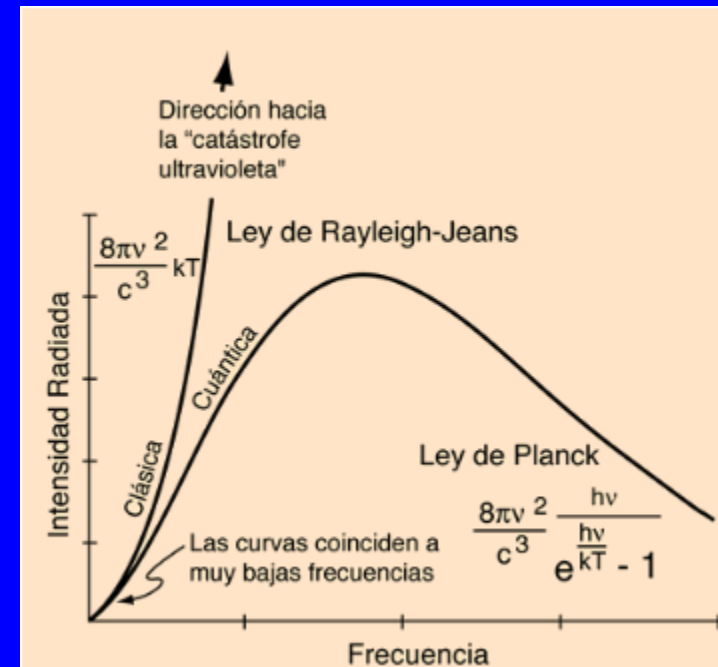
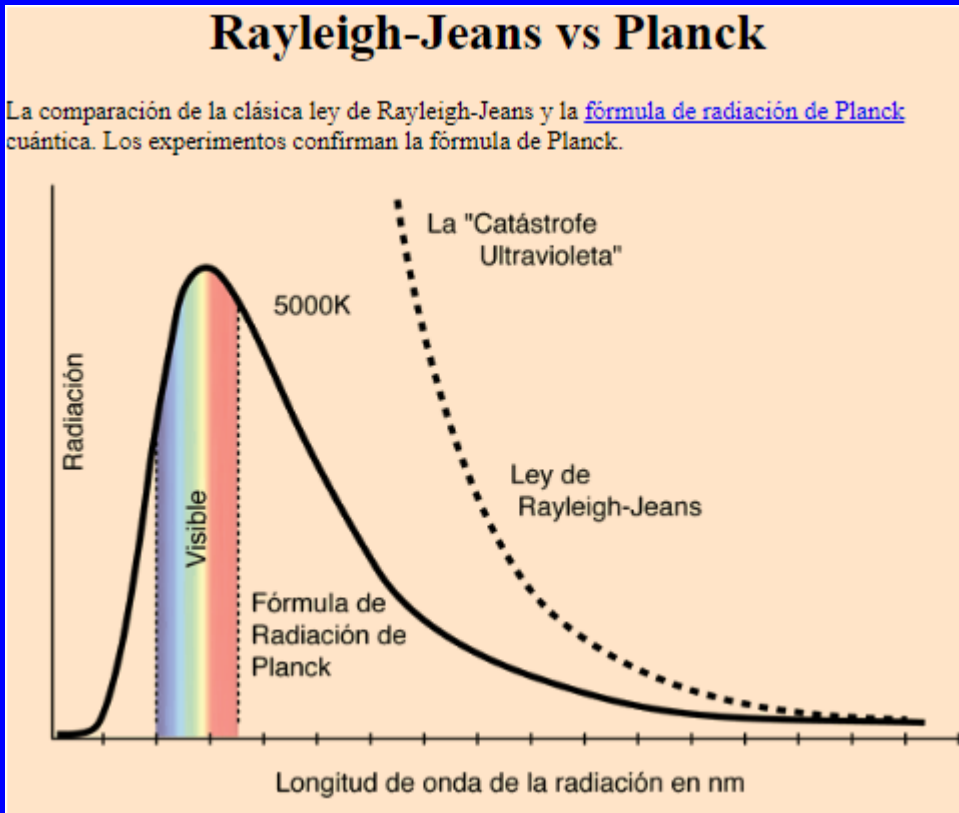
Prof. Dr. Alessio Figalli



Antes de presentar la Ley de radiación de Planck necesitamos recordar muy sucintamente un hecho previo fundamental: **la catástrofe ultravioleta**.

John William Strutt, **Lord Rayleigh** (1842-1919)

James Hopwood **Jeans** (1877-1946)



Ley de Planck (1900):



Sencillo argumento de **interpolación matemática de 1900** (tres páginas):

Max Planck (1858-1947)

Argumento adicional:

Osciladores armónicos en la superficie del cuerpo negro

$$I(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

M. Planck, (1914) *The Theory of Heat Radiation* (original de 1906)

- Esta interpolación, aunque matemáticamente tan sencilla, fue una de las contribuciones más significativas y trascendentales jamás realizadas en la historia de la Física.
- No solo lo hizo llevar a Planck, en su búsqueda de su corroboración lógica, a la propuesta de su elemental **cuánto de acción** y así inició el desarrollo temprano de la Mecánica Cuántica: afectó decisivamente a los fundamentos mismos de la Física, así como a sus presupuestos epistemológicos.
- Jamás en la historia de la Física hubo una interpolación matemática con relaciones físicas y filosóficas de tantas consecuencias.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{\text{constant}}{U} \quad (1)$$

S= Entropía (mide el “orden termodinámico”, “grado de organización”)

U= Energía

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{\text{constant}}{U^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{a}{U(U + b)} \quad (3)$$

Cuando U es grande (3) se aproxima a (2), y cuando U es pequeño (3) se aproxima a (1).

h = constante de Planck = 6,626 070 15 × 10⁻³⁴ J/s

Efecto fotoeléctrico de Einstein, Ley de ondas de materia de L. de Broglie, Ecuación de Schrödinger,...

Algunos detalles matemáticos sobre el argumento de Planck (1900):

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} = a' \log \left(\frac{U + b}{U} \right)$$

$$a' = \frac{-a}{b}$$

Despejando

$$U = \frac{1}{e^{\left(\frac{1}{a'T}\right)} - 1}$$

Mediante argumentos adicionales,

$$u_\nu = \frac{Av^3}{e^{\left(\frac{Bv}{T}\right)} - 1}$$

u_ν densidad de energía a la frecuencia ν

(A y B adecuadas constantes).

Planck concluyó (con otros argumentos) que la intensidad de la luz emitida por un cuerpo negro es

$$I(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)} - 1}$$

h = constante de Planck

La ley de Stefan-Boltzmann se obtiene al expresar la potencia emitida, por unidad de área del cuerpo emisor, “sumando” en todas las frecuencias:

$$\frac{P}{A} = \frac{2\pi k^3 T^3}{h^2 c^2} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^3}{e^{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)} - 1} d\nu$$

Por tanto, tenemos que calcular la integral *doblemente impropia*

$$\int_0^\infty \frac{u^3}{e^u - 1} du.$$

¿Es convergente esa integral?

Una primera idea: la exponencial crece más rápido que cualquier potencia. Eso es una razón aceptable, pero ¿qué pasa con el comportamiento cerca de $u = 0$? ¿cuánto vale exactamente esa integral?

Los detalles del primer argumento son

$$\frac{u^3}{e^u - 1} = \frac{u^3}{1 + u + \frac{u^2}{2!} + \dots - 1} = \frac{u^2}{1 + \frac{u}{2!} + \dots}$$

y cuando u tiende a cero se obtiene cero. ¿Cómo probar la convergencia?

$$1 + \frac{u}{2!} + \frac{u^2}{3!} + \dots + \frac{u^n}{(n+1)!} + \dots \geq 1 + \frac{u}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{u}{2}\right)^n + \dots = e^{\frac{u}{2}}$$

pues

$$\frac{u^n}{(n+1)!} \geq \frac{1}{n!} \left(\frac{u}{2}\right)^n \text{ for } n \geq 1$$

Por tanto

$$\frac{u^3}{e^u - 1} = \frac{u^2}{1 + \frac{u}{2!} + \dots} \leq u^2 e^{-\frac{u}{2}}$$

La convergencia es ahora sencilla, pues

$$\int_0^\infty \frac{u^3}{e^u - 1} du \leq \int_0^\infty u^2 e^{-\frac{u}{2}} du = 2 \int_0^\infty (2t)^2 e^{-t} dt$$

Recordando la función gamma

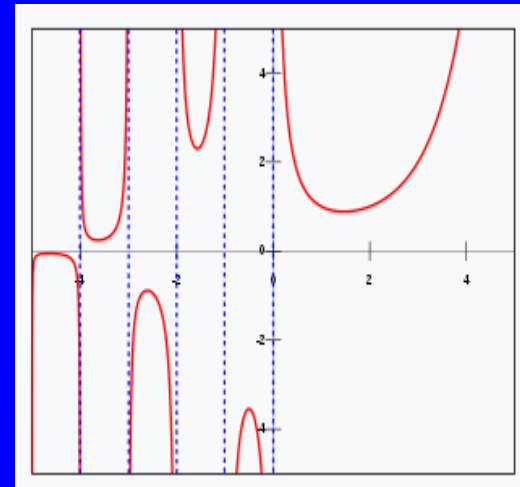
$$\Gamma(u + 1) = \int_0^\infty t^u e^{-t} dt \quad \Gamma(n + 1) = n!$$

Daniel Bernoulli (1700 – 1782) en 1720

Notación de Adrien-Marie Legendre (1752-1833)

resulta

$$\int_0^\infty \frac{u^3}{e^u - 1} du \leq 8 \Gamma(3) = 16$$



El cálculo efectivo de esa integral requiere **un análisis más fino**. Se tiene

$$\int_0^{\infty} \frac{u^3}{e^u - 1} du = \int_0^{\infty} u^3 (e^{-u} + e^{-2u} + e^{-3u} + \dots) du = \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u^3 e^{-ku} du$$

Si se puede intercambiar la integración con el sumatorio infinito se ven buenas cosas pues

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} u^3 e^{-u} du &= \Gamma(4) \\ \int_0^{\infty} u^3 e^{-2u} du &= \frac{1}{16} \int_0^{\infty} u^3 e^{-u} du = \frac{1}{16} \Gamma(4) = \frac{1}{2^4} \Gamma(4) \\ \int_0^{\infty} u^3 e^{-3u} du &= \frac{1}{3^4} \int_0^{\infty} u^3 e^{-u} du = \frac{1}{3^4} \Gamma(4) \\ &\vdots \\ \int_0^{\infty} u^3 e^{-ku} du &= \frac{1}{k^4} \int_0^{\infty} u^3 e^{-u} du = \frac{1}{k^4} \Gamma(4) \end{aligned}$$

La justificación de ese intercambio se obtiene por el criterio de Karl Weierstrass (1815 –1897), pues la *serie mayorante* es uniformemente convergente. Entonces, se llega a

$$\int_0^{\infty} \frac{u^3}{e^u - 1} du = \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u^3 e^{-ku} du = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} u^3 e^{-ku} du = \Gamma(4) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$$

Un cálculo (pesado pero muy conocido) termina comprobando que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Regresando al problema original (la ley de Stefan-Boltzman a partir de la de Planck), hacemos el cambio $u = \frac{h\nu}{kT}$ y resulta

$$\begin{aligned} \frac{P}{A} &= \frac{2\pi k^3 T^3}{h^2 c^2} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^3}{e^{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)} - 1} d\nu \\ &= \frac{2\pi k^3 T^3}{h^2 c^2} \int_0^{\infty} \frac{u^3}{e^u - 1} \frac{kT}{h} du \\ &= \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \frac{\pi^4}{15} \\ &= \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} T^4 \\ &= \sigma T^4 \end{aligned}$$

Es la **unificación de diferentes leyes**: como la ley de la gravitación de Newton justificando la de la gravedad, según Newton , e incluso la Teoría General de la Relatividad, de Einstein, justificando la Ley de gravitación de Newton.

Hay muchísimos más ejemplos.

- James Clerk Maxwell, consigue unificar las leyes previas sobre electricidad y magnetismo en tan sólo cuatro “ecuaciones sencillas”,
- Teoría cuántica de campos [Steven Weinberg y Abdus Salam elaboraron en 1967-1968, una teoría relativista del campo cuántico, que permitía expresar las interacciones electromagnéticas y débiles de una manera unificadas (modelo electrodébil), y que predijo hechos que luego fueron comprobados experimentalmente.
- **Teoría del todo ???**

Ross, G. (1984). *Grand Unified Theories*. Westview Press.

4. Comentarios finales: bifurcación de soluciones en otros modelos climáticos

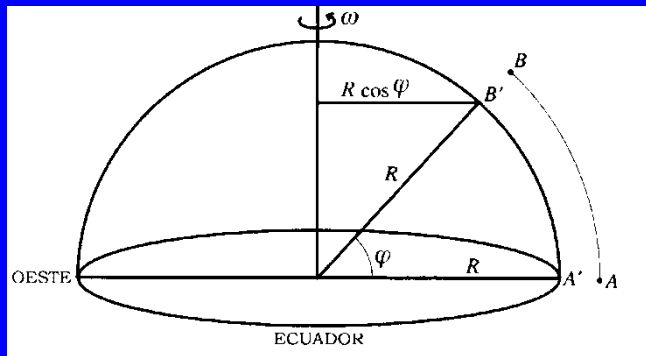
Modelo uni-dimensional: latitud

Pegase al modelo de balance de energía global (MBE):

- las latitudes más bajas reciben en promedio más energía del Sol que las más altas (en cada hemisferio),
- las regiones polares están cubiertas de nieve y hielo y tienen un albedo más alto que la región ecuatorial.

MBE unidimensional (Temperatura constante en la misma latitud)

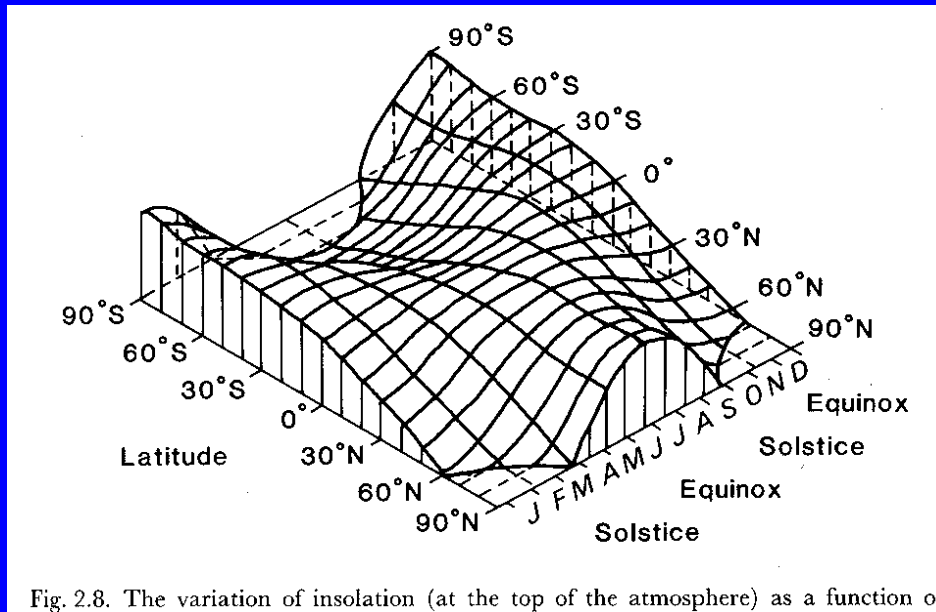
Jerarquía de modelos: el operador de difusión D



$$D = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(1 - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$x = \cos \varphi$$

Regreso a modelos simplificados: *Leyes de estado*



$$R_a = QS(x)\beta(u)$$

Fig. 2.8. The variation of insolation (at the top of the atmosphere) as a function of

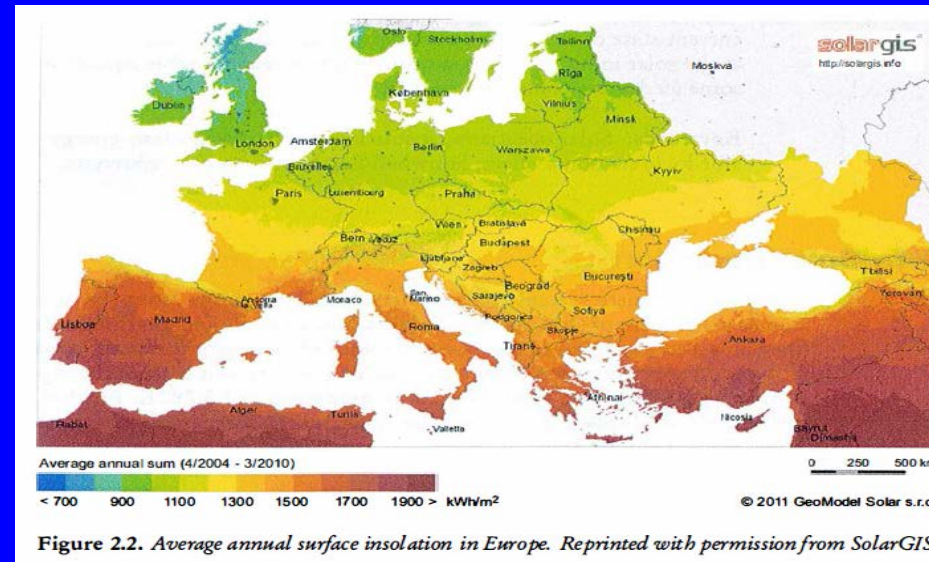
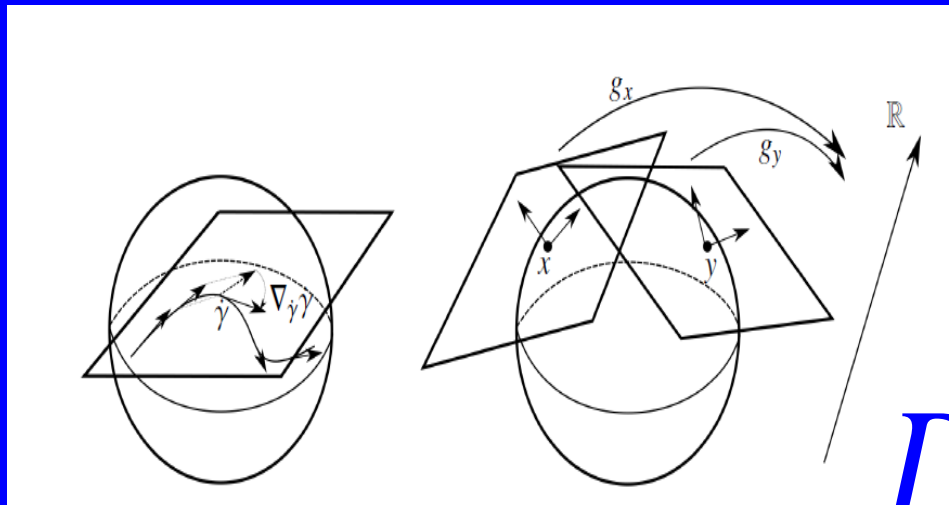
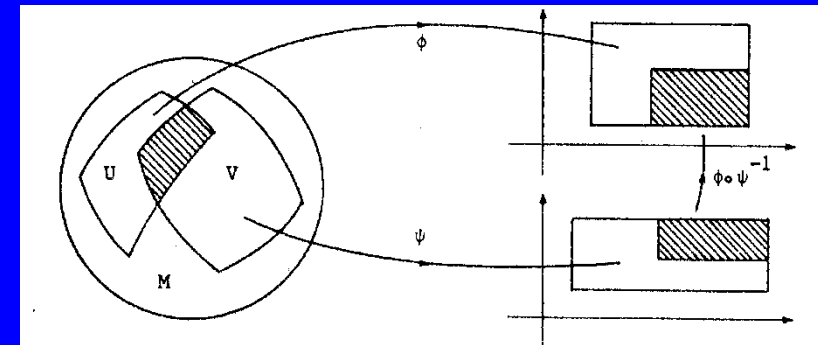
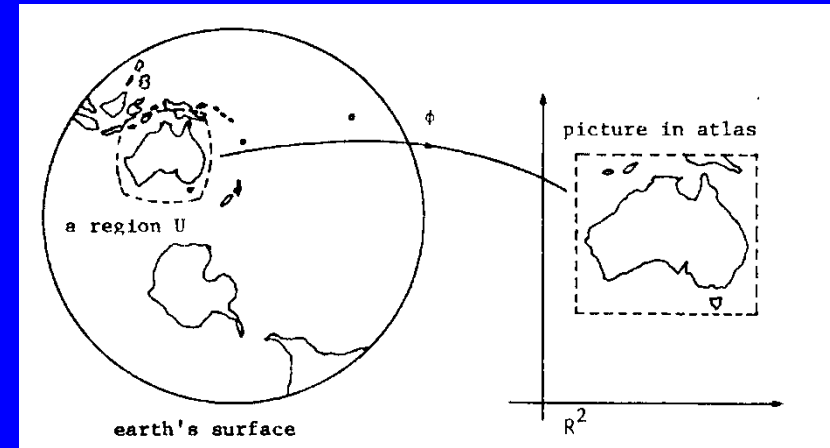
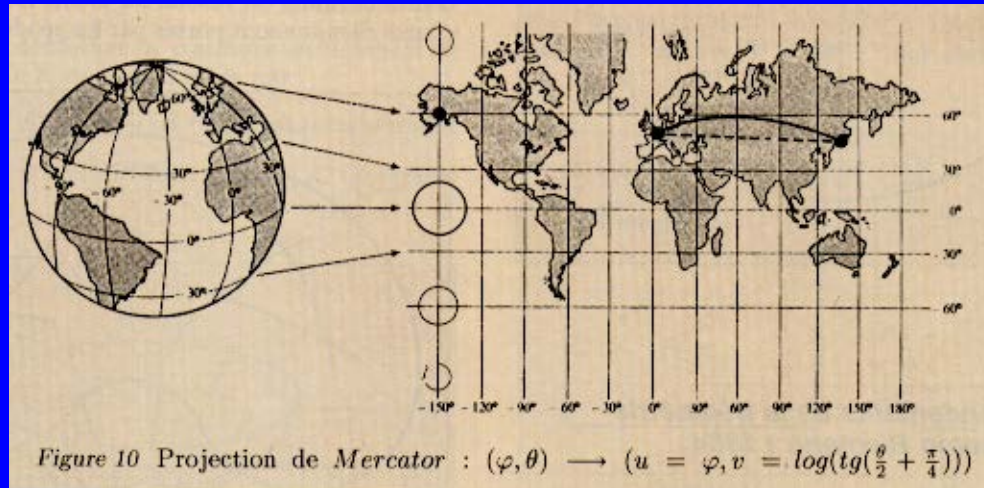


Figure 2.2. Average annual surface insolation in Europe. Reprinted with permission from SolarGIS.

Difusión bidimensional

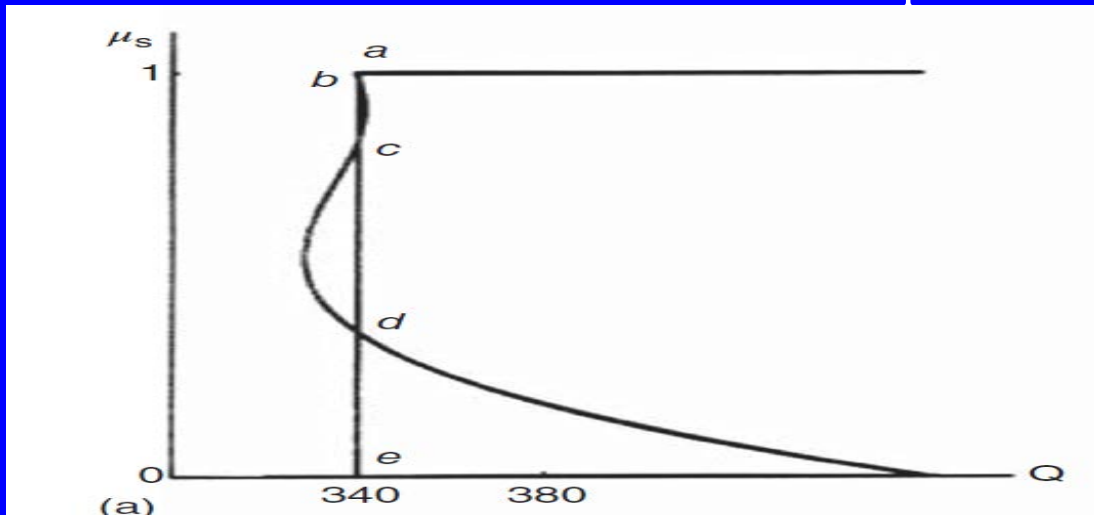


$$D = \text{div}(k(x)\nabla u)$$

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = Q\beta(u) - R_e(x, u) + \text{div}(k(x)\nabla u)$$

$$u(x, t_0) = u_0(x)$$

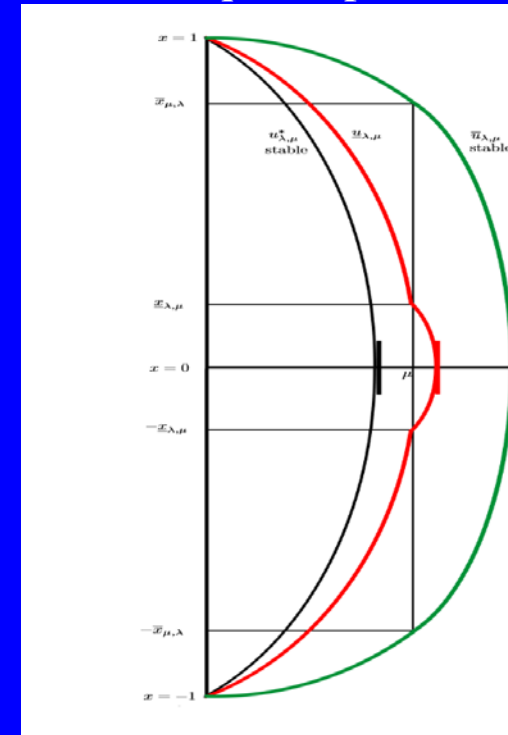
Diagramas de bifurcación mucho más complicados que en el caso cero-dimensional pero con *tipping points*



G. R. North North and K. Kim,
Energy Balance Climate Models
(2017)

5 estados estacionarios en función
del coseno de la latitud del
casquete polar Norte

Dos climas *monótonos* con
casquetes polares
(el verde es el estable:
menores casquetes polares)



S. Bensid and J. I. Díaz, On the exact number of
monotone solutions of a simplified Budyko climate model
and their different stability. Discrete and Continuous
Dynamical Systems, Series B, 24, 3 (2019) 1033-1047

Aproximación numérica de EBM bidimensionales

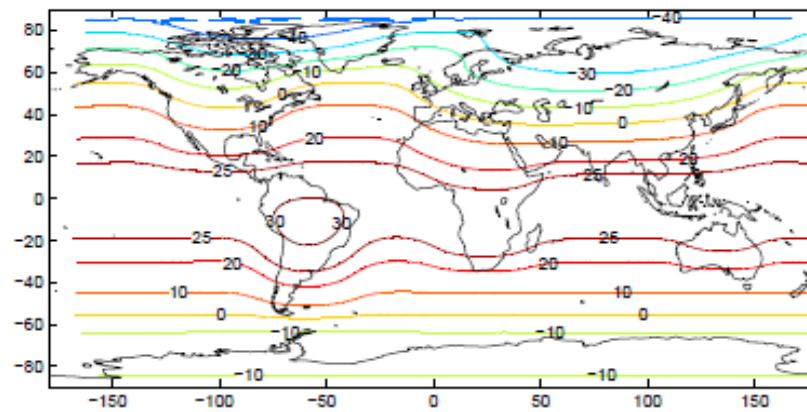
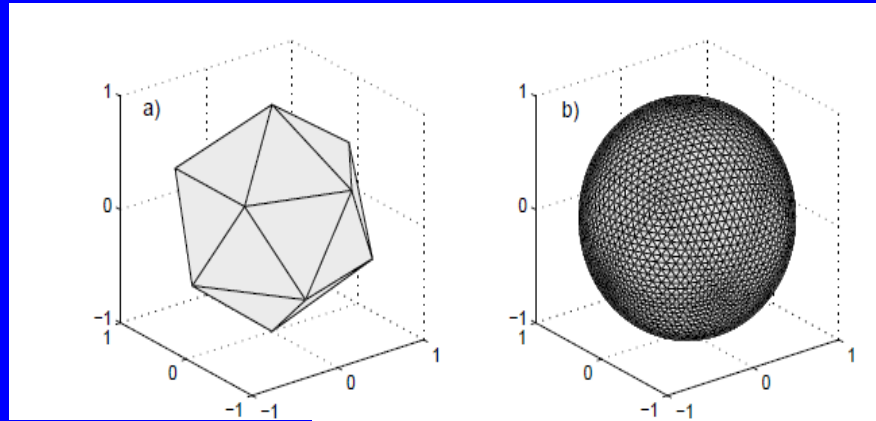


Figure 3: Distribution of

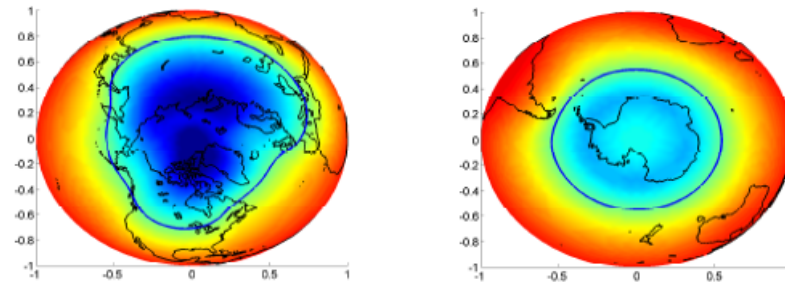


Figure 4: -2°C January snow line. Left: northern hemisphere; right: southern hemisphere.

R. Bermejo, J. Carpio, J.I. Díaz, L. Tello,
*Mathematical and Numerical Analysis of a Nonlinear
Climate Energy Balance Model.*
Mathematical and Computer Modelling, 2008.

Modelos de Balance de Energía más complejos:

- Términos de retardo (promedios,...)
- Acoplamiento con las ecuaciones de la energía interna del océano profundo
- Acoplamiento con las ecuaciones de la dinámica de grandes masas de hielo
- Acoplamiento con las ecuaciones de la Mecánica Celeste
- Acoplamiento con las ecuaciones del manto como medio visco-elástico
- Acoplamiento con modelos para la biosfera

Modelos estocásticos : Volcanes

$$R_e(x,u)$$

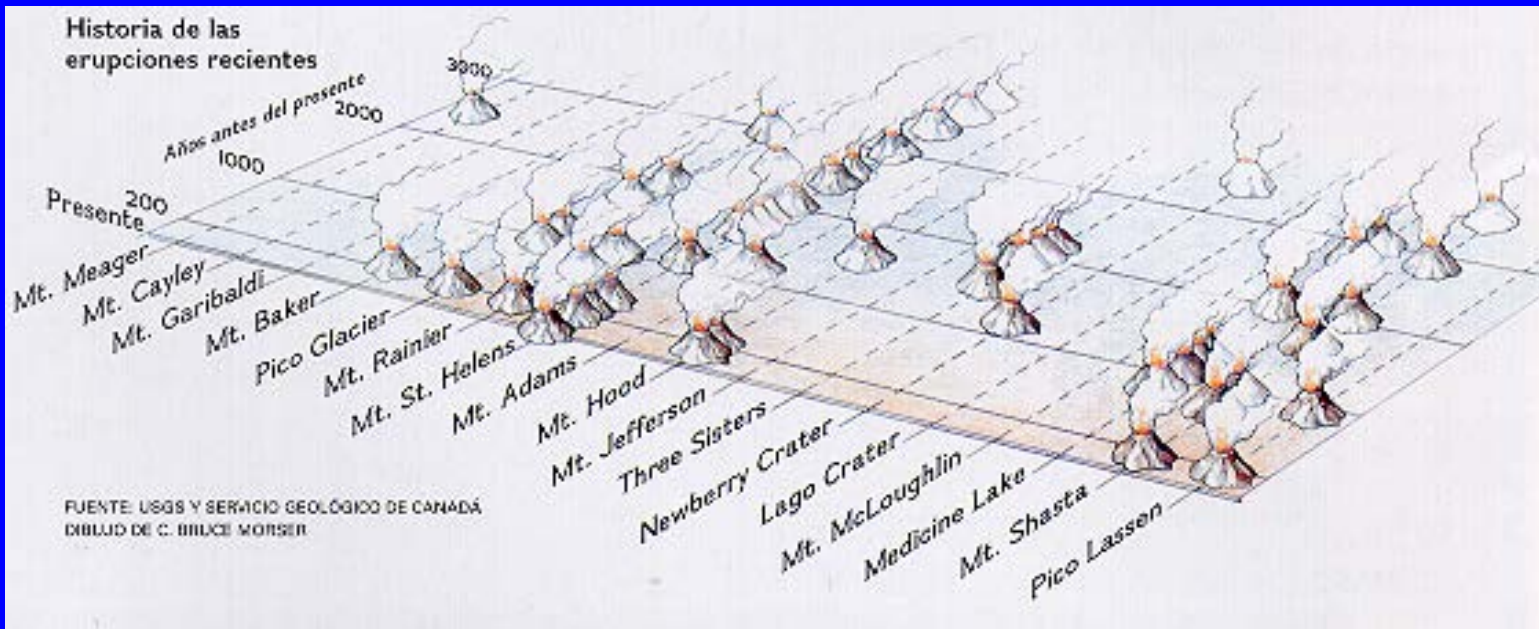
**Término estocástico
(Ruido blanco)**

Cahalan-North, 1982

M. Ghil, V. Lucarini (2020)

Centre for the Mathematics of Planet Earth,
University of Reading, UK

G.Díaz, J.L. Diaz (2002, 2023,..)



Acoplamiento EBM con océanos profundos

R.G. Watts, M. Morantine. Rapid climatic change and the deep ocean, *Climatic Change* 16 (1990), 83–97.

PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY A | MATHEMATICAL, PHYSICAL & ENGINEERING SCIENCES

Multiple solutions and numerical analysis to the dynamic and stationary models coupling a delayed energy balance model involving latent heat and discontinuous albedo with a deep ocean

J. I. Díaz, A. Hidalgo and L. Tello

Proc. R. Soc. A 2014 470, 20140376, published 27 August 2014

COMPARISON OF RESULTS WITH AND WITHOUT LATENT HEAT

Una “demostración rigurosa” de la conclusión estrella del informe del IPCC
www.climatechange2013.org/report/

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma(U)}{\partial t} - \operatorname{div}(\nabla U) + w \frac{\partial U}{\partial z} &\ni 0 \quad \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|\nabla_{\mathcal{M}} u|^{p-2} \nabla_{\mathcal{M}} u) + \frac{\partial U}{\partial n} + F(x, \nabla_{\mathcal{M}} u) + \mathcal{G}(t, x, u, u(t-\tau)) &\in \frac{1}{\rho c} Q S(t, x) \beta(u) + f(x) \\ &\text{in } (0, T) \times \mathcal{M} \\ U|_{\mathcal{M}} &= u \\ \hat{F}(x, \nabla_{\mathcal{N}} U) + \frac{\partial U}{\partial z} &= 0 \quad \text{in } (0, T) \times \mathcal{N} \\ U(0, x, z) &= U_0(x, z) \quad \text{in } \Omega, \\ u(s, \cdot) &= u_0(s, \cdot) \quad \text{on } [-\tau, 0] \times \mathcal{M}. \end{aligned}$$

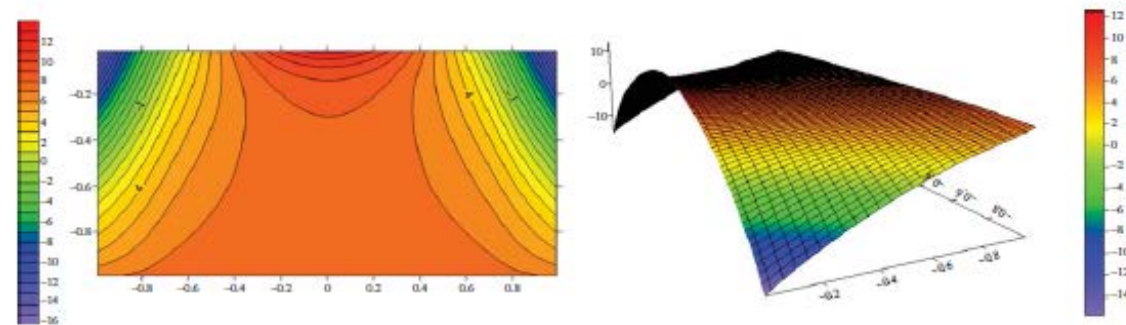


Figure 1. Temperature without latent heat ($\gamma(u) = u$) and $t = 5$. (Online version in colour.)

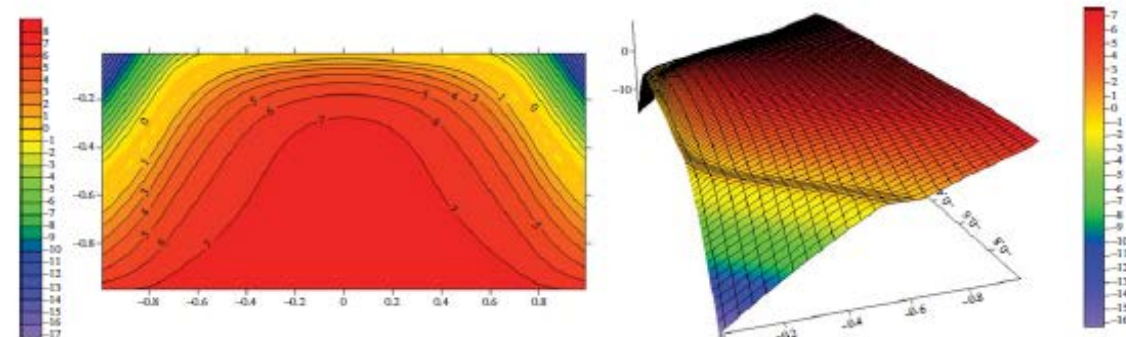


Figure 2. Temperature with latent heat and $t = 5$. (Online version in colour.)

El estudio del clima, como tantos otros aspectos del desarrollo sostenible, es un **descomunal reto** que requiere el encuentro interdisciplinar de numerosas ciencias y el soporte de sus principios básicos.

Gracias por su atención